NASLOV ORIGINALA

Г. С. БАРАНЕНКОВ, Б. П. ДЕМИДОВИЧ, В. А. ЕФИМЕНКО,
С. [illegible] КОГАН, Г. Л. ЛУНЦ, Е. Ф. ПОРШНЕВА, Е. П. СЫЧЕВА,
С. В. ФРОЛОВ, Р. Я. ШОСТАК, А. Р. ЯНПОЛЬСКИЙ

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ДЛЯ ВТУЗОВ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Б. П. ДЕМИДОВИЧА

ИЗДАНИЕ ДЕВЯТОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1974

PREVELI S RUSKOG
Ing. I. UREMOVIĆ — Ing. Z. VISTRIČKA

REDAKTOR HRVATSKOSRPSKOGA IZDANJA
PROF. DR ING. D. BLANUŠA
redovni član Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti

G. S. BARANENKOV, B. P. DEMIDOVIČ, V. A. JEFIMENKO,
S. M. KOGAN, G. L. LUNC, E. F. PORŠNEVA, E. P. SYČEVA,
S. V. FROLOV, R. J. ŠOSTAK, A. R. JANPOLJSKIJ

ZADACI I RIJEŠENI PRIMJERI IZ VIŠE MATEMATIKE
S PRIMJENOM NA TEHNIČKE NAUKE

PETO ISPRAVLJENO IZDANJE

REDAKTOR:
B. P. DEMIDOVIČ

TEHNIČKA KNJIGA
ZAGREB

PREDGOVOR PRVOM IZDANJU

Gradivo iz raznih područja više matematike može se samo onda temeljito svladati ako se pojedine metode i računski postupci uvježbaju rješavanjem većeg broja primjera. Povrh toga je neophodno da se vidi i primjena tih metoda na probleme prirodnih i drugih nauka te na tehničke probleme. To je dakako naročito važno za one koji matematiku izučavaju upravo radi tih primjena.

Zbirku, koja evo izlazi u prijevodu sastavilo je više ruskih autora pod redakcijom B. P. Demidoviča. Ona se odlikuje bogatstvom dobro odabranih primjera iz svih područja više analize, iz diferencijalnog računa, integralnog računa i diferencijalnih jednadžbi, a obrađene su i metode približnog računanja. Pri tom su u tekstu dana kratka, ali temeljita teorijska objašnjenja i lijep broj potpuno izrađenih standardnih primjera. Za sve numeričke zadatke dana su na kraju knjige rješenja, a za teže zadatke, označene sa jednom ili dvije zvjezdice (*) uz broj, i kratke upute. U dodatku se mogu naći neke najvažnije tablice i niz nacrtanih krivulja. U samom tekstu također ima preko stotine crteža.

Opseg obuhvaćenog materijala vidi se potanje iz sadržaja. Može se reći da je uzeto u obzir sve što ulazi u okvir uvodnih predavanja više matematike na fakultetima i visokim školama, s izuzetkom analitičke geometrije kojoj se redovno posvećuju posebne zbirke zadataka.

Vjerujem da je izdavanjem ove odlične zbirke Tehnička knjiga, Zagreb, znatno olakšala izučavanje više matematike svim studentima koji se njome bave bilo kao glavnim predmetom studija, bilo kao sredstvom koje im je neophodno za svladavanje tehničkih ili drugih nauka, jer pored primjera koji služe uvježbavanju formalnih postupaka ima velik broj primjera gdje se ti postupci primjenjuju na konkretne tehničke i fizikalne probleme.

D. Blanuša

PREDGOVOR PETOM IZDANJU

Ovo peto izdanje izlazi kao popravljeno. U njemu su otklonjene sve zapažene grafičke pogreške, a pojedine definicije i pojmovi temeljitije su pojašnjeni. Neke ispravke i preinake primili smo od redaktora ruskog izdanja B. P. Demidoviča, pa smo ih u cijelosti, uz još neke naše, uvrstili u ovo izdanje.

Vjerujemo da će ovako prerađeno, novo izdanje, još više olakšati izučavanje više matematike svim studentima, a naročito studentima kojima su „Demidovičevi zadaci“ obvezan udžbenik.

U listopadu 1978. *I. Uremović — Z. Vistrička*

SADRŽAJ

Str.

Predgovor 5

Glava I. **Uvod u analizu** 11

1. Pojam funkcije 11
2. Grafovi elementarnih funkcija 16
3. Limesi 22
4. Neizmjerno male i neizmjerno velike veličine 33
5. Neprekinutost funkcija 36

Glava II. **Deriviranje funkcija** 43

1. Neposredno izračunavanje derivacija 43
2. Tablično deriviranje 47
3. Derivacije funkcija koje nisu eksplicitno zadane 58
4. Primjena derivacija u geometriji i mehanici 62
5. Derivacije višeg reda 67
6. Diferencijali prvog i višeg reda 72
7. Teoremi srednje vrijednosti 76
8. Taylorova formula 77
9. L'Hospital-Bernoullijevo pravilo za neodređene oblike 79

Glava III. **Ekstremi funkcija i primjene derivacija u geometriji** 83

1. Ekstremi funkcije jednog argumenta 83
2. Smjer konkavnosti. Tačke infleksije 91
3. Asimptote 92
4. Konstrukcija grafova funkcija prema karakterističnim tačkama .. 95
5. Diferencijal luka. Zakrivljenost. 100

Glava IV. **Neodređeni integral** 105

1. Neposredno integriranje 105
2. Metoda supstitucije 112
3. Parcijalna integracija 116
4. Jednostavniji integrali s kvadratnim trinomom 117
5. Integriranje racionalnih funkcija 121

Str.

6. Integriranje nekih iracionalnih funkcija 125
7. Integriranje trigonometrijskih funkcija 128
8. Integriranje hiperbolnih funkcija 133
9. Primjena trigonometrijskih i hiperbolnih supstitucija na određivanje integrala oblika $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, gdje je R racionalna funkcija 134
10. Integriranje raznih transcendentnih funkcija 136
11. Primjena redukcionih formula 136
12. Integriranje raznih funkcija 136

Glava V. **Određeni integral** 139

1. Određeni integral kao limes sume 139
2. Izračunavanje određenih integrala pomoću neodređenih 141
3. Nepravi integrali 144
4. Zamjena varijable u određenom integralu 148
5. Parcijalna integracija 150
6. Teorem o srednjoj vrijednosti 151
7. Površine ravninskih likova 153
8. Duljina luka krivulje 158
9. Volumeni tijela 161
10. Površina rotacione plohe 165
11. Momenti. Težište. Guldinovi teoremi 166
12. Primjena određenih integrala na rješavanje zadataka iz fizike 170

Glava VI. **Funkcije više varijabli** 177

1. Osnovni pojmovi 177
2. Neprekinutost 181
3. Parcijalne derivacije 182
4. Totalni diferencijal funkcije 185
5. Deriviranje složenih funkcija 187
6. Derivacija u zadanom smjeru i gradijent funkcije 191
7. Derivacije i diferencijali višeg reda 194
8. Integriranje totalnih diferencijala 200
9. Deriviranje implicitno zadanih funkcija 203
10. Zamjena varijabli 210
11. Tangencijalna ravnina i normala na plohu 215
12. Taylorova formula za funkcije više varijabli 218
13. Ekstremi funkcija više varijabli 220
14. Zadaci za određivanje najvećih i najmanjih vrijednosti funkcija 224
15. Singularne tačke ravninskih krivulja 226

Str.

16. Ovojnica 229
17. Duljina luka prostorne krivulje 230
18. Vektorska funkcija skalarnog argumenta 231
19. Popratni trobrid prostorne krivulje 234
20. Zakrivljenost i torzija prostorne krivulje 238

Glava VII. **Višestruki i krivuljni integrali** 241

1. Dvostruki integral u pravokutnim koordinatama 241
2. Zamjena varijabli u dvostrukom integralu 246
3. Izračunavanje površina likova 249
4. Izračunavanje volumena tijela 250
5. Izračunavanje površina ploha 252
6. Primjene dvostrukog integrala u mehanici 253
7. Trostruki integrali 255
8. Nepravi integrali ovisni o parametru. Nepravi višestruki integrali .. 261
9. Krivuljni integrali 265
10. Plošni integrali 274
11. Formula Ostrogradskog-Gaussa 276
12. Elementi teorije polja 277

Glava VIII. **Redovi** 283

1. Redovi brojeva 283
2. Redovi funkcija 295
3. Taylorov red 301
4. Fourierovi redovi 307

Glava IX. **Diferencijalne jednadžbe** 311

1. Provjera rješenja. Sastavljanje diferencijalnih jednadžbi porodica krivulja. Početni uvjeti 311
2. Diferencijalne jednadžbe prvog reda 314
3. Diferencijalne jednadžbe prvog reda sa separiranim varijablama. Ortogonalne trajektorije 316
4. Homogene diferencijalne jednadžbe prvog reda 319
5. Linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda. Bernoullijeva jednadžba 320
6. Egzaktne diferencijalne jednadžbe. Eulerov multiplikator 323
7. Diferencijalne jednadžbe prvog reda koje nisu riješene s obzirom na derivaciju 325
8. Lagrangeova i Clairautova jednadžba 328
9. Razne diferencijalne jednadžbe prvog reda 329
10. Diferencijalne jednadžbe višeg reda 334
11. Linearne diferencijalne jednadžbe 338

Str.

12. Linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima 340
13. Linearne diferencijalne jednadžbe višega od drugog reda s konstantnim koeficijentima 345
14. Eulerova jednadžba 346
15. Sistemi diferencijalnih jednadžbi 347
16. Integriranje diferencijalnih jednadžbi pomoću redova potencija 350
17. Zadaci za Fourierovu metodu 352

Glava X. **Približni račun** 355

1. Računanje s približnim vrijednostima 355
2. Interpolacija funkcija 359
3. Određivanje realnih korijena jednadžbi 363
4. Numeričko integriranje funkcija 368
5. Numerička integracija običnih diferencijalnih jednadžbi 371
6. Približno izračunavanje Fourierovih koeficijenata 378

Odgovori 381

Prilozi

I. Grčki alfabet 475
II. Neke konstante 475
III. Recipročne vrijednosti, potencije, korijeni, logaritmi 476
IV. Trigonometrijske funkcije 478
V. Eksponencijalne, hiperbolne i trigonometrijske funkcije 479
VI. Neke krivulje 480

GLAVA I

UVOD U ANALIZU

1. Pojam funkcije

1°. **Realni brojevi.** Racionalne i iracionalne brojeve nazivamo *realnim brojevima*. *Pod apsolutnom vrijednosti* realnog broja a podrazumijevamo nenegativni broj $|a|$, određen uvjetima: $|a| = a$ kada je $a \geqslant 0$, i $|a| = -a$, kada je $a < 0$. Za bilo koje realne brojeve a i b vrijedi nejednadžba

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

2°. **Definicija funkcije.** Ako svakoj vrijednosti*) varijable x koja pripada nekom skupu E, odgovara jedna i samo jedna konačna vrijednost veličine y, tada y nazivamo (jednoznačnom) *funkcijom* od x, ili *zavisnom varijablom*, definiranom na skupu E; x nazivamo *argumentom*, ili *nezavisnom varijablom*. Činjenicu da je y funkcija od x ukratko izražavamo zapisom $y = f(x)$ ili $y = F(x)$ itd..

Ako svakoj vrijednosti x koja pripada nekom skupu E, odgovara jedna ili nekoliko vrijednosti varijable y, tada y nazivamo *višeznačnom funkcijom* od x, definiranom na skupu E. U daljnjem ćemo pod riječju »funkcija« razumijevati samo *jednoznačne* funkcije, ako ne bude izričito drukčije rečeno.

3°. **Područje definicije funkcije.** Sve vrijednosti x, za koje je zadana funkcija definirana, nazivamo *područjem definicije* te funkcije.

U jednostavnim slučajevima područje definicije funkcije jest: ili *odsječak* (*zatvoreni interval*, *segment*) $[a, b]$, tj. skup realnih brojeva x, koji zadovoljavaju nejednadžbu $a \leqslant x \leqslant b$; ili *otvoreni interval* (a, b), tj. skup realnih brojeva x, koji zadovoljavaju nejednadžbu $a < x < b$. Ali moguća je i složenija struktura područja definicije funkcije (vidi na primjer zadatak 21).

Primjer 1. Odredimo područje definicije funkcije

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Rješenje. Funkcija je definirana ako je

$$x^2 - 1 > 0,$$

tj. ako je $|x| > 1$. Na taj način, područje definicije funkcije je unija dvaju intervala:

$$-\infty < x < -1 \quad \text{i} \quad 1 < x < +\infty.$$

4°. **Inverzne funkcije.** Ako za sve vrijednosti zavisne varijable y funkcije $f(x)$ jednadžbu $y = f(x)$ možemo jednoznačno riješiti po varijabli x, tj. ako postoji takva funkcija $x = g(y)$ da je $y \equiv f[g(y)]$, tada je funkcija $x = g(y)$, ili uobičajenom oznakom $y = g(x)$, *inverzna od* $y = f(x)$. Očigledno je da je $g[f(x)] \equiv x$, tj. funkcije $f(x)$ i $g(x)$ su međusobno inverzne.

Općenito, jednadžba $y = f(x)$ definira višeznačnu inverznu funkciju $x = f^{-1}(y)$ i to takvu, da je $y \equiv f(f^{-1}(y))$ za sve y koji su vrijednosti funkcije $f(x)$.

Primjer 2. Za funkciju

$$y = 1 - 2^{-x} \tag{1}$$

odredimo inverznu funkciju.

---

*) U daljnjem tumačenju sve razmatrane vrijednosti veličina smatrat ćemo realnim, ako ne bude izričito drukčije rečeno.

Rješenje. Ako jednadžbu (1) riješimo po x, dobivamo:

$$2^{-x} = 1 - y$$

$$x = -\frac{\lg(1-y)^{*)}}{\lg 2}. \qquad (2)$$

Područje definicije funkcije (2) očigledno je ovo: $-\infty < y < 1$.

5°. Složene i implicitne funkcije. Funkciju y od x zadanu lancem jednakosti $y = f(u)$, gdje je $u = \varphi(x)$ ($f(u)$ je definirano za sve u iz skupa vrijednosti funkcije $\varphi(x)$) itd. nazivamo *složenom* ili *funkcijom od funkcije.*

Funkciju, zadanu jednadžbom, koja nije riješena po zavisnoj varijabli, nazivamo *implicitnom.* Na primjer jednadžba $x^3+y^3=1$ određuje y kao implicitnu funkciju od x.

6°. Grafičko prikazivanje funkcije. Skup tačaka (x, y) ravnine XOY, kojima su koordinate povezane jednadžbom $y = f(x)$, nazivamo *grafom* zadane funkcije.

1.** Dokažite, ako su a i b realni brojevi, da je

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b| \leqslant |a| + |b|.$$

2. Dokažite ove jednadžbe:

a) $|ab| = |a| \cdot |b|$; c) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$;

b) $|a|^2 = a^2$; d) $\sqrt{a^2} = |a|$.

3. Riješite nejednadžbe:

a) $|x-1| < 3$; c) $|2x+1| < 1$;

b) $|x+1| > 2$; d) $|x-1| < |x+1|$.

4. Izračunajte $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, ako je $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

5. Izračunajte $f(0)$, $f\left(-\frac{3}{4}\right)$, $f(-x)$, $f\left(-\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$, ako je $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

6. Neka je $f(x) = \arccos(\lg x)$. Izračunajte $f\left(\frac{1}{10}\right)$, $f(1)$, $f(10)$.

7. Funkcija $f(x)$ je linearna. Nađite ovu funkciju ako je $f(-1) = 2$ i $f(2) = -3$.

8. Nađite cijelu racionalnu funkciju $f(x)$ drugog stupnja ako je $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ i $f(3) = 5$.

9. Poznato nam je da je $f(4) = -2$, $f(5) = 6$. Izračunajte približnu vrijednost $f(4, 3)$, smatrajući funkciju $f(x)$ na odsječku $4 \leqslant x \leqslant 5$ linearnom (*linearna interpolacija funkcije*).

10. Funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x \leqslant 0 \\ x, & \text{ako je } x > 0 \end{cases}$$

napišite pomoću jedne formule, koristeći se oznakom apsolutne vrijednosti.

---

*) lg $x = \log_{10} x$, označuje dekadski logaritam broja x.

Odredite područja definicije funkcija:

11. a) $y=\sqrt{x+1}$; b) $y=\sqrt[3]{x+1}$. **12.** $y=\dfrac{1}{4-x^2}$.

13. a) $y=\sqrt{x^2-2}$; b) $y=x\sqrt{x^2-2}$.

14.** $y=\sqrt{2+x-x^2}$. **15.** $y=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$.

16. $y=\sqrt{x-x^3}$. **17.** $y=\lg\dfrac{2+x}{2-x}$.

18. $y=\lg\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$. **19.** $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$

20. $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$. **21.** $y=\sqrt{\sin 2x}$.

22. Neka je $f(x)=2x^4-3x^3-5x^2+6x-10$. Izračunajte

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] \quad \text{i} \quad \psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

23. Funkciju $f(x)$ definiranu u simetričnom području $-l<x<l$, nazivamo *parnom*, ako je $f(-x)=f(x)$, i *neparnom* ako je $f(-x)=-f(x)$. Istražite koje su od zadanih funkcija parne, a koje su neparne:

a) $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$;

b) $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$;

c) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$;

d) $f(x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$;

e) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

24*. Dokažite da svaku funkciju $f(x)$, koja je definirana u intervalu $-l<x<l$, možemo predočiti u obliku zbroja parne i neparne funkcije.

25. Dokažite da je produkt dviju parnih funkcija ili dviju neparnih funkcija parna funkcija, a produkt parne funkcije s neparnom, da je neparna funkcija.

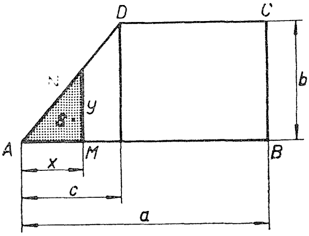
26. Funkciju $f(x)$ nazivamo *periodičnom*, ako postoji takav pozitivan broj T (*period funkcije*), da je $f(x+T)\equiv f(x)$ za sve vrijednosti x, koje pripadaju području definicije funkcije $f(x)$.
Odredite koje su od niže navedenih funkcija periodične i za te periodične funkcije nađite njihov najmanji period T:

a) $f(x)=10\sin 3x$; d) $f(x)=\sin^2 x$;

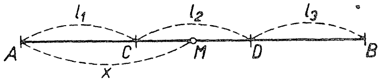
b) $f(x)=a\sin\lambda x+b\cos\lambda x$; e) $f(x)=\sin(\sqrt{x})$.

c) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg} x}$;

27. Izrazite dužinu odsječka $y = MN$ i površinu S lika AMN kao funkciju od $x = AM$ (sl. 1) te konstruirajte grafove tih funkcija.



Slika 1.



Slika 2.

28. Linearna gustoća (tj. masa po jedinici duljine) linije $AB = l$ (sl. 2) na dijelovima $AC = l_1$, $CD = l_2$ i $DB = l_3$, $(l_1+l_2+l_3 = l)$ jednaka je po redu q_1, q_2 i q_3. Izrazite masu m varijabilnog odsječka $AM = x$ te linije, kao funkciju od x. Konstruirajte također graf te funkcije.

29. Izračunajte $\varphi\,[\psi\,(x)]$ i $\psi\,[\varphi\,(x)]$, ako je $\varphi\,(x) = x^2$ i $\psi\,(x) = 2^x$.

30. Izračunajte $f\,\{f\,[f\,(x)]\}$, ako je $f\,(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

31. Izračunajte $f\,(x + 1)$, ako je $f\,(x - 1) = x^2$.

32. Neka je $f\,(n)$ zbroj n članova aritmetičke progresije. Pokažite da je

$$f(n+3)-3f(n+2)+3f(n+1)-f(n) = 0.$$

33. Pokažite ako je

$$f(x) = kx+b$$

i ako brojevi x_1, x_2, x_3 čine aritmetičku progresiju, da brojevi $f\,(x_1)$, $f\,(x_2)$ i $f\,(x_3)$ također čine aritmetičku progresiju.

34. Dokažite ako je $f\,(x)$ potencija, tj. $f\,(x) = a^x$ $(a>0)$, i ako brojevi x_1, x_2, x_3 čine aritmetičku progresiju, da brojevi $f\,(x_1)$, $f\,(x_2)$ i $f\,(x_3)$ čine geometrijsku progresiju.

35. Neka je

$$f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}.$$

Pokažite da je

$$f(x)+f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

36. Neka je $\varphi\,(x) = \dfrac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ i $\psi\,(x) = \dfrac{1}{2}(a^x - a^{-x})$. Pokažite da je

$$\varphi\,(x+y) = \varphi\,(x)\,\varphi\,(y)+\psi\,(x)\,\psi\,(y)$$

i

$$\psi\,(x+y) = \varphi\,(x)\,\psi\,(y)+\varphi\,(y)\,\psi\,(x).$$

37. Izračunajte $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, ako je

$$f(x)=\begin{cases}\arcsin x \text{ za } -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \operatorname{arctg} x \text{ za } 0<x<+\infty.\end{cases}$$

38. Odredite korijene (nule) te područja gdje je funkcija y pozitivna, odnosno negativna, ako je:

a) $y=1+x$; d) $y=x^3-3x$;

b) $y=2+x-x^2$; e) $y=\lg\dfrac{2x}{1+x}$.

c) $y=1-x+x^2$;

39. Za funkciju y izračunajte inverznu funkciju, ako je

a) $y=2x+3$; d) $y=\lg\dfrac{x}{2}$;

b) $y=x^2-1$; e) $y=\operatorname{arctg}3x$.

c) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$;

U kojim područjima će biti definirane ove inverzne funkcije?

40. Za funkciju

$$y=\begin{cases}x, \text{ ako je } x\leqslant 0,\\ x^2, \text{ ako je } x>0,\end{cases}$$

odredite inverznu funkciju.

41. Zadane funkcije napišite u obliku lanca jednakosti u kojem svaka karika sadrži jednostavnu elementarnu funkciju (potenciju, eksponencijalnu, trigonometrijsku itd.):

a) $y=(2x-5)^{10}$; c) $y=\lg\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;

b) $y=2^{\cos x}$; d) $y=\arcsin(3^{-x^2})$.

42. Složene funkcije, zadane lancem jednakosti, napišite u obliku jedne jednakosti:

a) $y=u^2$, $u=\sin x$;

b) $y=\operatorname{arctg}u$, $u=\sqrt{v}$, $v=\lg x$;

c) $y=\begin{cases}2u, \text{ ako je } u\leqslant 0,\\ 0, \text{ ako je } u>0;\end{cases}$ $u=x^2-1$.

43. Napišite u eksplicitnom obliku funkcije y koje su zadane jednadžbama:

a) $x^2-\arccos y=\pi$;

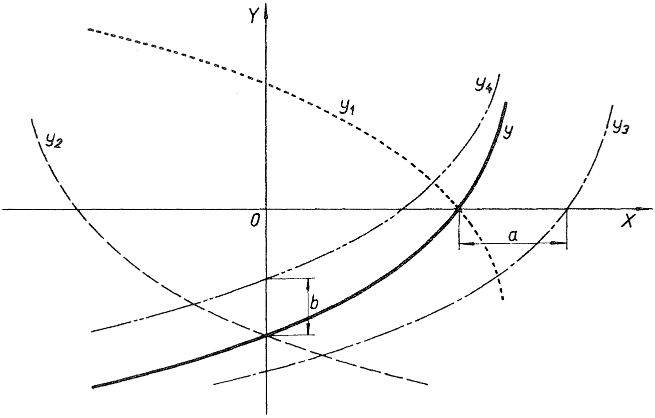
b) $10^x+10^y=10$;

c) $x+|y|=2y$.

Odredite i područja definicije zadanih implicitnih funkcija.

2. Grafovi elementarnih funkcija

Grafove funkcija $y=f(x)$ konstruiramo tako da načinimo dovoljno gustu mrežu tačaka $M_i(x_i, y_i)$, gdje je $y_i=f(x_i)$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$, i te tačke spojimo linijom, koja njima prolazi. Za izračunavanje preporučamo služiti se logaritamskim računalom.



Slika 3.

Konstrukciju grafova olakšava poznavanje grafova osnovnih elementarnih fukcija (vidi prilog VI). Polazeći od grafa

$$y=f(x), \qquad (\Gamma)$$

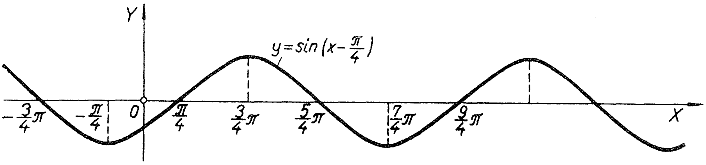
pomoću jednostavnih geometrijskih konstrukcija dobivamo ove grafove funkcija:

1. $y_1=-f(x)$	zrcaljenje grafa Γ na osi OX;
2. $y_2=f(-x)$	zrcaljenje grafa Γ na osi OY;
3. $y_3=f(x-a)$	graf Γ, pomaknut u smjeru osi OX za veličinu a;
4. $y_4=b+f(x)$	graf Γ, pomaknut u smjeru osi OY za veličinu b (slika 3).

Primjer. Konstruirajmo graf funkcije

$$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Rješenje. Tražena krivulja je sinusoida $y=\sin x$, pomaknuta u smjeru osi OX udesno za $\frac{\pi}{4}$ (sl. 4).



Slika 4.

Konstruirajte grafove linearnih funkcija (*pravci*):

44. $y=kx$, ako je $k=0,\ 1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ -1,\ -2.$

45. $y = x+b,$ ako je $b = 0,\ 1,\ 2,\ -1,\ -2.$

46. $y = 1{,}5x+2.$

Konstruirajte grafove cijelih racionalnih funkcija 2. stupnja (*parabole*):

47. $y = ax^2,$ ako je $a = 1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ -1,\ -2,\ 0.$

48. $y = x^2+c,$ ako je $c = 0,\ 1,\ 2,\ -1.$

49. $y = (x-x_0)^2,$ ako je $x_0 = 0,\ 1,\ 2,\ -1.$

50. $y = y_0+(x-1)^2,$ ako je $y_0 = 0,\ 1,\ 2,\ -1.$

51*. $y = ax^2+bx+c,$ ako je: 1) $a = 1,\ b = -2,\ c = 3;$
2) $a = -2,\ b = 6,\ c = 0.$

52. $y = 2+x-x^2.$ Odredite sjecišta te parabole s osi OX.

Konstruirajte grafove cijelih racionalnih funkcija višeg stupnja:

53*. $y = x^3$ (*kubna parabola*).

54. $y = 2+(x-1)^3.$

55. $y = x^3-3x+2.$

56. $y = x^4.$

57. $y = 2x^2-x^4.$

Konstruirajte grafove razlomljenih linearnih funkcija (*hiperbole*):

58*. $y = \frac{1}{x}.$

59. $y = \frac{1}{1-x}.$

60. $y = \frac{x-2}{x+2}.$

61*. $y = y_0+\frac{m}{x-x_0},$ ako je $x_0 = 1,\ y_0 = -1,\ m = 6.$

62*. $y = \frac{2x-3}{3x+2}.$

Konstruirajte grafove razlomljenih racionalnih funkcija:

63. $y = x+\frac{1}{x}.$

64. $y = \frac{x^2}{x+1}.$

65*. $y = \frac{1}{x^2}.$

66. $y = \frac{1}{x^3}.$

67*. $y = \frac{10}{x^2+1}$ (»*Versiera*« *Marije Agnesi*).

68. $y = \frac{2x}{x^2+1}$ (*Newtonova serpentina*).

69. $y = x + \frac{1}{x^2}$.

70. $y = x^2 + \frac{1}{x}$ (*Newtonov trozubac*).

Konstruirajte grafove iracionalnih funkcija:

71*. $y = \sqrt{x}$.

72.* $y = \sqrt[3]{x}$.

73*. $y = \sqrt[3]{x^2}$ (*Neilova parabola*).

74. $y = \pm x\sqrt{x}$ (*semikubna parabola*).

75*. $y = \pm\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$ (*elipsa*).

76. $y = \pm\sqrt{x^2-1}$ (*hiperbola*).

77. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

78*. $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{4-x}}$ (*Dioklova cisoida*).

79. $y = \pm x\sqrt{25-x^2}$.

Konstruirajte grafove trigonometrijskih funkcija:

80*. $y = \sin x$.

81*. $y = \cos x$.

82*. $y = \operatorname{tg} x$.

83*. $y = \operatorname{ctg} x$.

84*. $y = \sec x$.

85*. $y = \operatorname{cosec} x$.

86. $y = A\sin x$, ako je $A = 1,\ 10,\ \frac{1}{2},\ -2$.

87*. $y = \sin nx$, ako je $n = 1,\ 2,\ 3,\ \frac{1}{2}$.

88. $y = \sin(x-\varphi)$, ako je $\varphi = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \pi,\ -\frac{\pi}{4}$.

89*. $y = 5\sin(2x-3)$.

90*. $y = a\sin x + b\cos x$, ako je $a = 6,\ b = -8$.

91. $y = \sin x + \cos x$.

92*. $y = \cos^2 x$.

93*. $y = x + \sin x$.

94*. $y = x \sin x$.

95. $y = \mathrm{tg}^2 x$.

96. $y = 1 - 2\cos x$.

97. $y = \sin x - \frac{1}{3}\sin 3x$.

98. $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$.

99*. $y = \cos\frac{\pi}{x}$.

100. $y = \pm\sqrt{\sin x}$.

Konstruirajte grafove eksponencijalnih i logaritamskih funkcija:

101.* $y = a^x$, ako je $a = 2,\ \frac{1}{2},\ e\ (e = 2{,}718\ldots)$\*).

102*. $y = \log_a x$, ako je $a = 10,\ 2,\ \frac{1}{2},\ e$.

103*. $y = \mathrm{sh}\, x$, gdje je $\mathrm{sh}\, x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

104*. $y = \mathrm{ch}\, x$, gdje je $\mathrm{ch}\, x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

105*. $y = \mathrm{th}\, x$, gdje je $\mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$.

106. $y = 10^{\frac{1}{x}}$.

107*. $y = e^{-x^2}$ (*krivulja vjerojatnosti*).

108. $y = 2^{-\frac{1}{x^2}}$.

109. $y = \lg x^2$.

110. $y = \lg^2 x$.

111. $y = \lg(\lg x)$.

112. $y = \frac{1}{\lg x}$.

113. $y = \lg\frac{1}{x}$.

114. $y = \lg(-x)$.

115. $y = \log_2(1 + x)$.

116. $y = \lg(\cos x)$.

117. $y = 2^{-x}\sin x$.

Konstruirajte grafove ciklometrijskih funkcija:

118*. $y = \arcsin x$.

119*. $y = \arccos x$.

120*. $y = \mathrm{arctg}\, x$.

121*. $y = \mathrm{arcctg}\, x$.

---

*) O broju e detaljnije vidjeti na str. 23.

122. $y = \arcsin \frac{1}{x}$. **123.** $y = \arccos \frac{1}{x}$.

124. $y = x + \operatorname{arcctg} x$.

Konstruirajte grafove ovih funkcija:

125. $y = |x|$. **126.** $y = \frac{1}{2}(x + |x|)$.

127. a) $y = x|x|$; b) $y = \log_{\sqrt{2}} |x|$.

128. a) $y = \sin x + |\sin x|$; b) $y = \sin x - |\sin x|$.

129. $y = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{za } |x| \leqslant 1; \\ \dfrac{2}{|x|} & \text{za } |x| > 1. \end{cases}$

130. a) $y = [x]$, b) $y = x - [x]$, gdje je $[x]$ najveće cijelo broja x, tj. najveći cijeli broj, manji ili jednak x.

Konstruirajte grafove funkcija u sistemu polarnih koordinata (r, φ) $(r \geqslant 0)$:

131. $r = 1$ (*kružnica*). **132*.** $r = \frac{\varphi}{2}$ (*Arhimedova spirala*).

133*. $r = e^{\varphi}$ (*logaritamska spirala*). **134*.** $r = \frac{\pi}{\varphi}$ (*hiperbolna spirala*).

135. $r = 2 \cos \varphi$ (*kružnica*). **136.** $r = \frac{1}{\sin \varphi}$ (*pravac*).

137. $r = \sec^2 \frac{\varphi}{2}$ (*parabola*). **138*.** $r = 10 \sin 3\varphi$ (*ruža s tri latice*).

139*. $r = a(1 + \cos \varphi)$ $(a > 0)$ (*kardioida*).

140*. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ $(a > 0)$ (*lemniskata*).

Konstruirajte grafove funkcija koje su zadane parametarski:

141*. $x = t^3$, $y = t^2$ (*semikubna parabola*).

142*. $x = 10 \cos t$, $y = \sin t$ (*elipsa*).

143*. $x = 10 \cos^3 t$, $y = 10 \sin^3 t$ (*astroida*).

144*. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ (*evolventa kružnice*).

145*. $x = \frac{at}{1 + t^3}$, $y = \frac{at^2}{1 + t^3}$ (*Descartesov list*).

146. $x = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \frac{at}{\sqrt{1+t^2}}$ (*polukružnica*).

147. $x = 2^t + 2^{-t}$, $y = 2^t - 2^{-t}$ (*grana hiperbole*).

148. $x = 2\cos^2 t$, $y = 2\sin^2 t$ (*odsječak pravca*).

149. $x = t - t^2$, $y = t^2 - t^3$.

150.* $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$ (*kardioida*).

Konstruirajte grafove funkcija koje su zadane implicitno.

151*. $x^2 + y^2 = 25$ (*kružnica*).

152. $xy = 12$ (*hiperbola*).

153*. $y^2 = 2x$ (*parabola*).

154. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ (*elipsa*).

155. $y^2 = x^2(100 - x^2)$.

156*. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (*astroida*).

157*. $x + y = 10 \lg y$.

158. $x^2 = \cos y$.

159*. $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{Arctg} y/x}$ (*logaritamska spirala*).

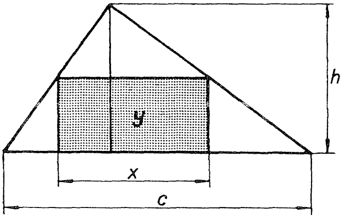
160*. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (*Descartesov list*).

161. Sastavite formulu za prijelaz od Celzijeve (C) skale na skalu Fahrenheita (F), ako znamo, da 0 °C odgovara 32 °F i 100 °C da odgovara 212 °F.

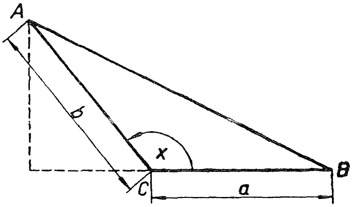
Konstruirajte graf dobivene funkcije.

162. U trokutu, kojemu je baza $c = 10$ i visina $h = 6$, upisan je pravokutnik (sl. 5). Treba izraziti površinu y toga pravokutnika kao funkciju njegove baze x.

Konstruirajte graf te funkcije i nađite njenu najveću vrijednost.



Slika 5.



Slika 6.

163. Trokut ABC ima stranice $BC = a$ i $AC = b$ te promjenljivi kut $\sphericalangle ACB = x$ (sl. 6).

Izrazite $y =$ površina $\triangle ABC$ kao funkciju od x.

Konstruirajte graf ove funkcije i nađite njenu najveću vrijednost,

164. Grafički riješite ove jednadžbe:

a) $2x^2-5x+2=0$;

b) $x^3+x-1=0$;

c) $\lg x=0{,}1\,x$;

d) $10^{-x}=x$;

e) $x=1+0{,}5\sin x$;

f) $\operatorname{ctg} x=x \qquad (0<x<\pi)$.

165. Grafički riješite ove sisteme jednadžbi:

a) $xy=10, \qquad x+y=7$;

b) $xy=6, \qquad x^2+y^2=13$;

c) $x^2-x+y=4, \qquad y^2-2x=0$;

d) $x^2+y=10, \qquad x+y^2=6$;

e) $y=\sin x, \qquad y=\cos x \qquad (0<x<2\pi)$.

3. Limesi

1°. Limes niza. Broj a nazivamo *limesom niza* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

ako za svaki $\varepsilon>0$ postoji takav broj $N=N(\varepsilon)$, da je

$$|x_n-a|<\varepsilon \text{ za } n>N.$$

Primjer 1. Pokažimo da je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2. \tag{1}$$

Rješenje. Tvorimo diferenciju

$$\frac{2n+1}{n+1}-2=-\frac{1}{n+1}.$$

Ocijenivši tu diferenciju po apsolutnoj vrijednosti imat ćemo:

$$\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon,$$

ako je

$$n>\frac{1}{\varepsilon}-1=N(\varepsilon). \tag{2}$$

Prema tome, za svaki pozitivni broj ε postoji takav broj $N=\frac{1}{\varepsilon}-1$ da za $n>N$ vrijedi nejednadžba (2). Slijedi, da je broj 2 limes niza $x_n=\frac{2n+1}{n+1}$, tj. ispravna je formula (1).

2°. Limes funkcije. Kažemo, da funkcija $f(x)\to A$ kada $x\to a$ (A i a su brojevi), ili da je

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,$$

ako za svaki $\varepsilon>0$ postoji takav $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, da je

$$|f(x)-A|<\varepsilon \text{ za } 0<|x-a|<\delta.$$

Analogno je

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A,$$

ako je $|f(x)-A|<\varepsilon$ za $|x|>N(\varepsilon)$.

Dogovorno pišemo

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,$$

što znači, da je $|f(x)|>E$ za $0<|x-a|<\delta(E)$, gdje je E po volji odabran pozitivan broj.

3°. Jednostrani limesi. Ako je $x<a$ i $x\to a$, tada dogovorno pišemo $x\to a-0$; analogno, ako je $x>a$ i $x\to a$, pišemo to ovako: $x\to a+0$. Brojeve

$$f(a-0)=\lim_{x\to a-0} f(x) \quad \text{i} \quad f(a+0)=\lim_{x\to a+0} f(x)$$

nazivamo *lijevi limes* funkcije $f(x)$ u tački a i *desni limes* funkcije $f(x)$ u tački a (ako ti brojevi postoje).

Za postojanje limesa funkcije $f(x)$ kada $x\to a$ nužno je i dovoljno da vrijedi jednakost

$$f(a-0)=f(a+0).$$

Ako postoji $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ i $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, tada vrijede ovi teoremi:

$$1)\ \lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x)+\lim_{x\to a} f_2(x);$$

$$2)\ \lim_{x\to a}[f_1(x)\cdot f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim_{x\to a} f_2(x);$$

$$3)\ \lim_{x\to a}[f_1(x):f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x):\lim_{x\to a} f_2(x) \qquad (\lim_{x\to a} f_2(x)\neq 0).$$

Često primjenjujemo ove limese:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e = 2{,}71828\ldots$$

Primjer 2. Izračunajmo desni i lijevi limes funkcije

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

za $x\to 0$.

Rješenje. Imamo:

$$f(+0)=\lim_{x\to+0}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$$

i

$$f(-0)=\lim_{x\to-0}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}.$$

Limes funkcije $f(x)$ kada $x\to 0$ u tom slučaju, očigledno, ne postoji.

166. Dokažite da je limes niza

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \ldots,\ \frac{1}{n^2},\ \ldots$$

kada $n \to \infty$ jednak nuli. Za koje će vrijednosti n biti zadovoljena nejednadžba

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

(ε je po volji odabran pozitivni broj)?
Izračunajte n ako je: a) $\varepsilon = 0{,}1$; b) $\varepsilon = 0{,}01$; c) $\varepsilon = 0{,}001$.

167. Dokažite da je limes niza

$$x_n = \frac{1}{n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

kada $n \to \infty$ jednak 1. Za koje će vrijednosti $n > N$ biti zadovoljena nejednadžba

$$|x_n - 1| < \varepsilon$$

(ε je po volji odabran pozitivni broj)?
Izračunajte N, ako je: a) $\varepsilon = 0{,}1$; b) $\varepsilon = 0{,}01$; c) $\varepsilon = 0{,}001$.

168. Dokažite da je

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

Kakav pozitivni broj δ treba odabrati za zadani pozitivni broj ε da iz nejednadžbe

$$|x - 2| < \delta$$

dobivamo nejednadžbu

$$|x^2 - 4| < \varepsilon\ ?$$

Izračunajte δ ako je: a) $\varepsilon = 0{,}1$; b) $\varepsilon = 0{,}01$; c) $\varepsilon = 0{,}001$.

169. Objasnite tačni smisao dogovornog pisanja:

a) $\lim\limits_{x \to +0} \lg x = -\infty$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$; c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

170. Odredite limese nizova:

a) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{(-1)^{n-1}}{n},\ \ldots$;

b) $\frac{2}{1},\ \frac{4}{3},\ \frac{6}{5},\ \ldots,\ \frac{2n}{2n-1},\ \ldots$;

c) $\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \ldots$;

d) 0,2; 0,23; 0,233; 0,2333; . . .

Izračunajte ove limese:

171. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right).$ **172.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}.$

173. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right].$

174. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}.$ **175.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}.$

176. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right).$

177. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right].$

178*. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}.$ **179.** $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$

180. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sin n!}{n^2+1}.$

Pri traženju limesa kvocijenta dvaju cijelih polinoma u x kada $x\to\infty$, preporučljivo je oba člana kvocijenta prethodno podijeliti sa x^n, gdje je n najviša potencija tih polinoma.

Analogno postupamo i u mnogim slučajevima razlomaka s iracionalnim izrazima.

Primjer 1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)\left(3+\frac{5}{x}\right)\left(4-\frac{6}{x}\right)}{3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{2\cdot3\cdot4}{3}=8\,.$$

Primjer 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{10}{x^3}}}=1\,.$$

181. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}.$ **182.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1000x}{x^2-1}.$

183. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{3x+7}.$ **184.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}.$

185. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}.$ **186.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x3-4}{\sqrt{x^4+1}}.$

187. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$.

188. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$.

189. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$.

190. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

Ako su $P(x)$ i $Q(x)$ cijeli polinomi, a $P(a)\neq 0$ ili $Q(a)\neq 0$, tada limes racionalnog razlomka

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dobivamo direktno.

Ako je pak $P(a)=Q(a)=0$, tada se preporuča razlomak $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ skratiti jedanput ili nekoliko puta s binomom $x-a$.

Primjer 3.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-1} = 4.$$

191. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$.

192. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-5x+10}{x^2-25}$.

193. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

194. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

195. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

196. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$.

197. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

198. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

Izrazi, koji sadrže iracionalnosti, dovode se često u racionalni oblik uvođenjem nove varijable.

Primjer 4. Nađimo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}.$$

Rješenje. Ako stavimo

$$1+x=y^6,$$

dobivamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^3-1}{y^2-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^2+y+1}{y+1} = \frac{3}{2}.$$

199. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

200. $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

201. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

202. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$.

Drugi način određivanja limesa iracionanlog izraza je taj da iracionalnost prebacimo iz brojnika u nazivnik ili obrnuto iz nazivnika u brojnik.

Primjer 5.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\quad (a>0).$$

203. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

204. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$.

205. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

206. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

207. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

208. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ $(x>0)$.

209. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$ $(x\neq 0)$.

210. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$.

211. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$.

212. $\lim\limits_{x\to +\infty}[\sqrt{x(x+a)}-x]$.

213. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2-5x+6}-x)$.

214. $\lim\limits_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

215. $\lim\limits_{x\to \infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})$.

Pri računanju limesa često se koristimo formulom

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

i pretpostavljamo kao poznato da su $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin\alpha$ i $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos\alpha$.

Primjer 6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5\right)=1\cdot 5=5.$$

216. a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

217. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

218. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$.

219. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$.

220. $\lim\limits_{n\to \infty}\left(n\sin\dfrac{\pi}{n}\right)$.

221. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

222. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

223. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

224. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2}$.

225. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$.

226. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1-\operatorname{tg} x}$.

227. a) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to \infty} x \sin\dfrac{1}{x}$.

228. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x) \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

229. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg} 2x \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

230. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\pi - x}$.

231. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos x}{\pi - 3x}$.

232. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$.

233. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

234. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$.

235. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 3x}$.

236. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$.

237. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$.

238. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$.

239. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

240. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$.

Pri određivanju limesa oblika

$$\lim_{x\to a} [\varphi(x)]^{\psi(x)} = C, \tag{3}$$

gdje je $\varphi(x)$ pozitivna funkcija u nekoj okolini tačke $a (x \neq a)$, treba imati u vidu ovo:

1) ako egzistiraju konačni limesi

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = A > 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to a} \psi(x) = B,$$

gdje je $0 \leqslant A \leqslant +\infty$, $-\infty \leqslant B \leqslant +\infty$, tada je $C = A^B$;

2) ako je $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = A \neq 1$ i $\lim\limits_{x\to a} \psi(x) = \pm\infty$ onda pronalazimo limes (3) neposredno;

3) ako je $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 1$ i $\lim\limits_{x\to a} \psi(x) = \infty$ onda stavljamo $\varphi(x) = 1 + \alpha(x)$, gdje $\alpha(x) \to 0$ kada $x \to a$ i prema tome

$$C = \lim_{x\to a} \left\{ [1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right\}^{\alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} [\varphi(x)-1]\psi(x)},$$

gdje je $e = 2{,}718\ldots$ Neperov broj.

Primjer 7. Nađimo

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}.$$

Rješenje. Ovdje je

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right) = 2 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 0}(1+x) = 1\,;$$

i prema tome

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x} = 2^1 = 2.$$

Primjer 8. Nađimo

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}$$

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{2+\dfrac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

i

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty\,.$$

Prema tome je

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2} = 0.$$

Primjer 9. Izračunajmo

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}.$$

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = 1.$$

Ako provedemo naprijed pokazanu pretvorbu, dobivamo

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\right]^{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right\}^{-\frac{2x}{1+x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}} = e^{-2}.$$

U zadanom primjeru, ne služeći se općim postupkom, možemo naći limes jednostavnije:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}} = \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2}.$$

Općenito je korisno upamtiti da je

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k.$$

241. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x.$

242. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}.$

243. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}.$

244. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}.$

245. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}.$

246. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$

247. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x.$

248. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x.$

249. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}.$

250. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$

251. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}.$

252.** a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}};$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$

Pri izračunavanju niže navedenih limesa korisno je znati, ukoliko egzistira i pozitivan $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, da je

$$\lim_{x\to a}[\ln f(x)] = \ln[\lim_{x\to a} f(x)].$$

Primjer 10. Dokažimo da je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \tag{*}$$

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln e = 1.$$

Formulom (*) često se koristimo pri rješavanju zadataka.

253. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(2x+1)-\ln(x+2)].$

254. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\lg(1+10x)}{x}.$

255. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$

256. $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+1)-\ln x].$

257. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}.$

258*. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$

259*. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ $(a>0)$.

260*. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)$ $(a>0)$.

261. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

262. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{\sin x}$.

263. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x-1}{x^2}$. (vidi br. 103 i 104).

Izračunajte ove jednostrane limese:

264. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

265. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{th} x$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{th} x$, gdje je $\operatorname{th} x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

266. a) $\lim\limits_{x\to-0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; b) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

267. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$.

268. a) $\lim\limits_{x\to-0}\frac{|\sin x|}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{|\sin x|}{x}$.

269. a) $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{x-1}{|x-1|}$; b) $\lim\limits_{x\to1+0}\frac{x-1}{|x-1|}$.

270. a) $\lim\limits_{x\to2-0}\frac{x}{x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to2+0}\frac{x}{x-2}$.

Konstruirajte grafove funkcija (n je prirodan broj):

271*. $y=\lim\limits_{n\to\infty}(\cos^{2n}x)$.

272*. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{1+x^n}$ $(x\geqslant 0)$.

273. $y=\lim\limits_{\alpha\to 0}\sqrt{x^2+\alpha^2}$.

274. $y=\lim\limits_{n\to\infty}(\operatorname{arctg} nx)$.

275. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}$ $(x\geqslant 0)$.

276. Pretvorite u običan razlomak zadani mješoviti periodski razlomak

$$\alpha=0{,}13555\ldots,$$

razmatrajući ga kao limes konačnog razlomka.

277. Što se dešava s korijenima kvadratne jednadžbe

$$ax^2+bx+c=0,$$

ako koeficijent a teži k nuli, a koeficijenti b i c su konstantni, pri čemu je $b \neq 0$?

278. Izračunajte limes unutarnjeg kuta pravilnog n-terokuta kada $n \to \infty$.

279. Nađite limes opsega pravilnih n-terokuta upisanih kružnici polumjera R i njoj opisanih, kada $n \to \infty$.

280. Izračunajte limes zbroja ordinata krivulje

$$y=e^{-x}\cos \pi x,$$

u tačkama $x = 0, 1, 2, \ldots, n$, kada $n \to \infty$.

281. Izračunajte limes zbroja površina kvadrata konstruiranih na ordinatama krivulje

$$y=2^{1-x}$$

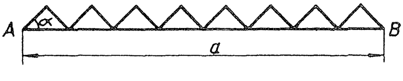
kao bazama, gdje je $x = 1, 2, 3, \ldots, n$, uz uvjet da $n \to \infty$.

282. Izračunajte limes kada $n \to \infty$ duljine lomljene linije $M_0M_1 \ldots M_n$, upisane u logaritamsku spiralu

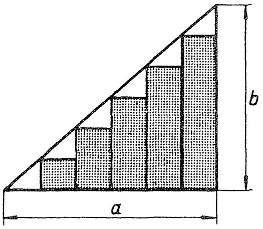
$$r=e^{-\varphi},$$

ako vrhovi te linije imaju polarne kutove

$$\varphi_0=0, \quad \varphi_1=\frac{\pi}{2}, \quad \ldots, \quad \varphi_n=\frac{\pi n}{2}.$$



Slika 7.



Slika 8.

283. Odsječak $AB = a$ (sl. 7) podijeljen je na n jednakih dijelova, a na svakom od tih dijelova kao bazi konstruiran je istokračni trokut s kutovima uz bazu jednakim $\alpha = 45°$. Pokažite, da se limes duljine dobivene lomljene linije razlikuje od duljine odsječka AB bez obzira na to što se u limesu lomljena linija »geometrijski stapa s odsječkom AB«.

284. Tačka C_1 raspolavlja odsječak $AB = l$; tačka C_2 raspolavlja odsječak AC_1; tačka C_3 raspolavlja odsječak C_2C_1, tačka C_4 raspolavlja odsječak C_2C_3 itd. Odredite granični položaj tačke C_n kada $n \to \infty$.

285. Kateta a pravokutnog trokuta razdijeljena je na n jednakih dijelova, a na dobivenim odsječcima konstruirani su upisani pravokutnici (sl. 8). Odredite limes površine dobivenog stepenastog lika, ako $n \to \infty$.

286. Izračunajte konstante k i b iz jednadžbe

$$\lim_{x\to\infty}\left(kx+b-\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)=0. \tag{1}$$

Objasnite geometrijski smisao jednadžbe (1).

287*. Neki kemijski proces tako teče da je prirast količine materije u svakom vremenskom razmaku τ iz beskonačnog niza vremenskih razmaka $(i\tau, (i+1)\tau)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ proporcionalan količini materije u početku tog vremenskog razmaka i veličini vremenskog razmaka. Pretpostavivši da je u početku količina materije bila Q_0, odredite količinu materije $Q_t^{(n)}$, nakon vremena t, ako se količina materije povećava svaki n-ti dio vremena $\tau = \frac{t}{n}$.

Izračunajte $Q_t = \lim\limits_{n\to\infty} Q_t^{(n)}$.

4. Neizmjerno male i neizmjerno velike veličine

1°. Neizmjerno male veličine. Ako je

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0,$$

tj. ako je $|\alpha(x)|<\varepsilon$ za $0<|x-a|<\delta(\varepsilon)$ tada funkciju $\alpha(x)$ nazivamo *neizmjerno malom veličinom* kada $x\to a$. Analogno se definira neizmjerno mala veličina $\alpha(x)$ kada $x\to\infty$.

Zbroj i produkt konačnog broja neizmjerno malih veličina kada $x\to a$ također je neizmjerno mala veličina kada $x\to a$.

Ako su $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ neizmjerno male veličine kada $x\to a$ i

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C,$$

gdje je C neki broj različit od nule, onda funkcije $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ nazivamo *neizmjerno malim veličinama istoga reda*; ako je pak $C=0$, onda govorimo da je funkcija $\alpha(x)$ neizmjerno mala veličina višeg reda u odnosu na $\beta(x)$. Funkciju $\alpha(x)$ nazivamo *neizmjerno malom veličinom n-toga reda* u odnosu na funkciju $\beta(x)$ ako je

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n}=C,$$

gdje je $0<|C|<+\infty$.

Ako je

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$$

onda funkcije $\alpha(x)$ i $\beta(x)|$ nazivamo *ekvivalentnim* (ili *asimptotički jednakim*) *neizmjerno malim veličinama* kada $x\to a$:

$$\alpha(x)\sim\beta(x).$$

Na primjer, kada $x\to 0$, imamo:

$$\sin x\sim x;\quad \operatorname{tg} x\sim x;\quad \ln(1+x)\sim x$$

itd.

Zbroj dviju neizmjerno malih veličina različitih redova ekvivalentan je sumandu nižeg reda.

Limes kvocijenta dviju neizmjerno malih veličina ne mijenja se ako članove kvocijenta zamijenimo ekvivalentnim veličinama. U skladu s ovim teoremom pri izračunavanju limesa razlomka

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)},$$

gdje $\alpha(x)\to 0$ i $\beta(x)\to 0$ kada $x\to a$, u brojniku i nazivniku razlomka možemo oduzimati ili pribrajati neizmjerno male veličine viših redova, tako odabrane da veličine koje ostaju budu ekvivalentne prijašnjim.

Primjer 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3}}{2x}=\frac{1}{2}.$$

2°. **Neizmjerno velike veličine.** Ako za po volji odabrani veliki broj N postoji takav $\delta(N)$, da je za $0<|x-a|<\delta(N)$ zadovoljena nejednadžba

$$|f(x)|>N,$$

funkciju $f(x)$ nazivamo neizmjerno velikom veličinom kada $x\to a$.

Analogno se definira neizmjerno velika veličina $f(x)$ kada $x\to\infty$. Slično tomu kako je učinjeno za neizmjerno male veličine, uvodi se pojam neizmjerno velikih veličina različitih redova.

288. Dokažite da je funkcija

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

neizmjerno mala veličina kada $x\to\infty$. Za koje je vrijednosti x zadovoljena nejednadžba

$$|f(x)|<\varepsilon,$$

ako je ε po volji odabran broj?

Izračunajte x za: a) $\varepsilon=0{,}1$; b) $\varepsilon=0{,}01$; c) $\varepsilon=0{,}001$.

289. Dokažite da je funkcija

$$f(x)=1-x^2$$

neizmjerno mala veličina kada $x\to 1$. Za koje vrijednosti x vrijedi nejednadžba

$$|f(x)|<\varepsilon,$$

ako je ε po volji odabran pozitivni broj. Izračunajte x ako je: a) $\varepsilon=0{,}1$; b) $\varepsilon=0{,}01$; c) $\varepsilon=0{,}001$.

290. Dokažite da je funkcija

$$f(x)=\frac{1}{x-2}$$

neizmjerno velika veličina kada $x\to 2$. U kojim okolinama $|x-2|<\delta$ je zadovoljena nejednadžba

$$|f(x)|>N,$$

ako je N po volji odabran pozitivni broj?

Izračunajte δ, ako je: a) $N=10$; b) $N=100$; c) $N=1000$.

291. Odredite red veličine: a) oplošja kugle, b) volumena kugle, ako je polumjer kugle r neizmjerno mala veličina 1-og reda. Kakvi će biti redovi veličine polumjera kugle i volumena kugle u odnosu na oplošje te kugle?

292. Neka središnji kut α kružnog isječka ABO (sl. 9) polumjera R teži k nuli. Odredite redove neizmjerno malih veličina, u odnosu na neizmjerno mali α:

a) tetive AB; b) visine CD trokuta ABD; c) površine trokuta ABD.

293. Odredite za $x \to 0$, red veličine u odnosu na x funkcija:

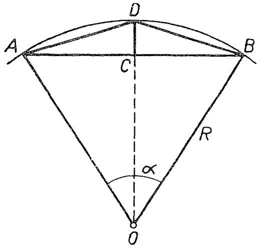
a) $\dfrac{2x}{1+x}$;

b) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$;

c) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x^3}$;

d) $1-\cos x$;

e) $\operatorname{tg} x-\sin x$.



Slika 9.

294. Dokažite da je duljina neizmjerno malog luka kružnice konstantnog polumjera ekvivalentna duljini tetive.

295. Jesu li ekvivalentni neizmjerno mali odsječak i neizmjerno mala polukružnica, konstruirana na tom odsječku kao promjeru?

Upotrebom teorema o kvocijentu dviju neizmjerno malih veličina izračunajte:

296. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot\sin 5x}{(x-x^3)^2}$.

297. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$.

298. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x}$.

299. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$.

300. Dokažite da su, kada $x \to 0$, veličine $\dfrac{x}{2}$ i $\sqrt{1+x}-1$ međusobno ekvivalentne. Služeći se tim rezultatom pokažite da pri malom $|x|$ vrijedi približna jednadžba

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}. \tag{1}$$

Primijenom formule (1) odredite približno:

a) $\sqrt{1{,}06}$; b) $\sqrt{0{,}97}$; c) $\sqrt{10}$; d) $\sqrt{120}$

i usporedite dobivene vrijednosti s podacima iz tablice.

301. Dokažite da za $x \to 0$ s tačnošću do članova reda x^2 vrijede približne jednadžbe:

a) $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$;

b) $\sqrt{a^2+x} \approx a + \frac{x}{2a}$ $(a>0)$;

c) $(1+x)^n \approx 1+nx$ (n je prirodan broj);

d) $\lg(1+x) \approx Mx$, gdje je $M = \lg e = 0{,}43429\ldots$

Polazeći od tih formula izračunajte približno:

1) $\frac{1}{1{,}02}$; 2) $\frac{1}{0{,}97}$; 3) $\frac{1}{105}$; 4) $\sqrt{15}$; 5) $1{,}04^3$; 6) $0{,}93^4$; 7) $\lg 1{,}1$.

Usporedite dobivene vrijednosti s podacima iz tablica.

302. Pokažite, da je cijela racionalna funkcija

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \quad (a_0 \neq 0),$$

kad $x \to \infty$, neizmjerno velika veličina ekvivalentna najvišem članu a_0x^n.

303. Neka $x \to \infty$. Uzevši x kao neizmjerno veliku veličinu prvog reda odredite red porasta funkcija:

a) $x^2 - 100x - 1000$; c) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$;

b) $\frac{x^5}{x+2}$, d) $\sqrt[3]{x-2x^2}$.

5. Neprekinutost funkcija

1°. Definicija neprekinutosti. Funkciju $f(x)$ nazivamo *neprekinutom za* $x=\xi$ (ili »u tački ξ«) ako je:

1) ta funkcija definirana u tački ξ, tj. egzistira broj $f(\xi)$;

2) egzistira konačni limes $\lim\limits_{x \to \xi} f(x)$;

3) taj limes jednak vrijednosti funkcije u tački ξ, tj.

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi). \tag{1}$$

Stavimo li

$$x = \xi + \Delta\xi,$$

gdje $\Delta\xi \to 0$, možemo uvjet (1) napisati ovako:

$$\lim_{\Delta\xi \to 0} \Delta f(\xi) = \lim_{\Delta\xi \to 0} [f(\xi+\Delta\xi) - f(\xi)] = 0, \tag{2}$$

tj. funkcija $f(x)$ je neprekinuta u tački ξ onda i samo onda ako u toj tački neizmjerno malom prirastu argumenta odgovara neizmjerno mali prirast funkcije.

Ako je funkcija neprekinuta u svakoj tački nekog područja (intervala, segmenta itd.), tada se naziva *neprekinutom u tom području.*

Primjer 1. Dokažimo da je funkcija

$$y = \sin x$$

neprekinuta za svaku vrijednost argumenta x.

Rješenje. Imamo

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\Delta x.$$

Budući da je

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \quad \text{i} \quad \left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 1,$$

to za svaki x imamo:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0.$$

Prema tome, funkcija $\sin x$ neprekinuta je za $-\infty < x < +\infty$.

2°. **Tačke prekinutosti funkcije.** Govorimo da funkcija $f(x)$ ima *prekinutost* za vrijednost $x = x_0$ (ili u tački x_0), koja pripada području definicije funkcije, ili je granična za to područje, ako u toj tački nisu ispunjeni uvjeti za neprekinutost funkcije.

Primjer 2. Funkcija $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ (sl. 10,a) prekinuta je za $x = 1$. Ta funkcija nije definirana u tački $x = 1$, i kako god bismo izabrali broj $f(1)$, dopunjena funkcija $f(x)$ ne bi bila neprekinuta za $x = 1$.

Ako za funkciju $f(x)$ postoje konačni limesi:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0),$$

pri čemu nisu sva tri broja $f(x_0)$, $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ međusobno jednaka, onda x_0 nazivamo *tačkom prekinutosti prve vrsti.* Posebno ako je

$$f(x_0-0) = f(x_0+0),$$

tada x_0 nazivamo *uklonjivom tačkom prekinutosti.*

Da bi funkcija $f(x)$ bila u tački x_0 neprekinuta nužno je i dovoljno da je

$$f(x_0) = f(x_0-0) = f(x_0+0).$$

Primjer 3. Funkcija $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$ ima prekinutost prve vrste za $x = 0$.

Doista je ovdje

$$f(+0) = \lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

i

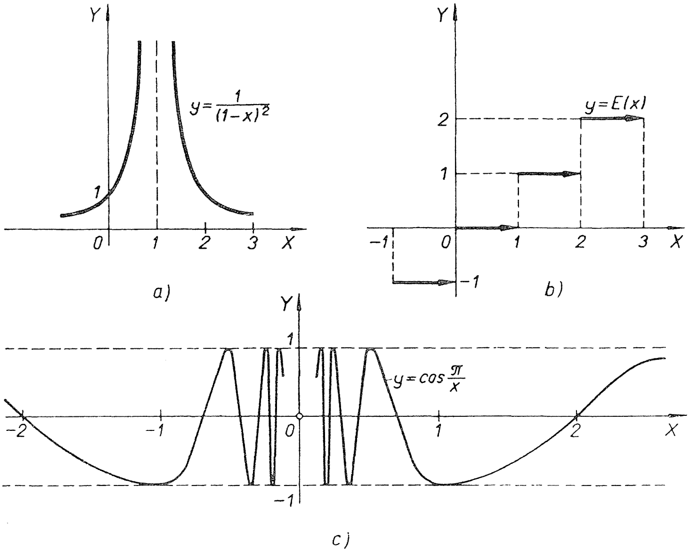
$$f(-0) = \lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{-x} = -1.$$

Primjer 4. Funkcija $y = E(x)$, gdje $E(x)$ označava najveće cijelo broja x (tj. $E(x)$ je cijeli broj, koji zadovoljava jednadžbu $x = E(x) + q$, gdje je $0 \leqq q < 1$), prekinuta je (sl. 10,*b*) u svakoj cjelobojnoj tački: $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, pri čemu su sve tačke prekinutosti prve vrste.

Zaista, ako je n cio broj, onda je $E(n-0) = n-1$ i $E(n+0) = n$. U svim drugim tačkama ta funkcija je, očigledno, neprekinuta.

Sve tačke prekinutosti funkcije koje nisu tačke prekinutosti prve vrsti nazivamo *tačkama prekinutosti druge vrsti.*

U tačke prekinutosti druge vrsti spadaju također *tačke neizmjerne prekinutosti*, tj. one tačke x_0, za koje je bar jedan od jednostranih limesa $f(x_0-0)$ ili $f(x_0+0)$ jednak ∞ (vidjeti primjer 2).



Slika 10.

Primjer 5. Funkcija $y = \cos\frac{\pi}{x}$ (sl. 10,c) u tački $x = 0$ ima prekinutost druge vrsti jer ovdje ne postoje oba jednostrana limesa:

$$\lim_{x \to -0} \cos\frac{\pi}{x} \quad \text{i} \quad \lim_{x \to +0} \cos\frac{\pi}{x}\,.$$

3°. Svojstva neprekinutih funkcija. Pri razmatranju funkcija s obzirom na neprekinutost moramo imati na umu ove teoreme:

1) Zbroj i produkt konačnog broja funkcija, koje su u nekom području neprekinute, jest funkcija, koja je neprekinuta u tom istom području.

2) Kvocijent dviju funkcija neprekinutih u nekom području neprekinuta je funkcija za sve vrijednosti argumenta iz tog područja za koje divizor nije jednak nuli.

3) Ako je funkcija $f(x)$ neprekinuta u intervalu (a, b) pri čemu je skup njenih vrijednosti sadržan u intervalu (A, B), a funkcija $\varphi(x)$ neprekinuta u intervalu (A, B), onda je složena funkcija $\varphi[f(x)]$ neprekinuta u intervalu (a, b).

Funkcija $f(x)$, koja je neprekinuta na odsječku $[a, b]$, ima ova svojstva:

1) $f(x)$ ograđena je u $[a, b]$ tj. postoji neki broj M takav, da je $|f(x)| \leqslant M$ za $a \leqslant x \leqslant b$;
2) $f(x)$ ima u $[a, b]$ najmanju i najveću vrijednost;
3) $f(x)$ poprima sve vrijednosti između dvije zadane, tj. ako je $f(\alpha) = A$ i $f(\beta) = B$ $(a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b)$ i $A \neq B$, tada za bilo koji broj C između A i B postoji barem jedna vrijednost $x = \gamma$ $(\alpha < \gamma < \beta)$ za koju je $f(\gamma) = C$.

Posebno pak ako je $f(\alpha) f(\beta) < 0$, jednadžba

$$f(x) = 0$$

ima u intervalu (α, β) barem jedan realni korijen.

304. Pokažite da je funkcija $y = x^2$ neprekinuta za bilo koju vrijednost argumenta x.

305. Dokažite da je cijela racionalna funkcija

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

neprekinuta za bilo koju vrijednost x.

306. Dokažite, da je razlomljena racionalna funkcija

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}$$

neprekinuta za sve vrijednosti x s izuzetkom onih koje pretvaraju njen nazivnik u nulu.

307*. Dokažite da je funkcija $y = \sqrt{x}$ neprekinuta za $x \geqslant 0$.

308. Dokažite da je funkcija

$$F(x) = \sqrt{f(x)}$$

neprekinuta u intervalu (a, b) ako je funkcija $f(x)$ neprekinuta i nenegativna u tom istom intervalu.

309*. Dokažite da je funkcija $y = \cos x$ neprekinuta za svaki x.

310. Za koje vrijednosti x su neprekinute funkcije: a) tg x i b) ctg x?

311*. Dokažite da je funkcija $y = |x|$ neprekinuta. Konstruirajte graf te funkcije.

312. Dokažite da je apsolutna vrijednost neprekinute funkcije neprekinuta funkcija.

313. Funkcija je zadana formulama

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{za } x \neq 2, \\ A & \text{za } x = 2. \end{cases}$$

Kako treba izabrati vrijednost funkcije $A = f(2)$, da bi tako nadopunjena funkcija $f(x)$ bila neprekinuta za $x = 2$?
Konstruirajte graf funkcije $y = f(x)$.

314. Desna strana jednadžbe

$$f(x) = 1 - x\sin\frac{1}{x}$$

gubi smisao za $x = 0$. Kako treba izabrati vrijednost $f(0)$ da funkcija $f(x)$ bude neprekinuta za $x = 0$?

315. Funkcija

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x-2}$$

gubi smisao za $x=2$. Je li moguće odrediti takvu vrijednost $f(2)$, da dopunjena funkcija bude neprekinuta za $x = 2$?

316. Funkcija $f(x)$ nije definirana za $x = 0$. Odredite $f(0)$ tako da $f(x)$ bude neprekinuta za $x = 0$ ako je zadano:

a) $f(x) = \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$ (n je prirodan broj);

b) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

c) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$;

d) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$;

e) $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$;

f) $f(x) = x\operatorname{ctg} x$.

Razmotrite s obzirom na neprekinutost funkcije:

317. $y = \dfrac{x^2}{x-2}$.

318. $y = \dfrac{1+x^3}{1+x}$.

319. $y = \dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$.

320. $y = \dfrac{x}{|x|}$.

321. a) $y = \sin\dfrac{\pi}{x}$;

b) $y = x\sin\dfrac{\pi}{x}$.

322. $y = \dfrac{x}{\sin x}$.

323. $y = \ln(\cos x)$.

324. $y = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$.

325. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

326. $y = (1+x)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x^2}$.

327. $y = e^{\frac{1}{x+1}}$.

328. $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

329. $y = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$.

330. $y = \begin{cases} x^2 & \text{za } x \leqslant 3 \\ 2x+1 & \text{za } x > 3. \end{cases}$ Konstruirajte graf ove funkcije.

331. Dokažite da je Dirichletova funkcija $\chi(x)$, koja je jednaka nuli kada je x iracionalan i jednaka 1 ako je x racionalan, prekinuta za svaku vrijednost x.

Istražite s obzirom na neprekinutost i konstruirajte grafove ovih funkcija:

332. $y = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{1+x^n}$ $(x \geqslant 0)$.

333. $y = \lim\limits_{n \to \infty} (x \operatorname{arctg} nx)$.

334. a) $y = \operatorname{sgn} x$, b) $y = x \operatorname{sgn} x$, c) $y = \operatorname{sgn} (\sin x)$ gdje je funkcija $\operatorname{sgn} x$ definirana formulama:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{ako je } x>0, \\ 0, & \text{ako je } x=0, \\ -1, & \text{ako je } x<0. \end{cases}$$

335. a) $y = x - E(x)$, b) $y = xE(x)$, gde je $E(x)$ najveće cijelo broja x.

336. Navedite primjer koji će pokazati da zbroj dviju prekinutih funkcija može biti neprekinuta funkcija.

337*. Neka je α pravi pozitivni razlomak koji teži k nuli $(0<\alpha<1)$. Da li se može u jednadžbi

$$E(1+\alpha) = E(1-\alpha)+1,$$

koja vrijedi za sve vrijednosti veličine α, uvrstiti limes veličine α?

338. Pokažite da jednadžba

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

ima u intervalu (1, 2) realni korijen. Izračunajte približno taj korijen.

339.* Dokažite da svaki polinom $P(x)$ neparnog stupnja ima barem jedan realni korijen.

340. Dokažite da jednadžba

$$\operatorname{tg} x = x$$

ima neizmjerno mnogo realnih korijena.

GLAVA II

DERIVIRANJE FUNKCIJA

1. Neposredno izračunavanje derivacija

1°. Prirast argumenta i prirast funkcije. Ako su x i x_1 vrijednosti argumenta x, a $y = f(x)$ i $y_1 = f(x_1)$ odgovarajuće vrijednosti funkcije $y = f(x)$, onda

$$\Delta x = x_1 - x$$

nazivamo *prirastom argumenta* x u intervalu $[x, x_1]$, a

$$\Delta y = y_1 - y$$

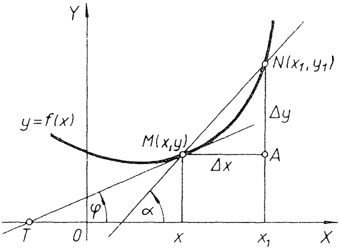
ili

$$\Delta y = f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad (1)$$

prirastom funkcije y u istom intervalu $[x, x_1]$ (sl. 11, gdje su $\Delta x = MA$ i $\Delta y = AN$). Kvocijent

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$$

predstavlja koeficijent smjera sekante MN grafa funckije $y = f(x)$ (sl. 11) i naziva se *srednjom brzinom* mijenjanja funkcije y u intervalu $[x, x + \Delta x]$.



Slika 11.

Primjer 1. Za funkciju

$$y = x^2 - 5x + 6$$

izračunajmo Δx i Δy, koji odgovaraju promjeni argumenta:

a) od $x = 1$ do $x = 1{,}1$;

b) od $x = 3$ do $x = 2$.

Rješenje. Imamo

a) $\Delta x = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$,

$\Delta y = (1{,}1^2 - 5 \cdot 1{,}1 + 6) - (1^2 - 5 \cdot 1 + 6) = -0{,}29$;

b) $\Delta x = 2 - 3 = -1$,

$\Delta y = (2^2 - 5 \cdot 2 + 6) - (3^2 - 5 \cdot 3 + 6) = 0$.

Primjer 2. Za hiperbolu $y = \frac{1}{x}$ nađimo koeficijent smjera sekante koja prolazi tačkama s apscisama $x = 3$ i $x_1 = 10$.

Rješenje. Ovdje je $\Delta x = 10 - 3 = 7$, $y = \frac{1}{3}$, $y_1 = \frac{1}{10}$; $\Delta y = \frac{1}{10} - \frac{1}{3} = -\frac{7}{30}$.

Prema tome je $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{30}$.

2°. Derivacija. *Derivacijom* $y' = \frac{dy}{dx}$ funkcije $y = f(x)$ u tački x nazivamo limes kvocijenta $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, kada Δx teži k nuli, tj.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

ako taj limes egzistira.

Vrijednost derivacije daje *koeficijent smjera* tangente MT na graf funkcije $y = f(x)$ u tački x (sl. 11):

$$y' = \operatorname{tg} \varphi.$$

Određivanje derivacije y' nazivamo *deriviranjem funkcije.* Derivacija $y' = f'(x)$ predstavlja *brzinu mijenjanja funkcije* u tački x.

Primjer 3. Izračunajmo derivaciju funkcije

$$y = x^2.$$

Rješenje. Po formuli (1) dobivamo:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)$$

i

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Prema tome je

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

3°. Jednostrane derivacije. Izraze

$$f_-'(x) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

i

$$f_+'(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

nazivamo *lijevom,* odnosno *desnom derivacijom* funkcije $f(x)$ u tački x. Za egzistenciju derivacije $f'(x)$ nužno je i dovoljno da bude

$$f_-'(x) = f_+'(x).$$

Primjer 4. Izračunajmo derivacije $f_-'(0)$ i $f_+'(0)$ za funkciju

$$f(x) = |x|.$$

Rješenje. Imamo po definiciji

$$f_-'(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1, \qquad f_+'(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1.$$

4°. **Beskonačna derivacija.** Ako u nekoj tački imamo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

tada kažemo, da neprekinuta funkcija $f(x)$ ima beskonačnu derivaciju u tački x. U tome je slučaju tangenta na graf funkcije $y=f(x)$ okomita na os OX.

Primjer 5. Izračunajmo derivaciju $f'(0)$ za funkciju

$$y = \sqrt[3]{x}.$$

Rješenje. Imamo:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = \infty.$$

341. Izračunajte prirast funkcije $y = x^2$ koji odgovara promjeni argumenta:

a) od $x = 1$ do $x_1 = 2$;

b) od $x = 1$ do $x_1 = 1{,}1$;

c) od $x = 1$ do $x_1 = 1+h$.

342. Izračunajte Δy za funkciju $y = \sqrt[3]{x}$, ako je:

a) $x = 0, \quad \Delta x = 0{,}001$;

b) $x = 8, \quad \Delta x = -9$;

c) $x = a, \quad \Delta x = h$.

343. Zašto za funkciju $y = 2x+3$ možemo odrediti prirast Δy znajući samo da je dotični prirast $\Delta x = 5$, a za funkciju $y = x^2$ to ne možemo?

344. Izračunajte prirast Δy i kvocijent $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ za funkcije:

a) $y = \frac{1}{(x^2-2)^2}$ za $x = 1$ i $\Delta x = 0{,}4$;

b) $y = \sqrt{x}$ za $x = 0$ i $\Delta x = 0{,}0001$;

c) $y = \lg x$ za $x = 100\,000$ i $\Delta x = -90\,000$.

345. Izračunajte Δy i $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ koji odgovaraju promjeni argumenta od x na $x+\Delta x$ za funkcije:

a) $y = ax+b$; d) $y = \sqrt{x}$;

b) $y = x^3$; e) $y = 2^x$;

c) $y = \frac{1}{x^2}$; f) $y = \ln x$.

346. Izračunajte koeficijent smjera sekante parabole

$$y = 2x - x^2,$$

ako su apscise presječnih tačaka:

a) $x_1 = 1, \quad x_2 = 2;$

b) $x_1 = 1, \quad x_2 = 0{,}9;$

c) $x_1 = 1, \quad x_2 = 1 + h.$

Kojem limesu teži koeficijent smjera sekante u posljednjem primjeru, ako $h \to 0$?

347. Koja je srednja brzina mijenjanja funkcije $y = x^3$ u granicama $1 \leqslant x \leqslant 4$?

348. Zakon gibanja tačke je $s = 2t^2 + 3t + 5$, gdje je put s zadan u centimetrima, a vrijeme t u sekundama. Kolika je srednja brzina tačke u vremenu ode $t = 1$ do $t = 5$?

349. Izračunajte srednji uspon krivulje $y = 2^x$ u intervalu $1 \leqslant x \leqslant 5$.

350. Izračunajte srednji uspon krivulje $y = f(x)$ u intervalu $[x, \ x + \Delta x]$.

351. Što se razumijeva pod usponom krivulje $y = f(x)$ u zadanoj tački x?

352. Definirajte: a) srednju brzinu vrtnje, b) trenutnu brzinu vrtnje.

353. Zagrijano tijelo smješteno je u okolicu niže temperature i hladi se. Šta znači: a) srednja brzina ohlađivanja; b) brzina ohlađivanja u danom trenutku?

354. Šta se razumijeva pod brzinom reagiranja tvari u kemijskoj reakciji?

355. Neka je $m = f(x)$ masa nehomogene šipke na dijelu $[0, x]$. Što se razumijeva pod: a) srednjom linearnom gustoćom šipke na dijelu $[x, \ x + \Delta x]$; b) linearnom gustoćom šipke u tački x?

356. Izračunajte kvocijent $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ za funkciju $y = \frac{1}{x}$ u tački $x = 2$, ako je:

a) $\Delta x = 1$; b) $\Delta x = 0{,}1$; c) $\Delta x = 0{,}01$.

Kolika je derivacija y' za $x = 2$?

357.** Izračunajte derivaciju funkcije $y = \operatorname{tg} x$.

358. Izračunajte $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ za funkciju:

a) $y = x^3;$ c) $y = \sqrt{x};$

b) $y = \frac{1}{x^2};$ d) $y = \operatorname{ctg} x.$

359.** Izračunajte $f'(8)$, ako je $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

360. Nađite $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$, ako je $f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$.

361.* U kojim tačkama se derivacija funkcije $f(x) = x^3$ brojčano podudara sa vrijednošću same funkcije, tj. kada je $f(x) = f'(x)$?

362. Zakon gibanja tačke je $s = 5t^2$, pri čemu je put s zadan u metrima, a vrijeme t u sekundama. Izračunajte brzinu gibanja u trenutku $t = 3$.

363. Nađite koeficijent smjera tangente na krivulju $y = 0{,}1\,x^3$ u tački kojoj je apscisa $x = 2$.

364. Nađite koeficijent smjera tangente na krivulju $y = \sin x$ u tački $(\pi;\ 0)$.

365. Izračunajte vrijednost derivacije funkcije $f(x) = \dfrac{1}{x}$ u tački $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$.

366*. Koliki su koeficijenti smjerova tangenata na krivulje $y = \dfrac{1}{x}$ i $y = x^2$ u njihovu sjecištu? Izračunajte kut koji zatvaraju te tangente.

367.** Pokažite da ove funkcije nemaju konačnih derivacija u zadanim tačkama:

a) $y = \sqrt[3]{x^2}$ u tački $x = 0$;

b) $y = \sqrt[5]{x-1}$ u tački $x = 1$;

c) $y = |\cos x|$ u tačkama $x = \dfrac{2k+1}{2}\pi$ $(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

2. Tablično deriviranje

1°. Osnovna pravila deriviranja. Ako je c konstanta, a $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ su funkcije koje imaju derivacije, onda je

1) $(c)' = 0$;

2) $(x)' = 1$;

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

4) $(cu)' = cu'$;

5) $(uv)' = u'v + v'u$;

6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ $(v \neq 0)$;

7) $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

2°. Tablica derivacija osnovnih funkcija

I. $(x^n)' = nx^{n-1}$.

II. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$.

III. $(\sin x)' = \cos x$.

IV. $(\cos x)' = -\sin x$.

V. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

VI. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

VII. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$.

VIII. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$.

IX. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

X. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{x^2+1}$.

XI. $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0)$.

XII. $(e^x)' = e^x$.

XIII. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$.

XIV. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} = \dfrac{\log_a e}{x} \quad (x > 0,\ a > 0)$.

XV. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

XVI. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

XVII. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

XVIII. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

XIX. $(\operatorname{Arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

XX. $(\operatorname{Arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$.

XIX. $(\operatorname{Arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1)$.

XXII. $(\operatorname{Arcth} x)' = -\dfrac{1}{x^2-1} \quad (|x| > 1)$.

3°. Pravilo deriviranja složenih funkcija. Ako je $y = f(u)$ i $u = \varphi(x)$ tj. $y = f[\varphi(x)]$, a funkcije y i u imaju derivacije, tada je

$$y'_x = y'_u u'_x \tag{1}$$

ili drukčije pisano

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

To pravilo primjenjuje se na »lanac« bilo kojega konačnog broja funkcija koje deriviramo.

Primjer 1. Izračunajmo derivaciju funkcije

$$y = (x^2 - 3x + 3)^5.$$

Rješenje. Stavivši $y = u^5$, pri čemu je $u = x^2 - 2x + 3$, Imat ćemo prema (1):

$$y' = (u^5)'_u (x^2 - 2x + 3)'_x = 5u^4 (2x - 2) = 10(x - 1)(x^2 - 2x + 3)^4.$$

Primjer 2. Izračunajmo derivaciju funkcije

$$y = \sin^3 4x.$$

Rješenje. Stavivši

$$y = u^3; \quad u = \sin v; \quad v = 4x,$$

dobivamo

$$y' = 3u^2 \cdot \cos v \cdot 4 = 12 \sin^2 4x \cos 4x.$$

Izračunajte derivacije ovih funkcija (u br. 368 do 408 ne primjenjuje se pravilo deriviranja složenih funkcija):

A. Algebarske funkcije

368. $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3.$

369. $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0{,}5x^4.$

370. $y = ax^2 + bx + c.$

371. $y = -\frac{5x^3}{a}.$

372. $y = at^m + bt^{m+n}.$

373. $y = \frac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

374. $y = \frac{\pi}{x} + \ln 2.$

375. $y = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3}.$

376*. $y = x^2 \sqrt[3]{x^2}.$

377. $y = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}}.$

378. $y = \frac{a + bx}{c + dx}.$

379. $y = \frac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}.$

380. $y = \frac{2}{2x - 1} - \frac{1}{x}.$

381. $y = \frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}}.$

B. Trigonometrijske i arkus-funkcije

382. $y = 5\sin x + 3\cos x.$

383. $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x.$

384. $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}.$

385. $y = 2t\sin t - (t^2 - 2)\cos t.$

386. $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x.$

387. $y = x \operatorname{ctg} x.$

388. $y = x \arcsin x.$

389. $y = \frac{(1 + x^2)\operatorname{arctg} x - x}{2}.$

C. Eksponencijalne i logaritamske funkcije

390. $y = x^7 \cdot e^x.$

391. $y = (x - 1)e^x.$

392. $y = \frac{e^x}{x^2}.$

393. $y = \frac{x^5}{e^x}.$

394. $f(x) = e^x \cos x.$

395. $y = (x^2 - 2x + 2)e^x.$

396. $y = e^x \arcsin x.$

397. $y = \frac{x^2}{\ln x}.$

398. $y = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}$.

399. $y = \frac{1}{x} + 2\ln x - \frac{\ln x}{x}$.

400. $y = \ln x \lg x - \ln a \log_a x$.

D. Hiperbolne i area-funkcije

401. $y = x \operatorname{sh} x$.

402. $y = \frac{x^2}{\operatorname{ch} x}$.

403. $y = \operatorname{th} x - x$.

404. $y = \frac{3 \operatorname{cth} x}{\ln x}$.

405. $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{Arth} x$.

406. $y = \arcsin x \operatorname{Arsh} x$.

407. $y = \frac{\operatorname{Arch} x}{x}$.

408. $y = \frac{\operatorname{Arcth} x}{1 - x^2}$.

E. Složene funkcije

Izračunajte derivacije ovih funkcija (u br. 409 do 466 treba upotrijebiti pravilo deriviranja složenih funkcija s jednim međuargumentom):

409. $y = (1 + 3x - 5x^2)^{30}$.

Rješenje. Označimo da je $1 + 3x - 5x^2 = u$; tada je $y = u^{30}$. Dobivamo:

$$y'_u = 30u^{29}, \quad u'_x = 3 - 10x;$$

$$y'_x = 30\,u^{29} \cdot (3 - 10x) = 30\,(1 + 3x - 5x^2)^{29} \cdot (3 - 10x).$$

410. $y = \left(\frac{ax + b}{c}\right)^3$.

411. $f(y) = (2a + 3by)^2$.

412. $y = (3 + 2x^2)^4$.

413. $y = \frac{3}{56(2x-1)^7} - \frac{1}{24(2x-1)^6} - \frac{1}{40(2x-1)^5}$.

414. $y = \sqrt{1 - x^2}$.

415. $y = \sqrt[3]{a + bx^3}$.

416. $y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$.

417. $y = (3 - 2\sin x)^5$.

Rješenje. $y' = 5\,(3 - 2\sin x)^4 \cdot (3 - 2\sin x)' = 5\,(3 - 2\sin x)^4 \cdot (-2\cos x) = -10\cos x\,(3 - 2\sin x)^4$.

418. $y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$.

419. $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha}$.

420. $y = 2x + 5\cos^3 x$.

421*. $x = \operatorname{cosec}^2 t + \sec^2 t$.

422. $f(x) = -\dfrac{1}{6(1-3\cos x)^2}$.

423. $y = \dfrac{1}{3\cos^3 x} - \dfrac{1}{\cos x}$.

424. $y = \sqrt{\dfrac{3\sin x - 2\cos x}{5}}$.

425. $y = \sqrt[3]{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

426. $y = \sqrt{1+\arcsin x}$.

427. $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x - (\arcsin x)^3}$.

428. $y = \dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}$.

429. $y = \sqrt{xe^x + x}$.

430. $y = \sqrt[3]{2e^x - 2^x + 1} + \ln^5 x$.

431. $y = \sin 3x + \cos\dfrac{x}{5} + \operatorname{tg}\sqrt{x}$.

Rješenje. $y' = \cos 3x \cdot (3x)' - \sin\dfrac{x}{5}\left(\dfrac{x}{5}\right)' + \dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}(\sqrt{x})' = 3\cos 3x - \dfrac{1}{5}\sin\dfrac{x}{5} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$.

432. $y = \sin(x^2 - 5x + 1) + \operatorname{tg}\dfrac{a}{x}$.

433. $f(x) = \cos(\alpha x + \beta)$.

434. $f(t) = \sin t \sin(t+\varphi)$.

435. $y = \dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$.

436. $f(x) = a \operatorname{ctg}\dfrac{x}{a}$.

437. $y = -\dfrac{1}{20}\cos(5x^2) - \dfrac{1}{4}\cos x^2$.

438. $y = \arcsin 2x$.

Rješenje. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot (2x)' = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$.

439. $y = \arcsin\dfrac{1}{x^2}$.

440. $f(x) = \arccos\sqrt{x}$.

441. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

442. $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{1+x}{1-x}$.

443. $y = 5e^{-x^2}$.

444. $y = \dfrac{1}{5^{x^2}}$.

445. $y = x^2 10^{2x}$.

446. $f(t) = t\sin 2^t$.

447. $y = \arccos e^x$.

448. $y = \ln(2x+7)$.

449. $y = \lg\sin x$.

450. $y = \ln(1-x^2)$.

451. $y = \ln^2 x - \ln(\ln x)$.

452. $y = \ln(e^x + 5\sin x - 4\arcsin x)$.

453. $y = \operatorname{arctg}(\ln x) + \ln(\operatorname{arctg} x)$.

454. $y = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$.

F. Razne funkcije

455.** $y = \sin^3 5x \cos^2 \frac{x}{3}.$

456. $y = -\frac{11}{2(x-2)^2} - \frac{4}{x-2}.$

457. $y = -\frac{15}{4(x-3)^4} - \frac{10}{3(x-3)^3} - \frac{1}{2(x-3)^2}.$

458. $y = \frac{x^8}{8(1-x^2)^4}.$

459. $y = \frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}.$

460. $y = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}.$

461. $y = \frac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

462. $y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{18}{7}x\sqrt[6]{x} + \frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}.$

463. $y = \frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}.$

464. $y = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}.$

465. $y = x^4(a-2x^3)^2.$

466. $y = \left(\frac{a+bx^n}{a-bx^n}\right)^m.$

467. $y = \frac{9}{5(x+2)^5} - \frac{3}{(x+2)^4} + \frac{2}{(x+2)^3} - \frac{1}{2(x+2)^2}.$

468. $y = (a+x)\sqrt{a-x}.$

469. $y = \sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}.$

470. $z = \sqrt[3]{y+\sqrt{y}}.$

471. $f(t) = (2t+1)(3t+2)\sqrt[3]{3t+2}.$

472. $x = \frac{1}{\sqrt{2ay-y^2}}.$

473. $y = \ln(\sqrt{1+e^x}-1) - \ln(\sqrt{1+e^x}+1).$

474. $y = \frac{1}{15}\cos^3 x(3\cos^2 x - 5).$

475. $y = \frac{(\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg}^4 x + 10\operatorname{tg}^2 x + 1)}{3\operatorname{tg}^3 x}.$

476. $y = \operatorname{tg}^2 5x.$

477. $y = \frac{1}{2}\sin(x^2).$

478. $y=\sin^2(t^3)$.

479. $y=3\sin x\cos^2 x+\sin^3 x$.

480. $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x$.

481. $y=-\frac{\cos x}{3\sin^3 x}+\frac{4}{3}\operatorname{ctg} x$.

482. $y=\sqrt{\alpha\sin^2 x+\beta\cos^2 x}$.

483. $y=\arcsin x^2+\arccos x^2$.

484. $y=\frac{1}{2}(\arcsin x)^2\arccos x$.

485. $y=\arcsin\frac{x^2-1}{x^2}$.

486. $y=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

487. $y=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

488. $y=\frac{1}{\sqrt{b}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$.

489. $y=\sqrt{a^2-x^2}+a\arcsin\frac{x}{a}$.

490. $y=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}$.

491. $y=\arcsin(1-x)+\sqrt{2x-x^2}$.

492. $y=\left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}$.

493. $y=\ln(\arcsin 5x)$.

494. $y=\arcsin(\ln x)$.

495. $y=\operatorname{arctg}\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}$.

496. $y=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}$.

497. $y=3b^2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{b-x}}-(3b+2x)\sqrt{bx-x^2}$.

498. $y=-\sqrt{2}\operatorname{arcctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}-x$.

499. $y=\sqrt{e^{ax}}$.

500. $y=e^{\sin^2 x}$.

501. $F(x)=(2m\,a^{mx}+b)^p$.

502. $F(t)=e^{\alpha t}\cos\beta t$.

503. $y=\frac{(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)\,e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}$.

504. $y=\frac{1}{10}e^{-x}(3\sin 3x-\cos 3x)$.

505. $y=x^n a^{-x^2}$.

506. $y=\sqrt{\cos x}\,a^{\sqrt{\cos x}}$.

507. $y=3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}$.

508. $y=\ln(ax^2+bx+c)$.

509. $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$.

510. $y=x-2\sqrt{x}+2\ln(1+\sqrt{x})$.

511. $y=\ln(a+x+\sqrt{2ax+x^2})$.

512. $y = \frac{1}{\ln^2 x}$.

513. $y = \ln\cos\frac{x-1}{x}$.

514*. $y = \ln\frac{(x-2)^5}{(x+1)^3}$.

515. $y = \ln\frac{(x-1)^3(x-2)}{x-3}$.

516. $y = -\frac{1}{2\sin^2 x} + \ln\operatorname{tg} x$.

517. $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$.

518. $y = \ln\ln(3-2x^3)$.

519. $y = 5\ln^3(ax+b)$.

520. $y = \ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}$.

521. $y = \frac{m}{2}\ln(x^2-a^2) + \frac{n}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}$.

522. $y = x\cdot\sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right)$.

523. $y = \frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

524. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$.

525. $y = \frac{1}{3}\ln\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$.

526. $y = 2^{\arcsin 3x} + (1-\arccos 3x)^2$.

527. $y = 3^{\frac{\sin ax}{\cos bx}} + \frac{1}{3}\frac{\sin^3 ax}{\cos^3 bx}$.

528. $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}}$.

529. $y = \operatorname{arctg}\ln x$.

530. $y = \ln\arcsin x + \frac{1}{2}\ln^2 x + \arcsin\ln x$.

531. $y = \operatorname{arctg}\ln\frac{1}{x}$.

532. $y = \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6}\ln\frac{x-1}{x+1}$.

533. $y = \ln\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\sin x}$.

534. $y = \frac{3}{4}\ln\frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

535. $f(x) = \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

536. $f(x)=\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}.$

537. $y=\operatorname{sh}^3 2x.$

538. $y=e^{\alpha x}\operatorname{ch}\beta x.$

539. $y=\operatorname{th}^3 2x.$

540. $y=\ln\operatorname{sh}2x.$

541. $y=\operatorname{Arsh}\dfrac{x^2}{a^2}.$

542. $y=\operatorname{Arch}\ln x.$

543. $y=\operatorname{Arth}(\operatorname{tg}x).$

544. $y=\operatorname{Arcth}(\sec x).$

545. $y=\operatorname{Arth}\dfrac{2x}{1+x^2}.$

546. $y=\dfrac{1}{2}(x^2-1)\operatorname{Arth}x+\dfrac{1}{2}x.$

547. $y=\left(\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4}\right)\operatorname{Arsh}x-\dfrac{1}{4}x\sqrt{1+x^2}.$

548. Izračunajte y', ako je

$$\text{a) } y=|x|; \qquad \text{b) } y=x|x|.$$

Konstruirajte grafove funkcija y i y'.

549. Izračunajte y', ako je

$$y=\ln|x| \quad (x\neq 0).$$

550. Izračunajte $f'(x)$, ako je

$$f(x)=\begin{cases}1-x & \text{za } x\leqslant 0,\\ e^{-x} & \text{za } x>0.\end{cases}$$

551. Izračunajte $f'(0)$, ako je

$$f(x)=e^{-x}\cos 3x.$$

Rješenje. $f'(x)=e^{-x}(-3\sin 3x)-e^{-x}\cos 3x;\quad f'(0)=e^0(-3\sin 0)-e^0\cos 0=-1.$

552. $f(x)=\ln(1+x)+\arcsin\dfrac{x}{2}$. Izračunajte $f'(1)$.

553. $y=\operatorname{tg}^3\dfrac{\pi x}{6}$. Izračunajte $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{x=2}$.

554. Izračunajte $f'_+(0)$ i $f'_-(0)$ za funkcije:

a) $f(x)=\sqrt{\sin(x^2)};$

b) $f(x)=\arcsin\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2};$

c) $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}},\quad x\neq 0;\quad f(0)=0;$

d) $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x},\quad x\neq 0;\quad f(0)=0;$

e) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x},\quad x\neq 0;\quad f(0)=0.$

555. Za funkciju $f(x) = e^{-x}$ izračunajte $f(0)+xf'(0)$.

556. Za funkciju $f(x) = \sqrt{1+x}$ izračunajte $f(3)+(x-3)f'(3)$.

557. Zadane su funkcije $f(x) = \operatorname{tg} x$ i $\varphi(x) = \ln(1-x)$, izračunajte $\frac{f'(0)}{\varphi'(0)}$.

558. Za funkcije $f(x) = 1-x$ i $\varphi(x) = 1-\sin\frac{\pi x}{2}$ izračunajte $\frac{\varphi'(1)}{f'(1)}$.

559. Dokažite da je derivacija parne funkcije neparna funkcija, a derivacija neparne funkcije parna funkcija.

560. Dokažite da je derivacija periodične funkcije također periodična funkcija.

561.* Pokažite da funkcija $y = xe^{-x}$ zadovoljava jednadžbu $xy' = (1-x)y$.

562. Pokažite da funkcija $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ zadovoljava jednadžbu $xy' = (1-x^2)y$.

563. Pokažite da funkcija $y = \frac{1}{1+x+\ln x}$ zadovoljava jednadžbu

$$xy' = y(y \ln x - 1).$$

G. Logaritamska derivacija

Logaritamskom derivacijom funkcije $y = f(x)$ nazivamo derivaciju logaritma te funkcije, tj.

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Primjena prethodnog logaritmiranja funkcije ponekad pojednostavnjuje izračunavanja derivacije.

Primjer. Nađimo derivaciju složene eksponencijalne funkcije

$$y = u^v,$$

ako su $u = \varphi(x) > 0$ i $v = \psi(x)$ derivabilne.

Rješenje. Logaritmiranjem dobivamo:

$$\ln y = v \ln u.$$

Derivirajmo obje strane posljednje jednadžbe po x

$$(\ln y)' = v' \ln u + v(\ln u)',$$

ili

$$\frac{1}{y} y' = v' \ln u + v \frac{1}{u} u',$$

odakle je

$$y' = y\left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right),$$

ili

$$y' = u^v\left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right).$$

564. Izračunajte y' ako je

$$y = \sqrt[3]{x^2}\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3 x \cos^2 x.$$

Rješenje: $\ln y = \frac{2}{3} \ln x + \ln(1-x) - \ln(1+x^2) + 3 \ln \sin x + 2 \ln \cos x;$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{2}{3}\,\frac{1}{x} + \frac{(-1)}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\,\frac{1}{\sin x} \cos x - \frac{2 \sin x}{\cos x},$$

odakle je $$y' = y\left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3 \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{tg} x\right).$$

565. Izračunajte y' ako je $y = (\sin x)^x$.

Rješenje: $\ln y = x \ln \sin x;$ $\quad \frac{1}{y} y' = \ln \sin x + x \operatorname{ctg} x;$

$$y' = (\sin x)^x (\ln \sin x + x \operatorname{ctg} x).$$

Izračunajte y' primjenom prethodnog logaritmiranja funkcije $y = f(x)$:

566. $y = (x+1)(2x+1)(3x+1)$.

567. $y = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3 (x+3)^4}$.

568. $y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$.

569. $y = x\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$.

570. $y = \frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5 (x-3)^{11}}}$.

571. $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2 \sqrt{(x+3)^3}}}$

572. $y = x^x$.

573. $y = x^{x^2}$.

574. $y = \sqrt[x]{x}$.

575. $y = x^{\sqrt{x}}$.

576. $y = x^{x^x}$.

577. $y = x^{\sin x}$.

578. $y = (\cos x)^{\sin x}$.

579. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

580. $y = (\operatorname{arctg} x)^x$.

3. Derivacije funkcija koje nisu eksplicitno zadane

1°. Derivacija inverzne funkcije. Ako je za funkciju $y=f(x)$ derivacija $y_x' \neq 0$, onda je derivacija inverzne funkcije $x=f^{-1}(y)$

$$x_y' = \frac{1}{y_x'}$$

ili

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.$$

Primjer 1. Izračunajmo derivaciju x_y' ako je

$$y = x + \ln x$$

Rješenje. Imamo $y_x' = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$; prema tome je $x_y' = \frac{x}{x+1}$.

2°. Derivacija funkcije zadane parametarski. Ako je zavisnost funkcije y i argumenta x zadana pomoću parametra t

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

tada je

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'},$$

ili drugim oznakama

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}.$$

Primjer 2. Izračunajmo $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, ako je

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$$

Rješenje. Nalazimo da je $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -a\sin t$ i $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a\cos t$.

Odatle je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\operatorname{ctg} t$$

3°. Derivacija implicitne funkcije. Ako je zavisnost među x i derivabilne funkcije y zadana u implicitnom obliku

$$F(x,\ y) = 0; \tag{1}$$

onda je za izračunavanje derivacije $y'_x = y'$ u jednostavnijim slučajevima dovoljno:

1) izračunati derivaciju po x lijeve strane jednadžbe (1), smatrajući y funkcijom od x;

2) izjednačiti tu derivaciju s nulom tj. staviti da je

$$\frac{d}{dx}F(x,\ y) = 0; \tag{2}$$

3) riješiti dobivenu jednadžbu po y'.

Primjer 3. Nađimo derivaciju y'_x ako je

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0. \tag{3}$$

Rješenje. Izračunavši derivaciju lijeve strane jednadžbe (3) i izjednačivši je s nulom, dobivamo:

$$3x^2 + 3y^2y' - 3a(y + xy') = 0,$$

odakle je

$$y' = \frac{x^2 - ay}{ay - y^2}.$$

581. Izračunajte derivaciju x'_y ako je

a) $y = 3x + x^3$; b) $y = x - \frac{1}{2}\sin x$; c) $y = 0{,}1x + e^{\frac{x}{2}}$.

Odredite derivaciju $y' = \frac{dy}{dx}$ za funkcije y, zadane parametarski:

582. $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3. \end{cases}$

583. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}, \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2. \end{cases}$

584. $\begin{cases} x = \dfrac{2at}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2}. \end{cases}$

585. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$

586. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}. \end{cases}$

587. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1}, \\ y = \dfrac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}. \end{cases}$

588. $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$

589. $\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = b\sin^2 t. \end{cases}$

590. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t. \end{cases}$

591 $\begin{cases} x = \dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, \\ y = \dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}. \end{cases}$

592. $\begin{cases} x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$

593. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}. \end{cases}$

594. $\begin{cases} x = a\left(\ln \operatorname{tg}\dfrac{t}{2} + \cos t - \sin \mathrm{t}\right), \\ y = a(\sin t + \cos t). \end{cases}$

595. Treba izračunati $\dfrac{dy}{dx}$ za $t = \dfrac{\pi}{2}$, ako je

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Rješenje. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a\sin t}{a(1 - \cos t)} = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$ i $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}}{1 - \cos\dfrac{\pi}{2}} = 1.$

596. Izračunajte $\dfrac{dy}{dx}$ za $t = 1$, ako je $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = \dfrac{\ln t}{t}. \end{cases}$

597. Izračunajte $\dfrac{dy}{dx}$ za $t = \dfrac{\pi}{4}$, ako je $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t. \end{cases}$

598. Dokažite da funkcija y, zadana parametarski jednadžbama

$$\begin{cases} x = 2t + 3t^2, \\ y = t^2 + 2t^3, \end{cases}$$

zadovoljava jednadžbu

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

599. Za $x = 2$ vrijedi jednadžba

$$x^2 = 2x.$$

Da li odatle slijedi da je

$$(x^2)' = (2x)'$$

za $x = 2$?

600. Neka je $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Može li se član po član derivirati jednadžba

$$x^2 + y^2 = a^2?$$

Izračunajte derivaciju $y' = \frac{dy}{dx}$ implicitnih funkcija y:

601. $2x - 5y + 10 = 0.$

602. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

603. $x^3 + y^3 = a^3.$

604. $x^3 + x^2y + y^2 = 0.$

605. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}.$

606. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}.$

607. $y^3 = \frac{x - y}{x + y}.$

608. $y - 0{,}3 \sin y = x.$

609. $a \cos^2(x + y) = b.$

610. $\operatorname{tg} y = xy.$

611. $xy = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$

612. $\operatorname{arctg}(x + y) = x.$

613. $e^y = x + y.$

614. $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = c.$

615. $\ln y + \frac{x}{y} = c.$

616. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2).$

617. $\sqrt{x^2 + y^2} = c \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$

618. $x^y = y^x.$

619. Nađite y' u tački M (1; 1), ako je

$$2y = 1 + xy^3.$$

Rješenje: Deriviranjem dobivamo $2y' = y^3 + 3xy^2y'$. Stavivši $x = 1$ i $y = 1$, dobivamo $2y' = 1 + 3y'$, a odatle je $y' = -1$.

620. Izračunajte derivacije y' zadanih funkcija y u navedenim tačkama:

a) $(x + y)^3 = 27(x - y)$ za $x = 2$ i $y = 1$;

b) $ye^y = e^{x+1}$ za $x = 0$ i $y = 1$;

c) $y^2 = x + \ln\frac{y}{x}$ za $x = 1$ i $y = 1$.

4. Primjena derivacija u geometriji i mehanici

1°. Jednadžbe tangente i normale. Iz geometrijskog smisla derivacije slijedi da će *jednadžba tangente* na krivulju $y=f(x)$ ili $F(x, y)=0$ u tački $M_0(x_0, y_0)$ biti

$$y-y_0=y_0'(x-x_0),$$

pri čemu je y_0' vrijednost derivacije y' za $x=x_0$. Pravac koji prolazi diralištem i okomit je na tangentu nazivamo *normalom na krivulju.* Za normalu dobivamo jednadžbu

$$x-x_0+y_0'(y-y_0)=0.$$

2°. Kut među krivuljama. Pod kutom među krivuljama

$$y=f_1(x)$$

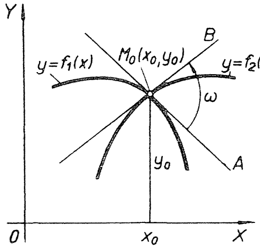
i

$$y=f_2(x)$$

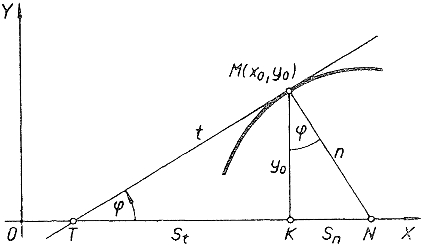
u njihovoj zajedničkoj tački $M_0(x_0, y_0)$ (sl. 12) razumijevamo kut ω među njihovim tangentama M_0A i M_0B u tački M_0.

Poznatom formulom iz analitičke geometrije dobivamo:

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_1'(x_0)\cdot f_2'(x_0)}.$$



Slika 12.



Slika 13.

3°. Duljina tangente i normale kada je krivulja zadana u pravokutnom koordinatnom sistemu. Tangentu i normalu određuju ova četiri odsječka (sl. 13):

$t\ =TM$ tzv. *duljina tangente,*
$S_t=TK$ *suptangenta,*
$n\ =NM$ *duljina normale,*
$S_n=KN$ *subnormala.*

Kako je $KM=|y_0|$ i $\operatorname{tg}\varphi=y_0'$, to je

$$t=TM=\left|\frac{y_0}{y_0'}\sqrt{1+(y_0')^2}\right|; \qquad n=NM=|y_0\sqrt{1+(y_0')^2}|;$$

$$S_t=TK=\left|\frac{y_0}{y_0'}\right|; \qquad S_n=|y_0y_0'|.$$

4°. Duljina tangente i normale kada je krivulja zadana u polarnim koordinatama. Ako je krivulja zadana u polarnim koordinatama jednadžbom $r=f(\varphi)$, tada kut μ koji čine tangenta MT i polarni radijus $r=OM$ (sl. 14) određujemo ovom formulom:

$$\operatorname{tg}\mu = r\frac{d\varphi}{dr} = \frac{r}{r'}.$$

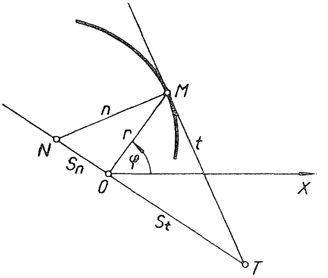
Tangenta MT i normala MN u tački M zajedno s polarnim radijusom dirališta i okomicom na polarni radijus, povučenim kroz pol O, određuju ova četiri odsječka (vidi sl. 14):

t = MT *duljina polarne tangente,*

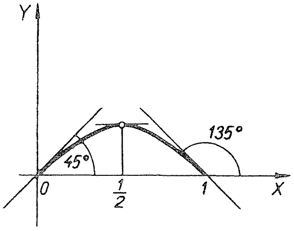
n = MN *duljina polarne normale,*

S_t = OT *polarna suptangenta,*

S_n = ON *polarna subnormala.*



Slika 14.



Slika 15.

Ti odsječci izraženi su ovim formulama:

$$t = MT = \frac{r}{|r'|}\sqrt{r^2+(r')^2}; \qquad S_t = OT = \frac{r^2}{|r'|};$$

$$n = MN = \sqrt{r^2+(r')^2}; \qquad S_n = ON = |r'|.$$

621. Kakve kutove φ zatvaraju s osi OX tangente na krivulju $y = x - x^2$ u tačkama s apscisama: a) $x=0$; b) $x=\frac{1}{2}$; c) $x=1$?

Rješenje: Imamo $y' = 1 - 2x$. Odatle je: a) $\operatorname{tg}\varphi = 1$, $\varphi = 45°$; b) $\operatorname{tg}\varphi = 0$, $\varphi = 0°$; c) $\operatorname{tg}\varphi = -1$, $\varphi = 135°$ (sl. 15).

622. Pod kojim kutovima sinusoide $y = \sin x$ i $y = \sin 2x$ sijeku os apscisa u ishodištu koordinatnog sistema?

623. Pod kojim kutom tangentoida $y = \operatorname{tg} x$ siječe os apscisa u ishodištu koordinatnog sistema.

624. Pod kojim kutom krivulja $y = e^{0{,}5x}$ siječe pravac $x = 2$?

625. Nadite tačke u kojima su tangente na krivulju $y = 3x^4+4x^3-12x^2+20$ paralelne s osi apscisa.

626. U kojoj tački je tangenta na parabolu

$$y = x^2 - 7x + 3$$

paralelna s pravcem $5x+y-3=0$?

627. Nađite jednadžbu parabole $y=x^2+bx+c$ koja u tački $(1; 1)$ tangira pravac $x=y$.

628. Odredite koeficijent smjera tangente na krivulju $x^3+y^3-xy-7=0$ u tački $(1; 2)$.

629. U kojoj je tački krivulje $y^2=2x^3$ tangenta okomita na pravac

$$4x-3y+2=0?$$

630. Napišite jednadžbu tangente i normale na parabolu

$$y=\sqrt{x}$$

u tački s apscisom $x=4$.

Rješenje: Imamo $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; odatle je koeficijent smjera tangente $k=[y']_{x=4}=\frac{1}{4}$.

Budući da diralište ima koordinate $x=4$, $y=2$, jednadžba tangente je

$$y-2=\frac{1}{4}(x-4), \text{ ili } x-4y+4=0.$$

Iz uvjeta okomitosti koeficijent smjera normale je

$$k_1=-4,$$

odakle je jednadžba normale $y-2=-4(x-4)$, ili $4x+y-18=0$.

631. Napišite jednadžbu tangente i normale na krivulju $y=x^3+2x^2-4x-3$ u tački $(-2; 5)$.

632. Nađite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$y=\sqrt[3]{x-1}$$

u tački $(1; 0)$.

633. Odredite jednadžbe tangente i normale na krivulje u zadanim tačkama:

a) $y=\operatorname{tg} 2x$ u ishodištu koordinatnog sistema;

b) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$ u sjecištu s osi OX;

c) $y=\arccos 3x$ u sjecištu s osi OY;

d) $y=\ln x$ u sjecištu s osi OX;

e) $y=e^{1-x^2}$ u sjecištima s pravcem $y=1$.

634. Napišite jednadžbe tangente i normale u tački $(2; 2)$ na krivulju

$$\begin{cases} x=\dfrac{1+t}{t^3}, \\ y=\dfrac{3}{2t^2}+\dfrac{1}{2t}. \end{cases}$$

635. Napišite jednadžbe tangente na krivulju

$$x = t\cos t, \quad y = t\sin t$$

u ishodištu koordinatnog sistema i u tački $t = \frac{\pi}{4}$.

636. Napišite jednadžbe tangente i normale na krivulju $x^3+y^2+2x-6=0$ u tački kojoj je ordinata $y=3$.

637. Napišite jednadžbu tangente na krivulju $x^5+y^5-2xy=0$ u tački $(1; 1)$.

638. Napišite jednadžbe tangenata i normala na krivulju $y=(x-1)(x-2)(x-3)$ u sjecištima krivulje s osi apscisa.

639. Napišite jednadžbe tangente i normale na krivulju

$$y^4 = 4x^4 + 6xy \text{ u tački } (1; 2).$$

640*. Pokažite da dirالište tangente na hiperbolu $xy=a^2$ raspolavlja odsječak te tangente među koordinatnim osima.

641. Pokažite da odsječak tangente na astroidu $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ među koordinatnim osima ima stalnu veličinu i iznosi a.

642. Pokažite da su normale na evolventu kružnice

$$x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t)$$

tangente na kružnicu $x^2+y^2=a^2$.

643. Nađite kut pod kojim se sijeku parabole $y=(x-2)^2$ i $y=-4+6x-x^2$.

644. Pod kojim kutom se sijeku parabole $y=x^2$ i $y=x^3$?

645. Pokažite da se krivulje $y=4x^2+2x-8$ i $y=x^3-x+10$ tangiraju u tački $(3; 34)$. Hoće li to biti i u tački $(-2; 4)$?

646. Pokažite da se hiperbole

$$xy = a^2 \quad \text{i} \quad x^2 - y^2 = b^2 \quad \text{sijeku pod pravim kutom.}$$

647. Zadana je parabola $y^2=4x$. Izračunajte duljinu tangente, normale, suptangente i subnormale u tački $(1; 2)$.

648. Nađite suptangentu krivulje $y=2^x$ u nekoj njenoj tački.

649. Pokažite da je za istostranu hiperbolu $x^2-y^2=a^2$ duljina normale u nekoj tački jednaka polarnom radijusu te tačke.

650. Pokažite da je subnormala hiperbole $x^2-y^2=a^2$ u nekoj njenoj tački jednaka apscisi te tačke.

651. Pokažite da su suptangente elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ i kružnice $x^2+y^2=a^2$ u tačkama jednakih apscisa međusobno jednake. Kakav način konstruiranja tangente na elipsu iz toga proističe?

652. Nađite duljinu tangente, normale, supstangente i subnormale za cikloidu

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

u nekoj tački t_0.

653. Nađite kut među tangentom i polarnim radijusom dirališta za logaritamsku spiralu

$$r = ae^{k\varphi}.$$

654. Nađite kut među tangentom i polarnim radijusom dirališta za lemniskatu $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

655. Nađite duljinu polarne tangente, normale, suptangente i subnormale, a također i kut među tangentom i polarnim radijusom dirališta za Arhimedovu spiralu

$$r = a\varphi$$

u tački s polarnim kutom $\varphi = 2\pi$.

656. Nađite duljinu polarne suptangente, polarne subnormale, polarne tangente i normale, a također kut među tangentom i polarnim radijusom za hiperbolnu spiralu $r = \dfrac{a}{\varphi}$ u po volji odabranoj tački $\varphi = \varphi_0$; $r = r_0$.

657. Zakon gibanja tačke po osi OX je:

$$x = 3t - t^3.$$

Nađite brzinu gibanja tačke u ovim trenucima: $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ i $t_2 = 2$ (x je zadan u centimetrima, t u sekundama).

658. Duž osi OX gibaju se dvije tačke po zakonima gibanja

$$x = 100 + 5t \quad \text{i} \quad x = \frac{1}{2}t^2,$$

pri čemu je $t \geqslant 0$.

Kojom se brzinom međusobno udaljuju te tačke u trenutku susreta (x je zadan u centimetrima, t u sekundama)?

659. Krajevi dužine $AB = 5$ m kližu po međusobno okomitim pravcima OX i OY (sl. 16). Brzina gibanja kraja A iznosi 2 m/s. Kakva je brzina gibanja kraja B u onom trenutku, kada je kraj A udaljen od ishodišta koordinatnog sistema za $OA = 3$ m?

660*. Zakon gibanja materijalne tačke, bačene u vertikalnoj ravnini XOY (sl. 17) pod kutom α prema horizontali s početnom brzinom v_0, dan je formulama (zanemaren je otpor uzduha)

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2},$$

pri čemu je t vrijeme, a g ubrzanje sile teže.

Nađite stazu gibanja i domet. Odredite također brzinu i smjer gibanja.

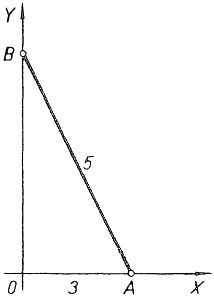
661. Tačka se giba po hiperboli $y = \frac{10}{x}$ tako da njena apscisa x raste jednoliko brzinom od 1 jedinice u sekundi. Kojom brzinom se mijenja njena ordinata kada tačka prolazi kroz položaj $(5;\ 2)$?

662. U kojoj tački parabole $y^2 = 18x$ ordinata raste dvostruko brže od apscise?

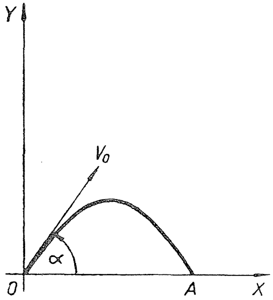
663. Jedna strana pravokutnika ima konstantnu veličinu $a = 10$ cm, a druga b raste konstantnom brzinom 4 cm/s. Kojom brzinom rastu dijagonala i površina tog pravokutnika u trenutku kada je $b = 30$ cm?

664. Polumjer kugle povećava se jednoliko brzinom od 5 cm/s. S kojom se brzinom povećava površina kugline plohe i volumen kugle u trenutku kada polumjer postane jednak 50 cm?

665. Tačka se giba po Arhimedovoj spirali $r = a\varphi$ $(a = 10$ cm$)$ tako da je kutna brzina rotacije njenog polarnog radijusa konstantna i iznosi 6° u sekundi. Odredite brzinu povećavanja polarnog radijusa r u trenutku kada je $r = 25$ cm.



Slika 16.



Slika 17.

666. Nehomogena šipka AB dugačka je 12 cm. Masa njenog dijela AM raste proporcionalno kvadratu udaljenosti pomične tačke M od kraja A i iznosi 10 g pri $AM = 2$ cm. Nađite masu čitave šipke AB i linearnu gustoću u nekoj njenoj tački M. Kolika je linearna gustoća šipke u tačkama A i B?

5. Derivacije višeg reda

1°. Definicija derivacija višeg reda. *Derivacijom drugog reda* ili *drugom derivacijom* funkcije $y = f(x)$ nazivamo derivaciju derivacije, tj.

$$(y')',$$

Drugu derivaciju označavamo sa

$$y'', \text{ ili } \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ ili } f''(x).$$

Ako je $x = f(t)$ zakon pravocrtnog gibanja tačke, tada je $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ ubrzanje tog gibanja.

Općenito, *derivacijom* n-tog *reda* funkcije $y = f(x)$ nazivamo derivaciju derivacije reda $(n-1)$. Za n-tu derivaciju upotrebljavamo oznaku

$$y^{(n)}, \text{ ili } \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}, \text{ ili } f^{(n)}x.$$

Primjer 1. Nađimo drugu derivaciju funkcije

$$y = \ln(1-x).$$

Rješenje. $$y' = \frac{-1}{1-x}; \qquad y'' = \left(\frac{-1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

2°. Leibnizova formula. Ako funkcije $u = \varphi(x)$ i $v = \psi(x)$ imaju derivacije do uključivo n-tog reda, tada nam za računanje n-te derivacije produkta može poslužiti *Leibnizova formula*

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}.$$

3°. Derivacije višeg reda parametarski zadanih funkcija. Ako je

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

onda derivacije $y'_x = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $y''_{xx} = \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \ldots$ možemo redom izračunati po formulama

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \quad y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} \text{ itd.}$$

Za derivaciju drugog reda važi formula

$$y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Primjer 2. Nađimo y'' ako je

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Rješenje. Imamo

$$y' = \frac{(b\sin t)'_t}{(a\cos t)'_t} = \frac{b \cdot \cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$$

i

$$y'' = \frac{\left(-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t\right)'_t}{(a\cos t)'_t} = \frac{-\dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{-1}{\sin^2 t}}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}$$

A. Derivacije višeg reda eksplicitno zadanih funkcija

Nađite druge derivacije ovih funkcija:

667. $y = x^8 + 7x^6 - 5x + 4.$

668. $y = e^{x^2}.$

669. $y = \sin^2 x.$

670. $y = \ln\sqrt[3]{1+x^2}.$

671. $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}).$

672. $f(x) = (1+x^2)\operatorname{arctg} x.$

673. $y = (\arcsin x)^2.$

674. $y = a \operatorname{ch}\dfrac{x}{a}.$

675. Pokažite da funkcija $y = \dfrac{x^2+2x+2}{2}$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $1+y'^2 = 2yy''.$

676. Pokažite da funkcija $y = \dfrac{1}{2}x^2e^x$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $y''-2y'+y = e^x.$

677. Pokažite da funkcija $y = C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$ za bilo koje konstante C_1 i C_2 zadovoljava jednadžbu $y''+3y'+2y = 0.$

678. Pokažite da funkcija $y = e^{2x}\sin 5x$ zadovoljava jednadžbu $y''-4y'+29y = 0.$

679. Nađite y''' ako je $y = x^3-5x^2+7x-2.$

680. Nađite $f'''(3)$ ako je $f(x) = (2x-3)^5.$

681. Nađite y^{V} funkcije $y = \ln(1+x).$

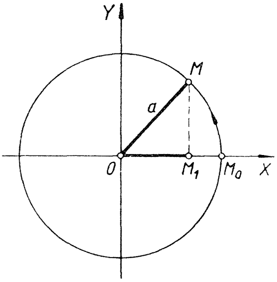
682. Nađite y^{VI} funkcije $y = \sin 2x.$

683. Pokažite da funkcija $y = e^{-x}\cos x$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$y^{\mathrm{IV}}+4y = 0.$$

684. Nađite $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ i $f'''(0)$, ako je

$$f(x) = e^x \sin x.$$



Slika 18.

685. Jednadžba gibanja tačke po osi OX je $x = 100+5t-0{,}001\,t^3.$

Izračunajte brzinu i ubrzanje tačke u trenucima $t_0 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = 10.$

686. Po kružnici $x^2+y^2 = a^2$ giba se tačka M konstantnom kutnom brzinom ω. Nađite zakon gibanja njene projekcije M_1 na os OX, ako u trenutku $t = 0$ tačka ima položaj $M_0\,(a,\,0)$ (sl. 18). Izračunajte brzinu i ubrzanje tačke M_1.

Kolika je brzina i ubrzanje tačke M_1 u početnom trenutku i u trenutku prolaza kroz ishodište koordinatnog sistema?

Koje su maksimalne vrijednosti apsolutne veličine brzine i apsolutne veličine ubrzanja tačke M_1?

687. Nađite derivaciju n-tog reda funkcije $y = (ax+b)^n$ (n je prirodan broj).

688. Nađite derivacije n-tog reda funkcija:

a) $y = \frac{1}{1-x}$; b) $y = \sqrt{x}$.

689. Nađite n-tu derivaciju funkcija:

a) $y = \sin x$; e) $y = \frac{1}{1+x}$;

b) $y = \cos 2x$; f) $y = \frac{1+x}{1-x}$;

c) $y = e^{-3x}$; g) $y = \sin^2 x$;

d) $y = \ln(1+x)$; h) $y = \ln(ax+b)$.

690. Primjenom Leibnizove formule nađite $y^{(n)}$, ako je:

a) $y = xe^x$; d) $y = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$;

b) $y = x^2 e^{-2x}$;

c) $y = (1-x^2)\cos x$; e) $y = x^3 \ln x$.

691. Nađite $f^{(n)}(0)$, ako je $f(x) = \ln \frac{1}{1-x}$.

B. Derivacije višeg reda funkcija zadanih parametarski, odnosno implicitno

Izračunajte $\frac{d^2y}{dx^2}$ ovih funkcija:

692. a) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2); \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

693. a) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t); \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = a(\sin t - t\cos t), \\ y = a(\cos t + t\sin t). \end{cases}$

694. a) $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin^2 t; \end{cases}$ **695.** a) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \frac{1}{2}t^2; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = e^{-at}, \\ y = e^{at}. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \frac{1}{1-t}. \end{cases}$

696. Izračunajte $\frac{d^2x}{dy^2}$, ako je $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

697. Izračunajte $\frac{d^2y}{dx^2}$ za $t = 0$, ako je $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t^2. \end{cases}$

698. Pokažite da y kao funkcija od x, definirana jednadžbama $x = \sin t$, $y = ae^{t\sqrt{2}} + be^{-t\sqrt{2}}$, za bilo koje konstante a i b, zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2y.$$

Nađite $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$ ovih funkcija:

699. $\begin{cases} x = \sec t, \\ y = \operatorname{tg} t. \end{cases}$

700. $\begin{cases} x = e^{-t} \cos t, \\ y = e^{-t} \sin t. \end{cases}$

701. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = t^3. \end{cases}$

702. Treba naći $\frac{d^ny}{dx^n}$, ako je $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^m. \end{cases}$

703. Poznavajući funkciju $y = f(x)$ izračunajte derivacije x'', x''' inverzne funkcije $x = f^{-1}(y)$.

704. Izračunajte y'', ako je $x^2 + y^2 = 1$.

Rješenje: Na osnovu pravila deriviranja složenih funkcija imamo $2x + 2yy' = 0$; odatle je $y' = -\frac{x}{y}$ i $y'' = -\left(\frac{x}{y}\right)'_x = -\frac{y - xy'}{y^2}$. Supstituirajući umjesto y' njenu vrijednost, konačno dobivamo:

$$y'' = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}.$$

Odredite derivacije y'' ovih funkcija $y = f(x)$, zadanih implicitno:

705. $y^2 = 2px$.

706. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

707. $y = x + \operatorname{arctg} y$.

708. Na temelju jednadžbe $y = x + \ln y$ nađite $\frac{d^2y}{dx^2}$ i $\frac{d^2x}{dy^2}$.

709. Nađite y'' u tački $(1; 1)$, ako je $x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0$.

710. Nađite y'' u tački $(0; 1)$, ako je $x^4 - xy + y^4 = 1$.

711. a) Funkcija y zadana je implicitno jednadžbom

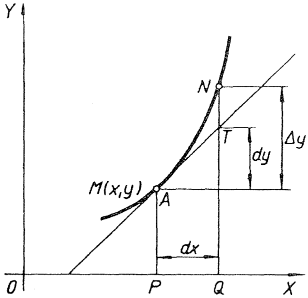
$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0.$$

Nađite $\frac{d^3y}{dx^3}$ u tački $(1; 1)$.

b) Nađite $\frac{d^3y}{dx^3}$, ako je $x^2 + y^2 = a^2$.

6. Diferencijali prvog i višeg reda

1°. Diferencijal prvog reda. *Diferencijalom (prvog reda) funkcije* $y=f(x)$ u tački x nazivamo glavni dio njenog prirasta $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ za $\Delta x\to 0$ koji je linearan s obzirom na prirast $\Delta x=dx$ nezavisne varijable x. Diferencijal funkcije jednak je produktu njene derivacije s diferencijalom nezavisne varijable:



Slika 19.

$$dy = y'dx.$$

Odatle je

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Funkciju koja ima diferencijal nazivamo diferencijabilnom.

Ako je MN luk grafa funkcije $y=f(x)$ (sl. 19), MT tangenta u tački $M(x, y)$ i

$$PQ = \Delta x = dx,$$

onda je prirast ordinate tangente

$$AT = dy$$

i odsječak

$$AN = \Delta y.$$

Primjer 1. Nadimo prirast i diferencijal funkcije $y=3x^2-x$.

Rješenje. Prvi način:

$$\Delta y = 3(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x) - 3x^2 + x$$

ili

$$\Delta y = (6x-1)\Delta x + 3(\Delta x)^2.$$

Slijedi da je

$$dy = (6x-1)\Delta x = (6x-1)\,dx.$$

Drugi način:

$$y' = 6x-1; \quad dy = y'\,dx = (6x-1)\,dx.$$

Primjer 2. Izračunajmo Δy i dy funkcije $y=3x^2-x$ kada je $x=1$ i $\Delta x=0{,}01$.

Rješenje.

$$\Delta y = (6x-1)\cdot\Delta x + 3(\Delta x)^2 = 5\cdot 0{,}01 + 3\cdot(0{,}01)^2 = 0{,}0503$$

i

$$dy = (6x-1)\Delta x = 5\cdot 0{,}01 = 0{,}0500.$$

2°. Osnovna svojstva diferencijala:

1) $dc = 0$, gdje je $c = \text{const}$.

2) $dx = \Delta x$, gdje je x nezavisna varijabla.

3) $d(cu) = c\,du$.

4) $d(u\pm v) = du \pm dv$.

5) $d(uv) = u\,dv + v\,du$.

$$6)\ \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

$$7)\ \mathrm{d}f(u) = f'(u)\,\mathrm{d}u.$$

3°. **Primjena diferencijala u približnim računima.** Ako je prirast Δx argumenta x malen po apsolutnoj vrijednosti, tada su diferencijal $\mathrm{d}y$ funkcije $y = f(x)$ i prirast Δy funkcije približno jednaki

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y,$$

tj.

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x,$$

odakle je

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{1}$$

Primjer 3. Koliko se približno promijenila stranica kvadrata ako se njegova površina povećala od 9 m² na 9,1 m²?.

Rješenje. Ako je x površina kvadrata a y njegova stranica, tada je

$$y = \sqrt{x}.$$

Prema uvjetima zadatka imamo; $x = 9$; $\Delta x = 0{,}1$.

Prirast Δy stranice kvadrata izračunamo približno:

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y = y'\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0{,}1 = 0{,}06\,\mathrm{m}.$$

4°. **Diferencijali višeg reda.** *Diferencijalom drugog reda* nazivamo diferencijal diferencijala prvog reda, uz fiksiran prirast odnosne varijable:

$$\mathrm{d}^2y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y).$$

Analogno se definiraju *diferencijali trećeg* itd. reda.

Ako je $y = f(x)$, a x nezavisna varijabla, onda je

$$\mathrm{d}^2y = y''(\mathrm{d}x)^2,$$

$$\mathrm{d}^3y = y'''(\mathrm{d}x)^3,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$\mathrm{d}^ny = y^{(n)}(\mathrm{d}x)^n.$$

Ako je $y = f(u)$ pri čemu je $u = \varphi(x)$, onda je

$$\mathrm{d}^2y = y''(\mathrm{d}u)^2 + y'\,\mathrm{d}^2u,$$

$$\mathrm{d}^3y = y'''(\mathrm{d}u)^3 + 3y''\mathrm{d}u \cdot \mathrm{d}^2u + y'\,\mathrm{d}^3u$$

itd. (Ovdje crticama označavamo deriviranje po u).

712. Nađite prirast Δy i diferencijal $\mathrm{d}y$ funkcije $y = 5x + x^2$ za $x = 2$ i $\Delta x = 0{,}001$.

713. Ne izračunavši derivaciju nađite $\mathrm{d}(1-x^3)$ za $x = 1$ i $\Delta x = -\frac{1}{3}$.

714. Površina kvadrata S sa stranicom x izražena je formulom $S = x^2$. Nađite prirast i diferencijal te funkcije i razjasnite geometrijsko značenje diferencijala.

715. Dajte geometrijsku interpretaciju prirasta i diferencijala ovih funkcija: a) površina kruga $S = \pi x^2$; b) volumen kocke $v = x^3$.

716. Pokažite da je za $\Delta x \to 0$ prirast funkcije $y = 2^x$, koji odgovara prirastu x za Δx, za svaki x ekvivalentan izrazu $2^x \Delta x \ln 2$.

717. Za koju vrijednost x diferencijal funkcije $y = x^2$ nije ekvivalentan prirastu te funkcije kada $\Delta x \to 0$?

718. Ima li funkcija $y = |x|$ diferencijal za $x = 0$?

719. Poslužįvši se derivacijom nađite diferencijal funkcije

$$y = \cos x \quad \text{za} \quad x = \frac{\pi}{6} \quad \text{i} \quad \Delta x = \frac{\pi}{36}.$$

720. Nađite diferencijal funkcije

$$y = \frac{2}{\sqrt{x}} \quad \text{za} \quad x = 9 \quad \text{i} \quad \Delta x = -0{,}01.$$

721. Izračunajte diferencijal funkcije

$$y = \operatorname{tg} x \quad \text{za} \quad x = \frac{\pi}{3} \quad \text{i} \quad \Delta x = \frac{\pi}{180}.$$

Nađite diferencijale ovih funkcija za po volji odabrane vrijednosti argumenta i njegova prirasta:

722. $y = \dfrac{1}{x^m}$.

723. $y = \dfrac{x}{1-x}$.

724. $y = \arcsin\dfrac{x}{a}$.

725. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$.

726. $y = e^{-x^2}$.

727. $y = x\ln x - x$.

728. $y = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

729. $r = \operatorname{ctg}\varphi + \operatorname{cosec}\varphi$.

730. $s = \operatorname{arcctg} e^t$.

731. Nađite dy, ako je $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$.

Rješenje. Koristeći invarijantnost oblika diferencijala dobivamo

$$2x\,dx + 2(y\,dx + x\,dy) - 2y\,dy = 0.$$

Odatle je

$$dy = -\frac{x+y}{x-y}dx.$$

Nađite diferencijale ovih funkcija zadanih implicitno:

732. $(x+y)^2(2x+y)^3 = 1$. **733.** $y = e^{-\frac{x}{y}}$.

734. $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

735. Nađite dy u tački $(1;\ 2)$, ako je $y^3 - y = 6x^2$.

736. Nađite približnu vrijednost od sin 31°.

Rješenje. Uz pretpostavku da je $x = \text{arc}\ 30° = \frac{\pi}{6}$ i $\Delta x = \text{arc}\ 1° = \frac{\pi}{180}$, iz formule (1) (vidi 3°) imamo $\sin 31° \approx \sin 30° + \frac{\pi}{180}\cos 30° = 0{,}500 + 0{,}017 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}515$.

737. Zamjenjujući prirast funkcije diferencijalom, približno izračunajte:

a) $\cos 61°$; c) $e^{0,2}$;

b) $\operatorname{tg} 44°$; d) $\lg 0{,}9$; e) $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

738. Za koliko se približno poveća volumen kugle, ako se njen polumjer $R = 15$ cm produlji za 2 mm?

739. Izvedite približnu formulu (za $|\Delta x|$ malo u usporedbi sa x)

$$\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$$

i pomoću nje nađite približne vrijednosti za $\sqrt{5}$; $\sqrt{17}$; $\sqrt{70}$; $\sqrt{640}$.

740. Izvedite približnu formulu

$$\sqrt[3]{x+\Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

i nađite približne vrijednosti za $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{70}$, $\sqrt[3]{200}$.

741. Nađite približne vrijednosti funkcija:

a) $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ za $x = 1{,}03$; c) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$ za $x = 0{,}1$;

b) $f(x) = \sqrt{1+x}$ za $x = 0{,}2$; d) $y = e^{1-x^2}$ za $x = 1{,}05$.

742. Nađite približne vrijednosti od tg 45°3′20″.

743. Izračunajte približno arcsin 0,54. **744.** Izračunajte približno $\sqrt[4]{17}$.

745. Pokažite, na osnovu formule Ohmova zakona $I = \frac{E}{R}$, da se mala promjena ΔI jakosti struje I uvjetovana malom promjenom ΔR otpora R može naći približno po formuli

$$\Delta I = -\frac{I}{R}\Delta R.$$

746. Pokažite da relativna pogreška od 1% pri određivanju duljine polumjera povlači relativnu pogrešku od približno 2% pri računanju površine kruga i oplošja kugle.

747. Izračunajte d^2y ako je $y = \cos 5x$.

Rješenje. $d^2y = y''(dx)^2 = -25\cos 5x(dx)^2$.

748. $u = \sqrt{1-x^2}$, treba naći d^2u.

749. $y = \arccos x$, treba naći d^2y.

750. $y = \sin x \ln x$, treba naći d^2y.

751. $z = \frac{\ln x}{x}$, treba naći d^2z.

752. $z = x^2e^{-x}$, treba naći d^3z.

753. $z = \frac{x^4}{2-x}$, treba naći d^4z.

754. $u = 3\sin(2x+5)$, treba naći d^nu.

755. $y = e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)$, treba naći d^ny.

7. Teoremi srednje vrijednosti

1°. Rolleov teorem. Ako funkcija $f(x)$, neprekinuta u intervalu $a \leqslant x \leqslant b$, ima derivaciju $f'(x)$ u svakoj tački unutar tog intervala i

$$f(a) = f(b),$$

tada za argument x postoji najmanje jedna vrijednost ξ, gdje je $a<\xi<b$, takva da je

$$f'(\xi) = 0.$$

2°. Lagrangeov teorem. Ako je funkcija $f(x)$ neprekinuta u intervalu $a \leqslant x \leqslant b$ i ima derivaciju u svakoj tački unutar tog intervala, tada je

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi), \quad \text{gdje je } a<\xi<b.$$

3°. Cauchyjev teorem. Ako su funkcije $f(x)$ i $F(x)$ neprekinute u intervalu $a \leqslant x \leqslant b$ i za $a<x<b$ imaju derivacije koje nisu istodobno nula, pri čemu je $F(b) \neq F(a)$, onda je

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}, \quad \text{gdje je } a<\xi<b.$$

756. Pokažimo da funkcija $f(x) = x - x^3$ u intervalima $-1 \leqslant x \leqslant 0$ i $0 \leqslant x \leqslant 1$ zadovoljava uvjete Rolleova teorema. Nađimo odgovarajuće vrijednosti ξ.

Rješenje. Funkcija $f(x)$ neprekinuta je i derivabilna za sve vrijednosti x; pored toga $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Prema tome je Rolleov teorem primjenljiv u intervalima $-1 \leqslant x \leqslant 0$ i $0 \leqslant x \leqslant 1$. Da nađemo broj ξ, tvorimo jednadžbu: $f'(x) = 1 - 3x^2 = 0$.

Odatle je $\xi_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\xi_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$, pri čemu je $-1<\xi_1<0$; $0<\xi_2<1$.

757. Funkcija $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ na krajevima intervala $[0, 4]$ ima jednake vrijednosti $f(0) = f(4) = \sqrt[3]{4}$.
Da li je na tu funkciju primjenljiv Rolleov teorem u intervalu $[0, 4]$?

758. Da li su ispunjeni uvjeti Rolleova teorema za funkciju $f(x) = \operatorname{tg} x$ u intervalu $[0, \pi]$?

759. Neka je $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$.

Pokažite da jednadžba $f'(x) = 0$ ima tri realna korijena.

760. Jednadžba $e^x = 1+x$ očigledno ima korijen $x = 0$.
Pokažite da ta jednadžba ne može imati drugog realnog korijena.

761. Provjerite da su ispunjeni uvjeti Lagrangeova teorema za funkciju

$$f(x) = x - x^3$$

u intervalu $[-2, 1]$ i nađite odgovarajuću međuvrijednost ξ.

Rješenje. Funkcija $f(x) = x - x^3$ neprekinuta je i derivabilna za sve vrijednosti x, pri čemu je $f'(x) = 1 - 3x^2$. Odatle po Lagrangeovoj formuli imamo $f(1) - f(-2) = 0 - 6 = [1-(-2)]f'(\xi)$, tj. $f'(\xi) = -2$. Prema tome je $1 - 3\xi^2 = -2$ i $\xi = \pm 1$; odgovara samo vrijednost $\xi = -1$ za koju vrijedi nejednadžba $-2 < \xi < 1$.

762. Provjerite da su ispunjeni uvjeti Lagrangeova teorema i nađite odgovarajuću međutačku ξ za funkciju $f(x) = x^{4/3}$ u intervalu $[-1, 1]$.

763. Za odsječak parabole $y = x^2$ zatvoren među tačkama $A(1;\ 1)$ i $B(3;\ 9)$, nađite tačku u kojoj je tangenta paralelna s tetivom AB.

764. Primjenom Lagrangeova teorema dokažite formulu

$$\sin(x+h) - \sin x = h\cos\xi,$$

gdje je $x < \xi < x+h$.

765. a) Za funkcije $f(x) = x^2+2$ i $F(x) = x^3-1$ provjerite da su ispunjeni uvjeti Cauhyjeva teorema u intervalu $[1, 2]$ i nađite ξ;

b) isto za $f(x) = \sin x$ i $F(x) = \cos x$ u intervalu $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

8. Taylorova formula

Ako je funkcija $f(x)$ neprekinuta i ima neprekinute derivacije do uključivo $(n-1)$-tog reda u intervalu $a \leqslant x \leqslant b$ (ili $b \leqslant x \leqslant a$), i ako u svakoj tački unutar tog intervala postoji konačna derivacija $f^{(n)}(x)$, onda u tome intervalu vrijedi *Taylorova formula*.

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \dots$$

$$\dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi),$$

gdje je $\xi = a + \theta(x-a)$ i $0 < \theta < 1$.

Napose za $a = 0$ imamo (*Maclaurinova formula*):

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\xi),$$

gdje je $\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$.

766. Polinom $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ razvijte po cijelim ne negativnim potencijama binoma $x - 2$.

Rješenje. $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$; $f''(x) = 6x - 4$; $f'''(x) = 6$; $f^{(n)}(x) = 0$ za $n \geqslant 4$.

Odatle je $f(2) = 11$; $f'(2) = 7$; $f''(2) = 8$; $f'''(2) = 6$.

Prema tome je,

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 5 = 11 + (x-2) \cdot 7 + \frac{(x-2)^2}{2!} \cdot 8 + \frac{(x-2)^3}{3!} \cdot 6$$

ili

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3.$$

767. Funkciju $f(x) = e^x$ razvijte u red po potencijama binoma $x + 1$ do člana koji sadrži $(x+1)^3$.

Rješenje. $f^{(n)}(x) = e^x$ za sve n, $f^{(n)}(-1) = \frac{1}{e}$. Prema tome je

$$e^x = \frac{1}{e} + (x+1)\frac{1}{e} + \frac{(x+1)^2}{2!}\frac{1}{e} + \frac{(x+1)^3}{3!}\frac{1}{e} + \frac{(x+1)^4}{4!} e^{\zeta},$$

gdje je $\zeta = -1 + \theta(x+1)$, $0 < \theta < 1$.

768. Funkciju $f(x) = \ln x$ razvijte u red po potencijama od $x - 1$ do člana sa $(x-1)^2$.

769. Funkciju $f(x) = \sin x$ razvijte u red po potencijama od x do člana sa x^3 i do člana sa x^5.

770. Funkciju $f(x) = e^x$ razvijte u red po potencijama od x do člana sa x^{n-1}.

771. Pokažite da se $\sin(a+h)$ razlikuje od $\sin a + h \cos a$ za najviše $\frac{1}{2} h^2$.

772. Objasnite porijeklo približnih formula:

a) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$, $|x| < 1$,

b) $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$, $|x| < 1$,

i ocijenite njihove pogreške.

773. Ocijenite pogrešku u formuli

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}.$$

774. Teška nit pod djelovanjem vlastite težine visi u obliku lančanice $y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$.

Pokažite da je za male $|x|$ oblik niti približno izražen parabolom

$$y = a + \frac{x^2}{2a}.$$

775.** Pokažite da za $|x| \leqslant a$ s tačnošću do $(x/a)^2$ vrijedi približna jednadžba

$$e^{\frac{x}{a}} \approx \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

9. L'Hospital-Bernoullijevo pravilo za neodređene oblike

1°. Neodređeni oblici tipa $\frac{0}{0}$ **i** $\frac{\infty}{\infty}$. Zadane su jednoznačne funkcije $f(x)$ i $\varphi(x)$ derivabilne za $0<|x-a|<h$ pri čemu se derivacija $\varphi'(x)$ ne poništava.

Ako su $f(x)$ i $\varphi(x)$ obje beskonačno male ili obje beskonačno velike kada $x \to a$, tj. ako razlomak $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ predstavlja u toj tački $x=a$ neodređen oblik tipa $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$, tada je

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

pod uvjetom da limes kvocijenta derivacija egzistira (*L'Hospital—Bernoullijevo pravilo*). Pravilo je primjenljivo i u slučaju kada je $a=\infty$.

Ako razlomak $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ iznova daje neodređen oblik u tački $x=a$ jednog od dva navedena tipa i $f'(x)$ i $\varphi'(x)$ udovoljavaju svim ranije formuliranim uvjetima za $f(x)$ i $\varphi(x)$, tada se može prijeći na kvocijent drugih derivacija itd.

No treba napomenuti da limes kvocijenta $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ može egzistirati i tada kada kvocijent derivacija ne teži nikakvom limesu (vidi br. 809).

2°. Drugi neodređeni oblici. Da se nađe vrijednosti neodređenog oblika $0 \cdot \infty$ pretvaramo odgovarajući produkt $f_1(x) \cdot f_2(x)$, gdje je $\lim\limits_{x \to a} f_1(x)=0$ i $\lim\limits_{x \to a} f_2(x)=\infty$, u razlomak

$$\frac{f_1(x)}{\dfrac{1}{f_2(x)}} \left(\text{oblik } \frac{0}{0}\right) \quad \text{ili} \quad \frac{f_2(x)}{\dfrac{1}{f_1(x)}} \left(\text{oblik } \frac{\infty}{\infty}\right).$$

U slučaju neodređenog oblika $\infty-\infty$ treba pretvoriti odgovarajuću razliku $f_1(x)-f_2(x)$ u produkt $f_1(x)\left[1-\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right]$ i najprije riješiti neodređeni oblik $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$; ako je $\lim\limits_{x \to a} \frac{f_2(x)}{f_1(x)}=1$, onda izraz dovodimo u oblik

$$\frac{1-\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}}{\dfrac{1}{f_1(x)}} \left(\text{oblik } \frac{0}{0}\right).$$

Neodređene oblike 1^{∞}, 0^0, ∞^0 rješavamo pomoću prethodnog logaritmiranja i određivanja limesa logaritma odgovarajuće potencije $[f_1(x)]^{f_2(x)}$ (što iziskuje određivanje neodređena oblika $0 \cdot \infty$)

U nekim je slučajevima korisno kombinirati L'Hostpial-Bernoullijevo pravilo s određivanjem limesa elementarnim sredstvima.

Primjer 1. Izračunajmo $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$ $\left(\text{neodređen oblik } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

Rješenje. Primijenivši L'Hospital-Bernoullijevo pravilo imamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} = -\lim_{x \to x} \frac{\sin^2 x}{x}.$$

Dobili smo neodređeni oblik $\frac{0}{0}$, pa primjena L'Hospital-Bernoullijeva pravila nije potrebna, jer je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x=1\cdot 0\cdot=0.$$

Na taj način konačno dobivamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}=0.$$

Primjer 2. Izračunajmo

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)\text{(neodređeni oblik } \infty-\infty).$$

Rješenje. Svedimo razlomke na zajednički nazivnik

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\left(\text{neodređeni oblik }\frac{0}{0}\right).$$

Prije nego što primijenimo L'Hospital-Bernoullijevo pravilo, zamijenimo nazivnik razlomka ekvivalentnom beskonačno malom veličinom (gl. I, 4) $x^2\sin^2 x\sim x^4$. Dobivamo

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\left(\text{neodređeni oblik }\frac{0}{0}\right).$$

Po L'Hospital-Bernoullijevu pravilu je

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}.$$

Dalje nalazimo elementarnim putem:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{6x^2}=\frac{1}{3}.$$

Primjer 3. Izračunajmo

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}\text{(neodređeni oblik } 1^\infty).$$

Rješenje. Logaritmiramo i primijenimo L'Hospital-Bernoullijevo pravilo, pa dobijemo

$$\lim_{x\to 0}\ln(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{3\ln\cos 2x}{x^2}=-6\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x}=-6.$$

Iz toga slijedi $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=e^{-6}$.

Potražite ove limese funkcija:

776. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$.

Rješenje. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x-1}{3x^2-7}=\frac{1}{2}.$$

777. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$.

778. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$.

779. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{1-\cos x}$.

780. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x-\sin x}$.

781. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2 x-2\operatorname{tg}x}{1+\cos 4x}$.

782. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}5x}$.

783. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$.

784. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

785. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}}$.

786. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln\sin x}$ $(m>0)$.

787. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg}x$.

Rješenje. $$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg}x=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cos x}{\sin x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot 1=0.$$

788. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

789. $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\operatorname{ctg}x$.

790. $\lim\limits_{x\to 0}(x^n e^{-x})$, $n>0$.

791. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{a}{x}$.

792. $\lim\limits_{x\to\infty}x^n\sin\dfrac{a}{x}$, $n>0$ $a\neq 0$.

793. $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\ln(x-1)$.

794. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Rješenje. $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot\dfrac{1}{x}+\ln x-1}{\ln x+\dfrac{1}{x}(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x-\dfrac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

795. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$.

796. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right]$.

797. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

798. $\lim\limits_{x\to+0} x^x$.

Rješenje. Imamo $x^x = y$; $\ln y = x\ln x$; $\lim\limits_{x\to0}\ln y = \lim\limits_{x\to0} x\ln x =$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = 0, \text{ odakle je } \lim_{x\to0} y = 1, \text{ tj. } \lim_{x\to0} x^x = 1.$$

799. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

800. $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

801. $\lim\limits_{x\to+0} x^{\sin x}$.

802. $\lim\limits_{x\to1-0}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$.

803. $\lim\limits_{x\to+0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$.

804. $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

805. $\lim\limits_{x\to1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

806. $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

807. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

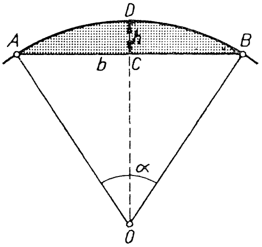
808. $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

809. Dokažite da se limesi

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x} = 0$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x} = 1$;

ne mogu naći primjenom L'Hospital-Bernoullijeva pravila. Nađite te limese izravno.



Slika 20.

810*. Pokažite da je površina segmenta kruga s malim središnjim kutom α, tetivom $AB = b$ i visinom $CD = h$ (sl. 20) približno jednaka

$$S \approx \frac{2}{3}bh$$

s po volji malom relativnom pogreškom kada $\alpha\to0$.

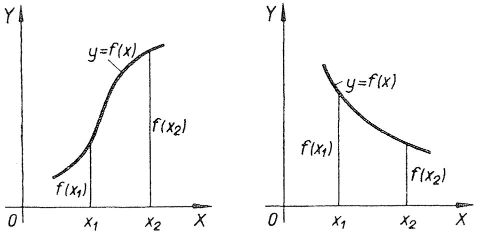
GLAVA III

EKSTREMI FUNKCIJA I PRIMJENE DERIVACIJA U GEOMETRIJI

1. Ekstremi funkcije jednog argumenta

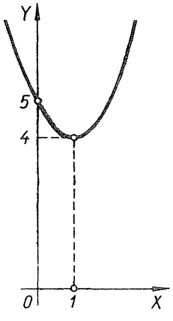
1°. Uzlazna i silazna funkcija. Funkciju $y = f(x)$ nazivamo *uzlaznom* (*silaznom*) u nekom intervalu (odsječku), ako za po volji odabrane tačke x_1 i x_2 koje pripadaju zadanom intervalu (odsječku) iz nejednadžbe $x_1 < x_2$ slijedi nejednadžba $f(x_1) < f(x_2)$ (sl. 21,*a*) ($f(x_1) > f(x_2)$ (sl. 21,*b*). Ako je funkcija $f(x)$ neprekinuta na odsječku $[a, b]$ i $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) za $a < x < b$, tada je $f(x)$ uzlazna (silazna) na odsječku $[a, b]$.

U jednostavnim slučajevima područje definicije funkcije $f(x)$ možemo rastaviti na konačan broj intervala u kojima je funkcija uzlazna ili silazna (*intervali monotonosti*). Ovi intervali omeđeni su kritičkim tačkama x (gdje je $f'(x) = 0$ ili gdje $f'(x)$ ne postoji).



a) b)

Slika 21.



Slika 22.

Primjer 1. Istražimo s obzirom na uzlaznost i silaznost funkciju $y = x^2 - 2x + 5$.

Rješenje. Nadimo derivaciju

$$y' = 2x - 2 = 2(x - 1). \tag{1}$$

Odatle je $y' = 0$ za $x = 1$. Na brojevnom pravcu dobivamo dva intervala monotonosti: $(-\infty, 1)$ i $(1, +\infty)$. Iz formule (1) imamo: 1) ako je $-\infty < x < 1$, tada je $y' < 0$, pa je prema tome funkcija $f(x)$ silazna u intervalu $(-\infty, 1)$; 2) ako je $1 < x < +\infty$, tada je $y' > 0$ pa je prema tome funkcija $f(x)$ uzlazna u intervalu $(1, +\infty)$ (sl. 22).

Primjer 2. Odredimo intervale uzlaznosti i silaznosti funkcije

$$y = \frac{1}{x+2}.$$

Rješenje. Ovdje je $x = -2$ tačka prekinutosti funkcije, a $y' = -\frac{1}{(x+2)^2} < 0$ za $x \neq -2$. Prema tome je funkcija y silazna u intervalima $-\infty < x < -2$ i $-2 < x < +\infty$.

Primjer 3. Razmotrimo s obzirom na uzlaznost i silaznost funkciju

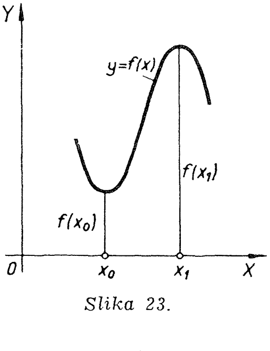
$$y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3.$$

Rješenje. Ovdje je

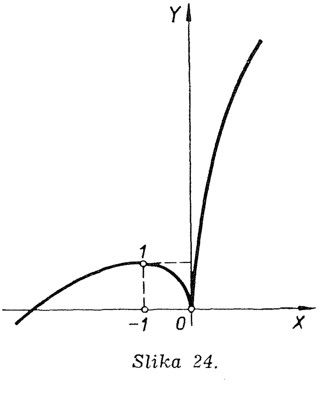
$$y' = x^4 - x^2. \qquad (2)$$

Riješimo li jednadžbu $x^4 - x^2 = 0$, dobivamo tačke $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ u kojima se derivacija y' poništava. Budući da y' može promijeniti predznak samo pri prijelazu kroz tačke u kojima se poništava ili se prekida (u zadanom primjeru tačke prekinutosti za y' nema), to u svakom intervalu $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, +\infty)$ derivacija zadržava stalni predznak, pa je prema tome u svakom od tih intervala razmatrana funkcija monotona. Da bismo ustanovili u kojim je od naznačenih intervala funkcija uzlazna, a u kojima je silazna, nužno je da znamo kakav predznak ima derivacija u svakom od tih intervala. Da bismo saznali kakav predznak ima y' u intervalu $(-\infty, -1)$, dovoljno je da ustanovimo kakav je predznak y' u jednoj po volji odabranoj tački tog intervala; uzmemo li na primjer da je $x = -2$, dobijemo iz (2) da je $y' = 12 > 0$, pa je prema tome $y' > 0$ u intervalu $(-\infty, -1)$ i funkcija je u tom intervalu uzlazna. Analogno nalazimo da je $y' < 0$ u intervalu $(-1, 0)$ $\left(\text{za provjeravanje možemo na primjer uzeti } x = -\frac{1}{2}\right)$; $y' < 0$ u intervalu $(0, 1)$ $\left(\text{ovdje se možemo poslužiti sa } x = \frac{1}{2}\right)$; $y' > 0$ u intervalu $(1, +\infty)$.

Prema tome je razmatrana funkcija uzlazna u intervalu $(-\infty, -1)$, silazna u intervalu $(-1, 1)$ i ponovno uzlazna u intervalu $(1, +\infty)$.



Slika 23.



Slika 24.

2°. **Ekstremi funkcije.** Postoji li takva okolina tačke x_0, da za svaku tačku $x \neq x_0$ te okoline vrijedi nejednadžba $f(x) > f(x_0)$, tada tačku x_0 nazivamo *tačkom minimuma* funkcije $y = f(x)$ a broj $f(x_0)$ *minimumom* funkcije $y = f(x)$. Analogno, ako za svaku tačku $x \neq x_1$, neke okoline tačke x_1 vrijedi nejednadžba $f(x) < f(x_1)$, tada x_1 nazivamo *tačkom maksimuma* funkcije $f(x)$, a $f(x_1)$ *maksimumom* funkcije (sl. 23). Tačku minimuma ili maksimuma funkcije nazivamo njenom *tačkom ekstrema*, a minimum ili maksimum funkcije nazivamo *ekstremom* funkcije. Ako je x_0 tačka ekstrema funkcije $f(x)$, tada je $f'(x_0) = 0$ (*stacionarna tačka*) ili pak $f'(x_0)$ ne postoji (nužni uvjet za postojanje ekstrema). Obrnuta tvrdnja nije tačna: tačke u kojima je $f'(x) = 0$ ili pak $f'(x)$ ne postoji (*kritičke tačke*), nisu uvijek tačke ekstrema funkcije $f(x)$. Dovoljni uvjeti da postoje odnosno ne postoje ekstremi neprekinute funkcije $f(x)$ dani su ovim pravilima:

1. Postoji li takva okolina $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ kritičke tačke x_0, da je $f'(x) > 0$ za $x_0 - \delta < x < x_0$ i $f'(x) < 0$ za $x_0 < x < x_0 + \delta$, tada je x_0 tačka maksimuma funkcije $f(x)$; ako je pak $f'(x) < 0$ za $x_0 - \delta < x < x_0$ i $f'(x) > 0$ za $x_0 < x < x_0 + \delta$, tada je x_0 tačka minimuma funkcije $f(x)$.

Ako pak na posljetku nađemo takav pozitivan broj δ, da $f'(x)$ zadržava nepromijenjen predznak za $0 < |x - x_0| < \delta$ onda tačka x_0 nije tačka ekstrema funkcije $f(x)$.

2. Ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$, onda je x_0 tačka maksimuma funkcije $f(x)$; ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$, onda je x_0 tačka minimuma funkcije $f(x)$: ako je pak $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, a $f'''(x_0) \neq 0$ onda tačka x_0 nije tačka ekstrema funkcije $f(x)$.

U općenitijem obliku: neka prva u nizu derivacija funkcije $f(x)$ koja u tački x_0 nije jednaka nuli bude reda k. Tada je, ako je k paran, tačka x_0 tačka ekstrema i to tačka maksimuma ako je $f^{(k)}(x_0) < 0$, i tačka minimuma ako je $f^{(k)}(x_0) > 0$. Ako je pak k neparan, onda tačka x_0 nije tačka ekstrema.

Primjer 4. Nađimo ekstreme funkcije

$$y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}.$$

Rješenje. Nađimo derivaciju

$$y' = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x} + 1). \tag{3}$$

Izjednačimo li derivaciju y' s nulom, dobivamo:

$$\sqrt[3]{x} + 1 = 0.$$

Odatle nalazimo stacionarnu tačku $x_1 = -1$. Iz formule (3) imamo: ako je $x = -1 - h$, gdje je h po volji odabran malen pozitivni broj, onda je $y' > 0$; ako je pak $x = -1 + h$, onda je $y' < 0$*).

Prema tome je $x_1 = -1$ tačka maksimuma funkcije y, pri čemu je $y_{\max} = 1$.

Izjednačimo li nazivnik izraza za y' iz (3) s nulom, dobivamo:

$$\sqrt[3]{x} = 0;$$

odatle izračunamo kritičku tačku za funkciju $x_2 = 0$, gdje derivacija y' ne postoji. Za $x = -h$ očigledno imamo da je $y' < 0$; za $x = h$ imamo $y' > 0$. Prema tome je $x_2 = 0$ tačka minimuma funkcije y, pri čemu je $y_{\min} = 0$ (sl. 24). Razmatranje toka funkcije u tački $x_1 = -1$ možemo provesti također pomoću druge derivacije

$$y'' = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x}}.$$

Ovdje je $y'' < 0$ za $x_1 = -1$ i prema tome je $x_1 = -1$ tačka maksimuma funkcije.

3°. Najmanje i najveće vrijednosti. Najmanja (najveća) vrijednost neprekinute funkcije $f(x)$ na zadanom odsječku $[a, b]$ dobije se ili u kritičkim tačkama funkcije ili na krajevima odsječka $[a, b]$.

Primjer 5. Nađimo najmanju i najveću vrijednost funkcije

$$y = x^3 - 3x + 3$$

na odsječku $-1\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2\frac{1}{2}$.

Rješenje. Budući da je

$$y' = 3x^2 - 3,$$

---

*) Ako je određivanje predznaka derivacije y' teško, onda se može izvesti aritmetički račun, uzevši za h dovoljno malen pozitivni broj.

kritičke su tačke funkcije y, $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$. Ako usporedimo vrijednosti u tim tačkama s vrijednostima funkcije na krajevima zadanog odsječka

$$y(-1) = 5; \quad y(1) = 1; \quad y\left(-1\frac{1}{2}\right) = 4\frac{1}{8}; \quad y\left(2\frac{1}{2}\right) = 11\frac{1}{8}.$$

zaključujemo (sl. 25), da najmanju vrijednost $m = 1$ funkcija ima u tački $x = 1$ (u tački minimuma), a najveću $M = 11\frac{1}{8}$ ima u tački $x = 2\frac{1}{2}$ (na desnom kraju odsječka).

Odredite uzlazne i silazne intervale funkcija:

811. $y = 1 - 4x - x^2$.

812. $y = (x-2)^2$.

813. $y = (x+4)^3$.

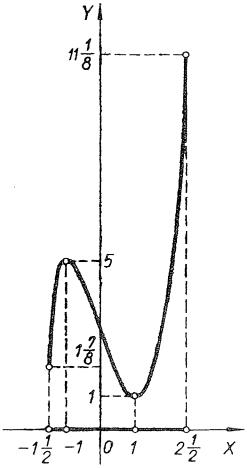
814. $y = x^2(x-3)$.

815. $y = \dfrac{x}{x-2}$.

816. $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

817. $y = \dfrac{x}{x^2 - 6x - 16}$.

818. $y = (x-3)\sqrt{x}$.



Slika 25.

819. $y = \dfrac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$.

820. $y = x + \sin x$.

821. $y = x \ln x$.

822. $y = \arcsin(1+x)$.

823. $y = 2e^{x^2-4x}$.

824. $y = 2^{\frac{1}{x-a}}$.

825. $y = \dfrac{e^x}{x}$.

Istražite s obzirom na ekstreme ove funkcije:

826. $y = x^2 + 4x + 6$.

Rješenje. Nađemo derivaciju zadane funkcije $y' = 2x + 4$. Izjednačivši y' s nulom, dobivamo kritičku vrijednost argumenta $x = -2$. Budući da je $y' < 0$ za $x < -2$ i $y' > 0$ za $x > -2$, to je $x = -2$ tačka minimuma zadane funkcije, pri čemu je $y_{\min} = 2$. Ovaj isti rezultat dobivamo ako iskoristimo predznak druge derivacije u kritičkoj tački: $y'' = 2 > 0$.

827. $y = 2 + x - x^2$.

828. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$.

829. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$.

Rješenje. Izračunamo derivaciju

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2).$$

Izjednačivši derivaciju y' s nulom dobivamo kritičke tačke $x_1 = -2$ i $x_2 = 1$. Za određivanje karaktera ekstrema izračunamo drugu derivaciju $y'' = 6(2x+1)$. Budući da je $y''(-2) < 0$, to je $x_1 = -2$ tačka maksimuma funkcije y, pri čemu je $y_{\max} = 25$. Analogno imamo $y''(1) > 0$; prema tome je $x_2 = 1$ tačka minimuma funkcije y i $y_{\min} = -2$.

830. $y = x^2(x-12)^2.$

831. $y = x(x-1)^2(x-2)^3.$

832. $y = \dfrac{x^3}{x^2+3}.$

833. $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}.$

834. $y = \dfrac{(x-2)(8-x)}{x^2}.$

835. $y = \dfrac{16}{x(4-x^2)}.$

836. $y = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+8}}.$

837. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}.$

838. $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}.$

839. $y = 2\sin 2x + \sin 4x.$

840. $y = 2\cos\dfrac{x}{2} + 3\cos\dfrac{x}{3}.$

841. $y = x - \ln(1+x).$

842. $y = x\ln x.$

843. $y = x\ln^2 x.$

844. $y = \operatorname{ch} x.$

845. $y = xe^x.$

846. $y = x^2 e^{-x}.$

847. $y = \dfrac{e^x}{x}.$

848. $y = x - \operatorname{arctg} x.$

Odredite najmanju i najveću vrijednost funkcije na označenim odsječcima (ako odsječak nije označen, tada treba izračunati najmanje i najveće vrijednosti funkcije u cijelom području postojanja):

849. $y = \dfrac{x}{1+x^2}.$

850. $y = \sqrt{x(10-x)}.$

851. $y = \sin^4 x + \cos^4 x.$

852. $y = \arccos x.$

853. $y = x^3$ na odsječku $[-1, 3]$.

854. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$:

a) na odsječku $[-1, 5]$;

b) na odsječku $[-10, 12]$.

855. Pokažite da za pozitivne vrijednosti x vrijedi nejednadžba

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

856. Odredite koeficijente p i q kvadratnog trinoma $y = x^2 + px + q$ tako, da taj trinom ima minimum $y = 3$ za $x = 1$. Objasnite dobiveni rezultat geometrijski.

857. Dokažimo nejednadžbu

$$e^x > 1 + x \qquad \text{za} \quad x \neq 0.$$

Rješenje. Razmotrimo funkciju

$$f(x) = e^x - (1 + x).$$

Običnim načinom nalazimo da ta funkcija ima jedan minimum $f(0) = 0$. Prema tome je

$$f(x) > f(0) \quad \text{za} \quad x \neq 0,$$

tj.

$$e^x > 1 + x \quad \text{za} \quad x \neq 0,$$

što je i trebalo dokazati.

Dokažite nejednadžbe:

858. $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \quad \text{za} \quad x > 0.$ **859.** $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{za} \quad x \neq 0.$

860. $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x \quad \text{za} \quad x > 0.$

861. Zadani pozitivni broj a rastavite na dva pribrojnika tako da njihov produkt bude najveći.

862, Komad žice zadane duljine l svinite u pravokutnik tako da njegova površina bude najveća.

863. Koji od pravokutnih trokuta sa zadanim opsegom $2p$ ima najveću površinu?

864. Treba odabrati pravokutni teren tako da s tri strane bude ograđen žičanom mrežom, a s četvrte strane da je primaknut kamenoj stijeni. Kakav je najpovoljniji oblik terena (s obzirom na površinu) ako imamo l dužinskih metara mreže.

865. Iz kvadratnog kartona kojemu je stranica a treba načiniti otvorenu pravokutnu kutiju kojà bi imala najveći volumen, tako, da na vrhovima izrežemo kvadrate i savijemo izdanke dobivenog lika koji ima oblik križa.

866. Otvorena limena posuda s kvadratnom bazom mora primiti v litara. Pri kojim dimenzijama trebamo za izradu posude najmanju količinu lima?

867. Koji od valjaka zadanog volumena ima najmanju ukupnu površinu?

868. Zadanoj kugli treba upisati valjak najvećeg volumena.

869. Zadanoj kugli upišite valjak s najvećom površinom plašta.

870. Zadanoj kugli upišite stožac najvećeg volumena.

871. Zadanoj kugli upišite uspravan kružni stožac s najvećom površinom plašta.

872. Zadanom valjku opišite uspravan stožac najmanjeg volumena (ravnine i središta njihovih kružnih baza se poklapaju).

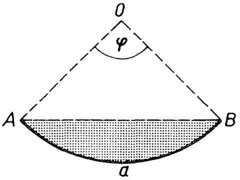
873. Koji od stožaca opisanih zadanoj kugli ima najmanji volumen?

874. Limenu traku širine a morate saviti u otvoren žlijeb (sl. 26). Koliki mora biti središnji kut φ da bi sadržina žlijeba bila najveća?

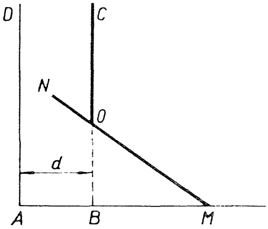
875. Iz okruglog papira izrežite takav sektor da dobijete lijevak najveće sadržine ako taj sektor savinete.

876. Otvorena posuda sastoji se od valjka koji dolje završava polukuglom; debljina stijena je svugdje jednaka. Kakve moraju biti dimenzije posude da pri zadanoj sadržini na nju potrošimo najmanje materijala?

877. Odredite najmanju visinu $h = OB$ vrata uspravnog tornja $ABCD$, da se kroz ta vrata u toranj može unijeti kruti stup MN duljine l, kojemu završetak M klizi po horizontalnom pravcu AB. Širina tornja $d<l$ (sl. 27).



Slika 26.



Slika 27.

878. Na koordinatnoj ravnini zadana je tačka M_0 (x_0, y_0) koja leži u prvom kvadrantu. Povucite kroz tu tačku pravac koji s pozitivnim poluosima tvori trokut najmanje površine.

879. Zadanoj elipsi upišite pravokutnik najveće površine kojemu su stranice paralelne s osima elipse.

880. Odsječku parabole $y^2 = 2px$, odsječenom pravcem $x = 2a$, upišite pravokutnik najveće površine.

881. Na krivulji $y = \frac{1}{1+x^2}$ nađite tačku u kojoj tangenta s osi OX tvori po apsolutnoj vrijednosti najveći kut.

882. Glasnik mora doći iz tačke A s jedne obale rijeke do tačke B na drugoj obali. Znajući da je brzina kretanja kopnom k puta veća od brzine kretanja po vodi odredite pod kojim kutom glasonoša mora presjeći rijeku da bi došao u tačku B u najkraće vrijeme. Širina rijeke je h a udaljenost između tačaka A i B (duž obale) je d.

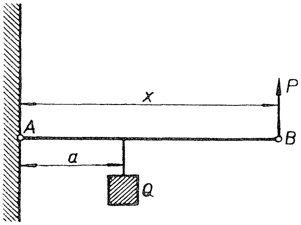
883. Na odsječku $AB = a$ pravca, koji spaja dva izvora svjetla A (intenziteta p) i B (intenziteta q) nađite tačku M koja je najmanje osvijetljena (osvijetljenost je obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti izvora svjetlosti).

884. Lampa visi iznad središta okruglog stola polumjera r. Pri kojoj će visini lampe iznad stola osvijetljenost predmeta, položenog na kraj stola biti najbolja? (Osvijetljenost je direktno proporcionalna kosinusu kuta upada zraka svjetlosti i obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti od izvora svjetla).

885. Iz okruglog trupca kojemu je promjer d treba izrezati gredu pravokutnog presjeka. Kakva mora biti širina x i visina y tog presjeka da greda ima najveći otpor: a) na tlak, b) na savijanje?

Napomena. Otpor grede s obzirom na tlak proporcionalan je površini njenog poprečnog presjeka, a s obzirom na savijanje produktu širine tog presjeka i kvadrata njegove visine.

886. Homogeni štap AB se može okretati oko tačke A (sl. 28). Opterećen je teretom Q N na udaljenosti a cm od tačke A. U ravnoteži je djelovanjem vertikalne sile P na njegovom slobodnom kraju B. Težina štapa po centimetru duljine iznosi q N. Odredite duljinu štapa x tako da sila P bude najmanja i nađite $P_{\min}$.



Slika 28.

887* Središta triju potpuno elastičnih kugli A, B i C postavljena su u pravcu. Kugla A mase M brzinom v udari u kuglu B, koja, dobivši izvjesnu brzinu, udari u kuglu C mase m. Kolika mora biti masa kugle B da brzina kugle C bude najveća?

888. Imamo li N jednakih galvanskih elemenata, možemo na različite načine od njih sastaviti bateriju, spajanjem n elemenata serijski, a zatim dobivenih $\frac{N}{n}$ grupa paralelno. Struja koju daje takva baterija određena je formulom

$$I = \frac{Nn\mathscr{E}}{NR + n^2 r},$$

gdje je $\mathscr{E}$ elektromotorna sila jednog elementa, r njegov unutarnji otpor i R vanjski otpor. Odredite pri kojem n će baterija dati najjaču struju.

889.* Posuda je napunjena vodom do visine H. Iz malog otvora u vertikalnoj stijeni posude istječe horizontalno mlaz vode, koji pod utjecajem sile teže pogađa horizontalnu podlogu posude u udaljenosti x od stijene. U kojoj visini y treba da se nalazi otvor, da x bude maksimalan?

890. Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rezultati jednako tačnih mjerenja veličine x, tada je njena najvjerojatnija vrijednost ta pri kojoj je suma kvadrata pogrešaka

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)^2$$

najmanja (*metoda najmanjih kvadrata*).

Dokažite, da je najvjerovatnija vrijednost x aritmetička sredina rezultata mjerenja.

2. Smjer konkavnosti. Tačke infleksije

1°. Konkavnost grafa funkcije. Kažemo da je graf derivabilne funkcije $y=f(x)$ *konkavan nadolje* u intervalu (a, b) (*konkavan nagore* u intervalu (a_1, b_1)), ako se za $a<x<b$ luk krivulje nalazi ispod (ili pak iznad za $a_1<x<b_1$) tangente povučene u po volji odabranoj tački intervala (a, b) (ili intervala (a_1, b_1)), dakako osim u tački dodira (sl. 29). Dovoljan je uvjet za konkavnost nadolje (nagore) grafa $y = f(x)$ da su zadovoljene nejednadžbe

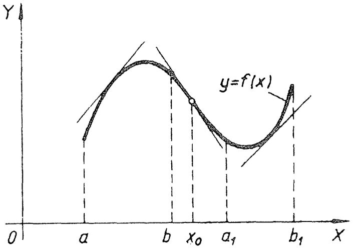
$$f''(x)<0 \quad (f''(x)>0)$$

u odgovarajućem intervalu.

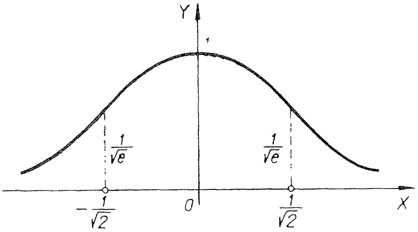
Umjesto da kažemo da je graf konkavan nadolje, govorimo također da je *konveksan nagore*. Analogno graf, koji je konkavan nagore, nazivamo također *konveksnim nadolje.*

2°. Tačke infleksije. Tačka $(x_0, f(x_0))$ u kojoj se mijenja smjer konkavnosti grafa funkcije naziva se *tačka infleksije* (sl. 29).

Za apscisu tačke infleksije x_0 grafa funkcije $y=f(x)$ vrijedi $f''(x_0)=0$ ili $f''(x_0)$ ne postoji. Tačke u kojima je $f''(x)=0$ ili $f''(x)$ ne postoji nazivaju se *kritičke tačke druge vrste.* Kritička tačka druge vrste s apscisom x_0 je tačka infleksije, ako $f''(x)$ zadržava konstantne predznake u intervalima $x_0-\delta<x<x_0$ i $x_0<x<x_0+\delta$ gdje je δ neki pozitivni broj, pri čemu su ti predznaci suprotni, dok u toj tački nema infleksije, ako su predznaci $f''(x)$ u spomenutim intervalima jednaki.



Slika 29.



Slika 30.

Primjer 1. Odredimo intervale konkavnosti i konveksnosti, a također i tačke infleksije *Gaussove krivulje*

$$y=e^{-x^2}$$

Rješenje. Imamo:

$$y'=-2xe^{-x^2}$$

i

$$y''=(4x^2-2)e^{-x^2}.$$

Izjednačimo li drugu derivaciju y'' s nulom, nalazimo kritičke tačke druge vrsti

$$x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ove tačke dijele brojevni pravac $-\infty<x<+\infty$ na tri intervala: I $(-\infty, x_1)$, II (x_1, x_2) i III $(x_2, +\infty)$. Predznaci y'' bit će $+$, $-$, $+$ (u to se možemo uvjeriti ako na primjer odaberemo po jednu tačku iz svakog od navedenih intervala i supstituiramo dotične vrijednosti x i y''). Prema tome je: 1) Krivulja konkavna nagore za $-\infty<x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ i $\frac{1}{\sqrt{2}}<x<+\infty$; 2) konkavna nadolje za $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tačke $\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ su tačke infleksije (sl. 30).

Primijetimo da je zbog simetrije Gaussove krivulje s obzirom na os OY dovoljno ispitati predznak konkavnosti te krivulje samo na poluosi $0<x<+\infty$.

Primjer 2. Nađite tačke infleksije grafa funkcije

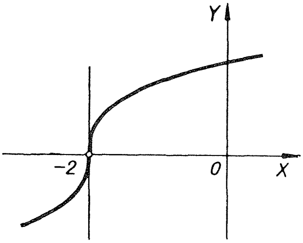
$$y=\sqrt[3]{x+2}.$$

Rješenje. Imamo

$$y''=-\frac{2}{9}(x+2)^{-\frac{5}{3}}=\frac{-2}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}} \qquad (1)$$

Očito se y'' nigdje ne poništava.

Ako nazivnik razlomka izjednačimo s desnom stranom jednadžbe (1), dobivamo da y'' ne postoji za $x=-2$. Budući da je $y''>0$ za $x<-2$ i $y''<0$ za $x>-2$, to je $(-2, 0)$ tačka infleksije (sl. 31). Tangenta u toj tački paralelna je osi ordinata jer je prva derivacija y' za $x=-2$ neizmjerna.



Slika 31.

Nađite intervale konkavnosti i tačke infleksije grafova funkcija:

891. $y=x^3-6x^2+12x+4.$

892. $y=(x+1)^4.$

893. $y=\dfrac{1}{x+3}.$

894. $y=\dfrac{x^3}{x^2+12}.$

895. $y=\sqrt[3]{4x^3-12x}.$

896. $y=\cos x.$

897. $y=x-\sin x.$

898. $y=x^2\ln x.$

899. $y=\operatorname{arctg} x-x.$

900. $y=(1+x^2)\,e^x.$

3. Asimptote

1°. Definicija. Ako se tačka (x, y) neprekinuto pomiče po krivulji $y=f(x)$ tako, da barem jedna koordinata tačke teži k neizmjernosti, a pri tome udaljenost tačke od nekog pravca teži k nuli onda se taj pravac naziva *asimptotom* krivulje.

2°. Vertikalne asimptote. Ako postoji takav broj a da je

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty,$$

onda je pravac $x=a$ asimptota (*vertikalna asimptota*).

3°. Kose asimptote. Ako egzistiraju limesi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k_1$$

$$\lim_{\to+\infty}\,[f(x)-k_1x]=b_1,$$

tada je pravac $y=k_1x+b_1$ asimptota (*desna kosa* ili u slučaju kada je $k_1=0$, *desna horizontalna asimptota*).

Ako egzistiraju limesi

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k_2$$

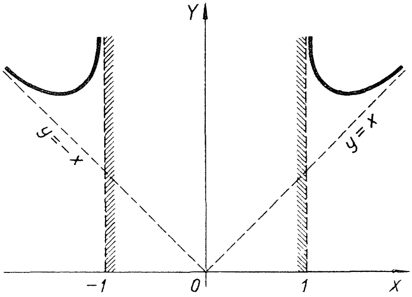
i

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-k_2x]=b_2,$$

tada je pravac $y=k_2x+b_2$ asimptota (*lijeva kosa* ili u slučaju $k_2=0$, *lijeva horizontalna asimptota*). Graf funkcije $y=f(x)$ (pretpostavljamo da je funkcija jednoznačna) ne može imati više od jedne desne (kose ili horizontalne) niti više od jedne lijeve (kose ili horizontalne) asimptote.

Primjer 1. Nađite asimptote krivulje

$$y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}.$$



Slika 32.

Rješenje. Ako nazivnik izjednačimo s nulom, dobivamo dvije vertikalne asimptote:

$$x=-1 \quad \text{i} \quad x=1.$$

Tražimo kose asimptote. Kada $x\to+\infty$ dobivamo:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}}=1,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=0,$$

pa je prema tome desna asimptota pravac $y=x$. Analogno za $x\to-\infty$ imamo:

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=-1,$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(y+x)=0.$$

Lijeva asimptota je dakle $y=-x$ (sl. 32). Razmatranje zadane krivulje s obzirom na asimptote pojednostavnjuje se ako uzmemo u obzir simetriju te krivulje.

Primjer 2. Nađimo asimptote krivulje

$$y=x+\ln x.$$

Rješenje. Budući da je

$$\lim_{x\to+0} y = -\infty,$$

to je pravac $x=0$ vertikalna asimptota (donja). Razmatrajmo krivulju samo s obzirom na kosu desnu asimptotu (budući da je $x>0$).

Imamo:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (y-x) = \lim_{x\to+\infty} \ln x = \infty.$$

Prema tome kose asimptote nema.

Ako je krivulja zadana parametarskim jednadžbama $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$, najprije istražujemo nema li takvih vrijednosti parametra t, pri kojima jedna od funkcija $\varphi(t)$ ili $\psi(t)$ teži k beskonačnosti, a druga ostaje konačna. Neka je $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=A$ i $\lim\limits_{t\to t_0}\psi(t)=B$. Ako je $A=\infty$ i $B\neq\infty$, tada krivulja ima horizontalnu asimptotu $y=B$; ako je $A\neq\infty$ i $B=\infty$, tada krivulja ima vertikalnu asimptotu $x=A$. Ako je $A=B=\infty$ i pri tome

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}=k;\quad \lim_{t\to t_0}[\psi(t)-k\varphi(t)]=b,$$

onda krivulja ima kosu asimptotu $y=kx+b$.

Ako je krivulja zadana polarnom jednadžbom $r=f(\varphi)$ onda možemo naći njene asimptote prema prijašnjem pravilu, pretvorivši jednadžbu krivulje u parametarski oblik pomoću formula: $x=r\cos\varphi=f(\varphi)\cos\varphi$; $y=r\sin\varphi=f(\varphi)\sin\varphi$.

Nađite asimptote ovih krivulja:

901. $y=\dfrac{1}{(x-2)^2}$.

902. $y=\dfrac{x}{x^2-4x+3}$.

903. $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$.

904. $y=\dfrac{x^3}{x^2+9}$.

905. $y=\sqrt{x^2-1}$.

906. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

907. $y=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$.

908. $y=x-2+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$.

909. $y=e^{-x^2}+2$.

910. $y=\dfrac{1}{1-e^x}$.

911. $y=e^{\frac{1}{x}}$.

912. $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

913. $y=\ln(1+x)$.

914. $x=t$; $y=t+2\,\mathrm{arctg}\,t$.

915. Nađite asimptotu hiperbolne spirale $r=\dfrac{a}{\varphi}$.

4. Konstrukcija grafova funkcija prema karakterističnim tačkama

Pri konstrukciji grafa funkcije treba prije svega naći područje definicije te funkcije i istražiti kako se funkcija ponaša u okolini granice njenog područja definicije. Korisno je također prethodno uočiti neke osobine funkcije (ako postoje), kao npr. simetrija, periodičnost, stalnost predznaka, monotonost i tome slično.

Nadalje je potrebno naći tačke prekinutosti, tačke ekstrema funkcije, tačke infleksije, asimptote itd. Nađeni elementi nam pomažu da uočimo opći karakter grafa funkcije i dobijemo njegovu matematički ispravnu skicu.

Primjer 1. Konstruirajmo graf funkcije

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$

Rješenje. a) Funkcija egzistira svagdje, osim u tačkama $x = \pm 1$.

Funkcija je neparna pa je prema tome graf funkcije simetričan s obzirom na tačku $O\,(0;0)$. Ova okolnost pojednostavnjuje konstruiranje grafa.

b) Tačke prekinutosti su $x = -1$ i $x = 1$, pri čemu je $\lim\limits_{x \to 1 \mp 0} y = \mp \infty$ i $\lim\limits_{x \to -1 \mp 0} y = \mp \infty$, pa su pravci $x = \pm 1$ vertikalne asimptote grafa.

c) Potražimo kose asimptote. Imamo:

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = 0,$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} y = \infty,$$

pa prema tome desne kose asimptote nema. Iz simetrije grafa slijedi da lijeve kose asimptote također nema.

d) Nađimo kritičke tačke prve i druge vrsti, tj. tačke u kojima se prva ili druga derivacija zadane funkcije poništava ili pak ne postoji.

Imamo:

$$y' = \frac{x^2 - 3}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}. \tag{1}$$

$$y'' = \frac{2x(9 - x^2)}{9\sqrt[3]{(x^2 - 1)^7}}. \tag{2}$$

Derivacije y' i y'' ne egzistiraju samo za $x = \pm 1$ tj. samo u onim tačkama gdje ne egzistira ni sama funkcija y, pa prema tome kritičke tačke će biti samo one u kojima se y' ili y'' poništava. Iz (1) i (2) slijedi

$$y' = 0 \quad \text{za} \quad x = \pm\sqrt{3}\,;$$

$$y'' = 0 \quad \text{za} \quad x = 0 \quad \text{i} \quad x = \pm 3.$$

Prema tome y' zadržava stalni predznak u svim intervalima $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \sqrt{3})$ i $(\sqrt{3}, +\infty)$, a y'' u svim intervalima $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ i $(3, +\infty)$.

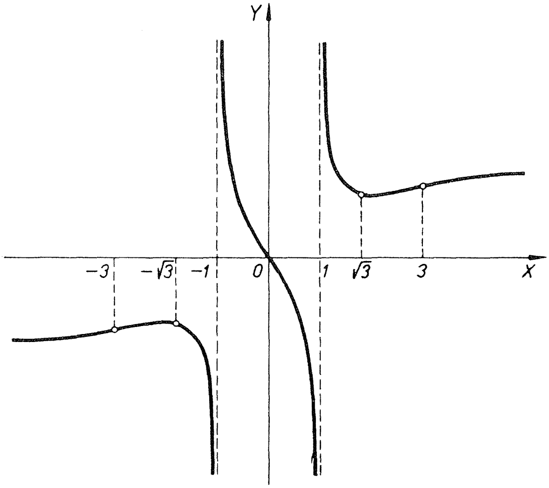
Da bismo ustanovili kakvi su predznaci y' (ili pak y'') u svakom od navedenih intervala, dovoljno je odrediti predznak y' (ili y'') u po volji odabranoj jednoj tački svakoga intervala.

Rezultate takva razmatranja zgodno je svrstati u tablicu (tablica I), izračunavši također i ordinate karakterističnih tačaka grafa funkcije. Primijetimo da je s obzirom na neparnost funkcije y dovoljno provesti račun samo za $x \geqslant 0$; lijeva polovica grafa konstruira se prema principu neparne simetrije.

Tablica I

x	0	(0, 1)	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3} \approx 1{,}73$	$(\sqrt{3}, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y	0	$-$	$\pm\infty$	$+$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \approx 1{,}37$	$+$	1,5	$+$
y'	$-$	$-$	ne egzistira	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''	0	$-$	ne egzistira	$+$	$+$	$+$	0	$-$
Derivacije	Tačka infleksije	Funkcija je silazna; graf je konkavan nadolje	Tačka prekinutosti	Funkcija je silazna; graf je konkavan nagore	Tačka minimuma	Funkcija je uzlazna; graf je konkavan nagore	Tačka infleksije	Funkcija je uzlazna; graf je konkavan nadolje

e) Koristeći se rezultatima razmatranja konstruiramo graf funkcije (sl. 33).



Slika 33.

Primjer 2. Konstruirajmo graf funkcije $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

Rješenje. a) Područje definicije funkcije je: $0 < x < +\infty$.

b) U području definicije tačaka prekinutosti nema, ali kad se približavamo graničnoj tački ($x = 0$) područja definicije, imamo:

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

Prema tome je pravac $x = 0$ (os ordinata) vertikalna asimptota.

c) Potražimo desnu kosu ili horizontalnu asimptotu (lijeve kose asimptote nema, jer je nemoguće da $x \to -\infty$):

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} y = 0.$$

Prema tome je desna horizontalna asimptota os apscisa: $y = 0$.

d) Nađimo kritičke tačke. Imamo:

$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

$$y'' = \frac{2 \ln x - 3}{x^3};$$

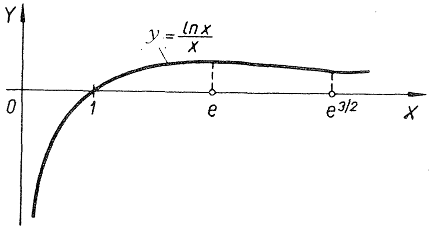
y' i y'' egzistiraju u svim tačkama područja definicije zadane funkcije pa je

$$y' = 0 \quad \text{za} \quad \ln x = 1, \quad \text{tj. za} \quad x = e;$$

$$y'' = 0 \quad \text{za} \quad \ln x = \frac{3}{2} \quad \text{tj. za} \quad x = e^{3/2}.$$

Sastavimo tablicu koja sadrži karakteristične tačke (tablica II). Pri tome osim nađenih karakterističnih tačaka korisno je naći također i sjecišta grafa s koordinatnim osima. Stavimo li $y = 0$, nalazimo da je $x = 1$ (sjecište krivulje s osi apscisa); os ordinata graf ne siječe.

e) Koristeći se rezultatima razmatranja konstruiramo graf funkcije (sl. 34).



Slika 34.

Tablica II

x	0	(0, 1)	1	(1, e)	$e \approx 2{,}72$	(e, $e^{\frac{3}{2}}$)	$e^{\frac{3}{2}} \approx 4{,}49$	($e^{\frac{3}{2}}$, $+\infty$)
y	$-\infty$	$-$	0	$+$	$\frac{1}{e} \approx 0{,}37$	$+$	$\frac{3}{2\sqrt{e^3}} \approx 0{,}33$	$+$
y'	ne egzistira	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	ne egzistira	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Derivacije	Granična tačka područja definicije funkcije. Vertikalna asimptota	Funkcija je uzlazna; graf je konkavan nadolje	Sjecište grafa s osi OX	Funkcija je uzlazna; graf je konkavan nadolje	Tačka maksimuma funkcije	Funkcija je silazna; graf je konkavan nadolje	Tačka infleksije	Funkcija je silazna; graf je konkavan nagore

Konstruirajte grafove niže navedenih funkcija, odredivši za svaku funkciju njeno područje definicije, tačke prekinutosti, tačke ekstrema, intervale uzlaznosti i silaznosti, tačke infleksije njenog grafa, smjer konkavnosti i asimptote grafa.

916. $y=x^3-3x^2.$

917. $y=\frac{6x^2-x^4}{9}.$

918. $y=(x-1)^2(x+2).$

919. $y=\frac{(x-2)^2(x+4)}{4}.$

920. $y=\frac{(x^2-5)^3}{125}.$

921. $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}.$

922. $y=\frac{x^4-3}{2}.$

923. $y=\frac{x^4+3}{x}.$

924. $y=x^2+\frac{2}{x}.$

925. $y=\frac{1}{x^2+3}.$

926. $y=\frac{8}{x^2-4}.$

927. $y=\frac{4x}{4+x^2}.$

928. $y=\frac{4x-12}{(x-2)^2}.$

929. $y=\frac{x}{x^2-4}.$

930. $y=\frac{16}{x^2(x-4)}.$

931. $y=\frac{3x^4+1}{x^3}.$

932. $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}.$

933. $y=\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x}.$

934. $y=x\sqrt{x+3}.$

935. $y=\sqrt{x^3-3x}.$

936. $y=\sqrt[3]{1-x^2}.$

937. $y=\sqrt[3]{1-x^3}.$

938. $y=2x+2-3\sqrt[3]{(x+1)^2}.$

939. $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}.$

940. $y=\sqrt[3]{(x+4)^2}-\sqrt[3]{(x-4)^2}.$

941. $y=\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{(x-4)^2}.$

942. $y=\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}.$

943. $y=\frac{8}{x\sqrt{x^2-4}}.$

944. $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$

945. $y=\frac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}.$

946. $y=xe^{-x}.$

947. $y=\left(a+\frac{x^2}{a}\right)e^{\frac{x}{a}}.$

948. $y=e^{8x-x^2-14}.$

949. $y=(2+x^2)e^{-x^2}.$

950. $y=2|x|-x^2.$

951. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$

952. $y = \frac{x^2}{2} \ln \frac{x}{a}$.

953. $y = \frac{x}{\ln x}$.

954. $y = (x+1) \ln^2 (x+1)$.

955. $y = \ln (x^2 - 1) + \frac{1}{x^2 - 1}$.

956. $y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$.

957. $y = \ln (1 + e^{-x})$.

958. $y = \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$.

959. $y = \sin x + \cos x$.

960. $y = \sin x + \frac{\sin 2x}{2}$.

961. $y = \cos x - \cos^2 x$.

962. $y = \sin^3 x + \cos^3 x$.

963. $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$.

964. $y = \frac{\sin x}{\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}$.

965. $y = \sin x \cdot \sin 2x$.

966. $y = \cos x \cdot \cos 2x$.

967. $y = x + \sin x$.

968. $y = \arcsin (1 - \sqrt[3]{x^2})$.

969. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

970. $y = 2x - \operatorname{tg} x$.

971. $y = x \operatorname{arctg} x$.

972. $y = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ za $x \neq 0$
i $y = 0$ za $x = 0$.

973. $y = x + 2 \operatorname{arctg} x$.

974. $y = \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x$.

975. $y = \ln \operatorname{sh} x$.

976. $y = \operatorname{Arch} \left(x + \frac{1}{x} \right)$.

977. $y = e^{\sin x}$.

978. $y = e^{\arcsin \sqrt{x}}$.

979. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.

980. $y = \ln \sin x$.

981. $y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$.

982. $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$.

983. $y = \cos x - \ln \cos x$.

984. $y = \operatorname{arctg} (\ln x)$.

985. $y = \arcsin \ln (x^2 + 1)$.

986. $y = x^x$.

987. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

Preporučamo također da konstruirate grafove funkcija iz zadataka br. 826—848.

Konstruirajte grafove funkcija koje su zadane parametarski:

988. $x = t^2 - 2t, \quad y = t^2 + 2t.$

989. $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin t \quad (a > 0).$

990. $x = te^t, \quad y = te^{-t}.$

991. $x = t + e^{-t}, \quad y = 2t + e^{-2t}.$

992. $x = a(\operatorname{sh} t - t), \quad y = a(\operatorname{ch} t - 1) \quad (a > 0).$

5. Diferencijal luka. Zakrivljenost

1°. Diferencijal luka. Diferencijal luka s ravninske glatke krivulje zadane jednadžbom u Descartesovim koordinatama x i y izražen je formulom

$$ds = \sqrt{(ds)^2 + (dy)^2};$$

pri tome, ako jednadžba krivulje ima oblik (sve funkcije su neprekinuto derivabilne):

a) $y = f(x)$, onda je $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ za $dx > 0$;

b) $x = f_1(y)$, onda je $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$ za $dy > 0$;

c) $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, onda je $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$ za $dt > 0$;

d) $F(x, y) = 0$, onda je $ds = \frac{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}}{|F_y'|}\, dx = \frac{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}}{|F_x'|}\, dy$.*)

Ako sa α označimo kut koji čini pozitivni smjer tangente (tj. smjer u smislu porasta promjenljivog luka krivulje s) s pozitivnim smjerom osi OX, dobivamo:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}.$$

U polarnim je koordinatama

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (r\, d\varphi)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi.$$

Ako s β označimo kut između polarnog radijusa tačke krivulje i tangente na krivulju u toj tački, imamo:

$$\cos\beta = \frac{dr}{ds}, \qquad \sin\beta = r\,\frac{d\varphi}{ds}.$$

---

*) Za definiciju parcijalnih derivacija F_x' i F_y' vidite gl. VI, **3**, 1°.

2°. Zakrivljenost krivulje. *Zakrivljenošću* K glatke krivulje u njenoj tački M nazivamo limes kvocijenta kuta između pozitivnih smjerova tangenata u tačkama M i N krivulje (kut *kontingencije*) i duljine luka $\overset{\smile}{MN} = \Delta s$, kada $N \to M$ (sl. 35), tj.

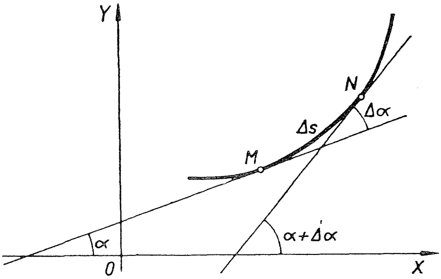
$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds},$$

gdje je α kut među pozitivnim smjerovima tangente u tački M i osi OX.

Polumjerom zakrivljenosti R nazivamo veličinu, recipročnu apsolutnoj veličini zakrivljenosti, tj.

$$R = \frac{1}{|K|}.$$

Linije jednake zakrivljenosti su kružnica ($K = \frac{1}{a}$, gdje je a polumjer kružnice) i pravac ($K = 0$).



Slika 35.

Formule za izračunavanje zakrivljenosti u pravokutnim koordinatama su ove (s tačnoću do predznaka; sve funkcije su dva puta derivabilne).

1) ako je krivulja zadana jednadžbom u eksplicitnom obliku $y = f(x)$, onda je

$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}};$$

2) ako je krivulja zadana jednadžbom u implicitnom obliku $F(x, y) = 0$, onda je

$$K = \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{(F'^2_x + F'^2_y)^{3/2}}; \; *)$$

3) ako je krivulja zadana jednadžbama u parametarskom obliku $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, onda je

$$K = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

gdje je

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad x'' = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

---

*) Za definiciju parcijalnih derivacija F''_{xx}, F''_{xy}, F''_{yy} vidite gl, **7,** 1°.

U polarnim koordinatama, kada je krivulja zadana jednadžbom $r=f(\varphi)$, imamo:

$$K=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{3/2}},$$

gdje je

$$r'=\frac{dr}{d\varphi} \quad \text{i} \quad r''=\frac{d^2r}{d\varphi^2}.$$

3°. Kružnica zakrivljenosti. *Kružnicom zakrivljenosti* krivulje u njenoj tački M nazivamo granični položaj kružnice, koja prolazi kroz tačku M i dvije druge tačke krivulje P i Q, kada $P \to M$ i $Q \to M$.

Polumjer kružnice zakrivljenosti jednak je polumjeru zakrivljenosti, a središte zakrivljenosti kružnice (*središte zakrivljenosti*) nalazi se na normali na krivulju u točki M na strani konkavnosti krivulje.

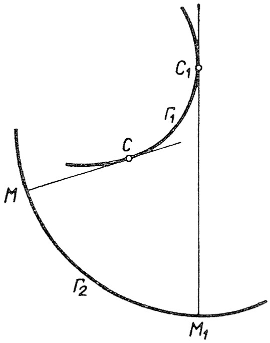
Koordinate X i Y središta zakrivljenosti krivulje računamo prema formulama

$$X=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \qquad Y=y+\frac{1+y'^2}{y''}.$$

Evolutom krivulje nazivamo geometrijsko mjesto njenih središta zakrivljenosti.

Ako u formulama za određivanje koordinata središta zakrivljenosti promatramo X i Y kao pomične koordinate tačke evolute, tada te formule daju parametarske jednadžbe evolute s parametrom x ili y (ili t, ako je krivulja zadana jednadžbama u parametarskom obliku).

Primjer 1. Nađimo jednadžbu evolute parabole $y=x^2$.



Slika 36.

Rješenje. $X=-4x^3$, $Y=\dfrac{1+6x^2}{2}$. Eliminiramo li parametar x, nalazimo jednadžbu evolute u eksplicitnom obliku $Y=\dfrac{1}{2}+3\left(\dfrac{X}{4}\right)^{2/3}$.

Evolventom (*involutom*) krivulje nazivamo takvu krivulju za koju je zadana krivulja evoluta.

Normala MC evolvente Γ_2 je tangenta na evolutu Γ_1; duljina luka $\breve{CC_1}$ evolute jednaka je odgovarajućem prirastu polumjera zakrivljenosti $\breve{CC_1}=|M_1C_1-MC|$, pa stoga evolventu Γ_2 dobivamo odmatanjem zategnute niti namotane na Γ_1 (sl. 36). Svakoj evoluti odgovara bezbroj evolventi koje odgovaraju raznim početnim duljinama niti.

4° **Tjemena krivulje.** *Tjemenom* krivulje nazivamo tačku krivulje u kojoj zakrivljenost ima maksimum ili minimum. Za određivanje tjemena krivulje postavimo izraz zakrivljenosti K i pronađemo njene tačke ekstrema. Umjesto zakrivljenosti K možemo uzeti polumjer zakrivljenosti $R = \frac{1}{|K|}$ i tražimo njegove tačke ekstrema, ako je račun u tom slučaju jednostavniji.

Primjer 2. Nađimo tjeme lančanice $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ $(a > 0)$.

Rješenje. Kako je $y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$, a $y'' = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, to je $K = \frac{1}{a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}}$ i prema tome $R = a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}$.

Imamo $\frac{dR}{dx} = \operatorname{sh} \frac{2x}{a}$. Izjednačimo li derivaciju $\frac{dR}{dx}$ s nulom, dobijemo $\operatorname{sh} \frac{2x}{a} = 0$, odakle nalazimo kritičku tačku $x = 0$. Izračunamo li drugu derivaciju $\frac{d^2R}{dx^2}$ i uvrstimo u nju vrijednost $x = 0$, dobivamo $\left.\frac{d^2R}{dx^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{2}{a} \operatorname{ch} \frac{2x}{a}\right|_{x=0} = \frac{2}{a} > 0$. Prema tome je $x = 0$ tačka minimuma polumjera zakrivljenosti (ili maksimuma zakrivljenosti) lančanice. Prema tome je tjeme lančanice $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ tačka A $(0, a)$.

Nađite diferencijal luka, a također kosinus i sinus kuta, koji zatvara s pozitivnim smjerom osi OX tangenta, i to za svaku od ovih krivulja (parametri su pozitivni):

993. $x^2 + y^2 = a^2$ (*kružnica*).

994. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (*elipsa*).

995. $y^2 = 2px$ (*parabola*).

996. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (*astroida*).

997. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ (*lančanica*).

998. $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ (*cikloida*).

999. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ (*astroida*).

Nađite diferencijal luka, a također kosinus ili sinus kuta, koji zatvara polarni radijus i tangenta za svaku od ovih krivulja (parametri su pozitivni):

1000. $r = a\varphi$ (*Arhimedova spirala*).

1001. $r = \frac{a}{\varphi}$ (*hiperbolna spirala*).

1002. $r = a \sec^2 \frac{\varphi}{2}$ (*parabola*).

1003. $r = \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ (*kardioida*).

1004. $r = a^{\varphi}$ (*logaritamska spirala*).

1005. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (*lemniskata*).

Izračunajte zakrivljenost zadanih krivulja u označenim tačkama:

1006. $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$ u ishodištu.

1007. $x^2 + xy + y^2 = 3$ u tački $(1; 1)$.

1008. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ u tjemenima $A(a, 0)$ i $B(0, b)$.

1009. $x = t^2$, $y = t^3$ u tački $(1; 1)$.

1010. $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ u tjemenima s polarnim kutovima $\varphi = 0$ i $\varphi = \pi$.

1011. U kojoj tački parabole $y^2 = 8x$ zakrivljenost iznosi 0,128?

1012. Nađite tjeme krivulje $y = e^x$.

Izračunajte polumjere zakrivljenosti (u po volji odabranoj tački) zadanih krivulja:

1013. $y = x^3$ (*kubna parabola*).

1014. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (*elipsa*). **1015.** $x = \frac{y^2}{4} - \frac{\ln y}{2}$.

1016. $x = a \cos^3 t$; $y = a \sin^3 t$ (*astroida*).

1017. $x = a(\cos t + t \sin t)$; $y = a(\sin t - t \cos t)$ (*evolventa kružnice*).

1018. $r = ae^{k\varphi}$ (*logaritamska spirala*).

1019. $r = a(1 + \cos\varphi)$ (*kardioida*).

1020. Nađite najmanju vrijednost polumjera zakrivljenosti parabole $y^2 = 2px$.

1021. Dokažite, da je polumjer zakrivljenosti lančanice $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ jednak duljini odsječka normale.

Izračunajte koordinate središta zakrivljenosti zadanih krivulja u navedenim tačkama:

1022. $xy = 1$ u tački $(1; 1)$. **1023.** $ay^2 = x^3$ u tački (a, a).

Napišite jednadžbe kružnica zakrivljenosti zadanih krivulja u naznačenim tačkama:

1024. $y = x^2 - 6x + 10$ u tački $(3; 1)$. **1025.** $y = e^x$ u tački $(0; 1)$.

Nađite evolute krivulja:

1026. $y^2 = 2px$ (*parabola*).

1027. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (*elipsa* $0 < b < a$).

1028. Dokažite da je evoluta cikloide

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t)$$

pomaknuta cikloida.

1029. Dokažite da je evoluta logaritamske spirale

$$r = ae^{k\varphi}$$

također logaritamska spirala s istim polom.

1030. Pokažite da je krivulja (*evolventa kružnice*)

$$x = a(\cos t + t \sin t); \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

evolventa kružnice $x = a \cos t$; $y = a \sin t$.

GLAVA IV

NEODREĐENI INTEGRAL

1. Neposredno integriranje

1°. Osnovna pravila integriranja.

1) Ako je $F'(x) = f(x)$ onda je $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$,

gdje je C po volji odaberiva konstanta.

2) $\int Af(x)\,\mathrm{d}x = A\int f(x)\,\mathrm{d}x$, gdje je A konstanta $(A \neq 0)$.

3) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x \pm \int f_2(x)\,\mathrm{d}x.$

4) Ako je $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ i $u = \varphi(x)$ — derivabilna, onda je

$$\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C.$$

Poseban slučaj je $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad (a \neq 0).$

2. Tablica jednostavnijih integrala.

$$\text{I.} \quad \int x^n\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$$

$$\text{II.} \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C.$$

$$\text{III.} \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C_1 \quad (a \neq 0).$$

$$\text{IV.} \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a \neq 0).$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a \neq 0).$$

$$\text{V.} \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C \quad (a \neq 0).$$

VI. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C_1 \quad (a>0).$

VII. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a>0); \qquad \int e^x dx = e^x + C.$

VIII. $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

IX. $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

X. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

XI. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

XII. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x| + C.$

XIII. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C.$

XIV. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$

XV. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$

XVI. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

XVII. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Primjer 1. $\int (ax^2 + bx + c)\, dx = \int ax^2 dx + \int bx\, dx + \int c\, dx =$

$$= a\int x^2 dx + b\int x\, dx + c\int dx = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx + C.$$

Primjenom osnovnih pravila 1), 2), 3) i formula za integriranje izračunajte ove integrale:

1031. $\int 5a^2x^6 dx.$

1032. $\int (6x^2+8x+3)\, dx.$

1033. $\int x(x+a)(x+b)\, dx.$

1034. $\int (a+bx^3)^2\, dx.$

1035. $\int \sqrt{2px}\, dx.$

1036. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}.$

1037. $\displaystyle\int (nx)^{\frac{1-n}{n}}\, dx.$

1038. $\displaystyle\int (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3\, dx.$

1039. $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,\mathrm{d}x.$

1040. $\int\frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x.$

1041. $\int\frac{(x^m-x^n)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

1042. $\int\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}}\,\mathrm{d}x.$

1043. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+7}.$

1044. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-10}.$

1045. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4+x^2}}.$

1046. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8-x^2}}.$

1047. $\int\frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,\mathrm{d}x.$

1048*. a) $\int\mathrm{tg}^2x\,\mathrm{d}x;$ b) $\int\mathrm{th}^2x\,\mathrm{d}x.$

1049. a) $\int\mathrm{ctg}^2x\,\mathrm{d}x;$ b) $\int\mathrm{cth}^2x\,\mathrm{d}x.$

1050. $\int 3^xe^x\mathrm{d}x$

3°. Integriranje unošenjem pod znak diferencijala. Pravilo 4) znatno proširuje tablicu jednostavnijih integrala. Naime, na osnovu toga pravila tablica integrala primjenljiva je neovisno o tome da li je varijabla integriranja nezavisna varijabla ili derivabilna funkcija.

Primjer 2.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5x-2}}=\frac{1}{5}\int(5x-2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(5x-2)=$$

$$=\frac{1}{5}\int u^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{5}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{1}{5}\,\frac{(5x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{5}\sqrt{5x-2}+C,$$

gdje smo stavili $u=5x-2$. Poslužili smo se pravilom 4) i integralom iz tablice I.

Primjer 3.

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2)}{\sqrt{1+(x^2)^2}}=\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{1+x^4})+C.$$

Šutke smo podrazumijevali da je $u=x^2$, pri čemu smo primijenili pravilo 4) i integral V iz tablice.

Primjer 4.

$$\int x^2e^{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int e^{x^3}\,\mathrm{d}(x^3)=\frac{1}{3}e^{x^3}+C$$

na osnovu pravila 4) i integrala VII.

U primjerima 2, 3, 4 prije primjene bilo kog integrala iz tablice prethodno smo doveli zadani integral u oblik

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=\int f(u)\,\mathrm{d}u,\quad\text{gdje je}\quad u=\varphi(x).$$

Takvu pretvorbu nazivamo unošenjem *pod znak diferencijala.*

Korisno je da spomenemo često primjenjivane transformacije diferencijala, koje su napose upotrijebljene u primjerima 2 i 3:

$$\text{a) }\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)\quad(a\neq0);\quad\text{b) }x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)\text{ itd.}$$

Primjenom osnovnih pravila i formula za integriranje, izračunajte ove integrale:

1051.** $\int \frac{a\,\mathrm{d}x}{a-x}$.

1052.** $\int \frac{2x+3}{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

1053. $\int \frac{1-3x}{3+2x}\,\mathrm{d}x$.

1054. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{a+bx}$.

1055. $\int \frac{ax+b}{\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x$.

1056. $\int \frac{x^2+1}{x-1}\,\mathrm{d}x$.

1057. $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}\,\mathrm{d}x$.

1058. $\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}\,\mathrm{d}x$.

1059. $\int \left(a+\frac{b}{x-a}\right)^2 \mathrm{d}x$.

1060*. $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

1061. $\int \frac{b\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y}}$.

1062. $\int \sqrt{a-bx}\,\mathrm{d}x$.

1063.** $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

1064. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

1065. $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+5}$.

1066. $\int \frac{\mathrm{d}x}{7x^2-8}$.

1067. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+b)-(a-b)x^2}$ $(0<b<a)$.

1068. $\int \frac{x^2}{x^2+2}\,\mathrm{d}x$.

1069. $\int \frac{x^3}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1070. $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

1071. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{7+8x^2}}$.

1072. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{7-5x^2}}$.

1073. $\int \frac{2x-5}{3x^2-2}\,\mathrm{d}x$.

1074. $\int \frac{3-2x}{5x^2+7}\,\mathrm{d}x$.

1075. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

1076. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x$.

1077. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2-5}$.

1078. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{2x^2+3}$.

1079. $\int \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}\,\mathrm{d}x$ $(a>0)$.

1080. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^4-x^4}}$ $(a>0)$.

1081. $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,\mathrm{d}x.$

1082. $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^6-1}}.$

1083. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

1084. $\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{4+x^2}\,\mathrm{d}x.$

1085. $\int \frac{x-\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x\cdot$

1086. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}}.$

1087. $\int ae^{-mx}\,\mathrm{d}x.$

1088. $\int 4^{2-3x}\,\mathrm{d}x.$

1089. $\int (e^t-e^{-t})\,\mathrm{d}t.$

1090. $\int (e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})^2\,\mathrm{d}x.$

1091. $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^xb^x}\,\mathrm{d}x.$

1092. $\int \frac{a^{2x}-1}{\sqrt{a^x}}\,\mathrm{d}x.$

1093. $\int e^{-(x^2+1)}\,x\,\mathrm{d}x.$

1094. $\int x\cdot 7^{x^2}\,\mathrm{d}x.$

1095. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

1096. $\int 5^{\sqrt{x}}\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}.$

1097. $\int \frac{e^x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x.$

1098. $\int e^x\sqrt{a-be^x}\,\mathrm{d}x.$

1099. $\int (e^{\frac{x}{a}}+1)^{\frac{1}{3}}\,e^{\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x.$

1100*. $\int \frac{\mathrm{d}x}{2^x+3}.$

1101. $\int \frac{a^x\mathrm{d}x}{1+a^{2x}}.$

1102. $\int \frac{e^{-bx}}{1-e^{-2bx}}\,\mathrm{d}x.$

1103. $\int \frac{e^t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-e^{2t}}}.$

1104. $\int \sin(a+bx)\,\mathrm{d}x.$

1105. $\int \cos\frac{x}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x.$

1106. $\int (\cos ax+\sin ax)^2\,\mathrm{d}x.$

1107. $\int \cos\sqrt{x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}.$

1108. $\int \sin(\lg x)\,\frac{\mathrm{d}x}{x}.$

1109*. $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x.$

1110*. $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x.$

1111. $\int \sec^2(ax+b)\,\mathrm{d}x.$

1112. $\int \operatorname{ctg}^2 ax\,\mathrm{d}x.$

1113. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin\frac{x}{a}}.$

1114. $\int \frac{dx}{3\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)}$.

1115. $\int \frac{dx}{\sin(ax+b)}$.

1116. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}$.

1117. $\int x\sin(1-x^2)\,dx$.

1118. $\int \left(\frac{1}{\sin x\sqrt{2}}-1\right)^2 dx$.

1119. $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

1120. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$.

1121. $\int \operatorname{ctg}\frac{x}{a-b}\,dx$.

1122. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}\frac{x}{5}}$.

1123. $\int \operatorname{tg}\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

1124. $\int x\operatorname{ctg}(x^2+1)\,dx$.

1125. $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$.

1126. $\int \cos\frac{x}{a}\sin\frac{x}{a}\,dx$.

1127. $\int \sin^3 6x\cos 6x\,dx$.

1128. $\int \frac{\cos ax}{\sin^5 ax}\,dx$.

1129. $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}\,dx$.

1130. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}}\,dx$.

1131. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\sin 2x\,dx$.

1132. $\int \operatorname{tg}^3\frac{x}{3}\sec^2\frac{x}{3}\,dx$.

1133. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$.

1134. $\int \frac{\operatorname{ctg}^{\frac{2}{3}} x}{\sin^2 x}\,dx$.

1135. $\int \frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x}\,dx$.

1136. $\int \frac{(\cos ax+\sin ax)^2}{\sin ax}\,dx$.

1137. $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 3x}{b-a\operatorname{ctg} 3x}\,dx$.

1138. $\int (2\operatorname{sh} 5x-3\operatorname{ch} 5x)\,dx$.

1139. $\int \operatorname{sh}^2 x\,dx$.

1140. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$.

1141. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$.

1142. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x}$.

1143. $\int \operatorname{th} x\,dx$.

1144. $\int \operatorname{cth} x\,dx$.

Izračunajte neodređene integrale:

1145. $\int x\sqrt[5]{5-x^2}\,\mathrm{d}x.$

1146. $\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1}\,\mathrm{d}x.$

1147. $\int \frac{x^3}{x^8+5}\,\mathrm{d}x.$

1148. $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$

1149. $\int \frac{3-\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2}\,\mathrm{d}x.$

1150. $\int \frac{x^3-1}{x+1}\,\mathrm{d}x.$

1151. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x}}.$

1152. $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}\,\mathrm{d}x.$

1153. $\int \frac{\operatorname{tg} 3x-\operatorname{ctg} 3x}{\sin 3x}\,\mathrm{d}x.$

1154. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}.$

1155. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x-2}}\,\mathrm{d}x.$

1156. $\int \left(2+\frac{x}{2x^2+1}\right)\frac{\mathrm{d}x}{2x^2+1}.$

1157. $\int a^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x.$

1158. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,\mathrm{d}x.$

1159. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}.$

1160. $\int \operatorname{tg}^2 ax\,\mathrm{d}x.$

1161. $\int \sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x.$

1162. $\int \frac{\sec^2 x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2 x}}.$

1163. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos\frac{x}{a}}.$

1164. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x.$

1165. $\int \operatorname{tg}\sqrt{x-1}\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}.$

1166. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sin(x^2)}.$

1167. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}+x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

1168. $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x.$

1169. $\int \frac{\left(1-\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\,\mathrm{d}x.$

1170. $\int \frac{x^2}{x^2-2}\,\mathrm{d}x.$

1171. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$

1172. $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,\mathrm{d}x.$

1173. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}}\,\mathrm{d}x.$

1174. $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}.$

1175. $\displaystyle\int\frac{dx}{(a+b)+(a-b)x^2}$ $(0<b<a)$.

1176. $\displaystyle\int\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2}}\,dx$.

1177. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin ax\cos ax}$.

1178. $\displaystyle\int\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right)dt$.

1179. $\displaystyle\int\frac{dx}{x(4-\ln^2 x)}$.

1180. $\displaystyle\int\frac{\arccos\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

1181. $\displaystyle\int e^{-\operatorname{tg}x}\sec^2 x\,dx$.

1182. $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}}\,dx$.

1183. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

1184. $\displaystyle\int\frac{\arcsin x+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1185. $\displaystyle\int\frac{\sec x\operatorname{tg}x}{\sqrt{\sec^2 x+1}}\,dx$.

1186. $\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{4+\cos^2 2x}\,dx$.

1187.* $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

1188. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{1+x^2}}\,dx$.

1189. $\displaystyle\int x^2\operatorname{ch}(x^3+3)\,dx$.

1190. $\displaystyle\int\frac{3^{\operatorname{th}x}}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx$.

2. Metoda supstitucije

1°. Zamjena varijable u neodređenom integralu. Uzmimo da je

$$x=\varphi(t),$$

gdje je t nova varijabla i φ neprekinuto derivabilna funkcija ($\varphi'(t)\neq 0$), pa dobivamo

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Funkciju φ nastojimo odabrati tako, da desna strana formule (1) dobije oblik pogodniji za integriranje.

Primjer 1. Izračunajmo

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx.$$

Rješenje. Prirodno je da uzmemo $t=\sqrt{x-1}$, odakle će biti $x=t^2+1$ i $dx=2t\,dt$. Zbog toga je

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx=\int(t^2+1)\,t\cdot 2t\,dt=2\int(t^4+t^2)\,dt=$$

$$=\frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+C=\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Ponekad primjenjujemo spustituciju oblika

$$u=\varphi(x).$$

Pretpostavimo da smo podintegralni izraz $f(x)\,dx$ uspjeli transformirati u oblik:

$$f(x)\,dx = g(u)\,du, \text{ gdje je } u = \varphi(x).$$

Ako nam je $\int g(u)\,du$ poznat, tj.

$$\int g(u)\,du = F(u) + C,$$

onda je

$$\int f(x)\,dx = F[\varphi(x)] + C.$$

Taj način smo zapravo već i primijenili u 1, 3°.

Primjere 2, 3, 4 (1) mogli smo riješiti i ovako:

Primjer 2. $u = 5x - 2$; $du = 5dx$; $dx = \frac{1}{5}du$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{5}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C.$$

Primjer 3. $u = x^2$; $du = 2x\,dx$; $x\,dx = \frac{du}{2}$.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{2}\ln(u + \sqrt{1+u^2}) + C = \frac{1}{2}\ln(x^2 + \sqrt{1+x^4}) + C.$$

Primjer 4. $u = x^3$; $du = 3x^2\,dx$; $x^2\,dx = \frac{du}{3}$.

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^u\,du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

2°. Trigonometrijske supstitucije. Neka je $a > 0$

1) Ako integral sadrži radikal $\sqrt{a^2-x^2}$, onda obično stavljamo $x = a\sin t$; odatle dobivamo:

$$\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t.$$

2) Ako integral sadrži radikal $\sqrt{x^2-a^2}$, stavljamo $x = a\sec t$; odatle dobivamo

$$\sqrt{x^2-a^2} = a\,\mathrm{tg}\,t.$$

3) Ako integral sadrži radikal $\sqrt{x^2+a^2}$, stavljamo $x = a\,\mathrm{tg}\,t$; odatle slijedi

$$\sqrt{x^2+a^2} = a\sec t.$$

Napomenimo da trigonometrijske supstitucije nisu uvijek pogodne.

Ponekad je umjesto trigonometrijskih supstitucija povoljnije upotrijebiti *hiperbolne supstitucije* koje su analogne (vidi primjer 1209).

O trigonometrijskim i hiperbolnim supstitucijama detaljnije vidite u 9.

Primjer 5. Nađimo

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx.$$

Rješenje. Stavimo $x = \mathrm{tg}\,t$. Prema tome je $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$.

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1}}{\operatorname{tg}^2 t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int \frac{\sec t\cos^2 t}{\sin^2 t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t\cos t} = \int \frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin^2 t\cdot\cos t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} + \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \ln|\operatorname{tg} t + \sec t| - \frac{1}{\sin t} + C = \ln|\operatorname{tg} t + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}| -$$

$$- \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}{\operatorname{tg} t} + C = \ln|x+\sqrt{x^2+1}| - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C.$$

1191. Primjenom navedenih supstitucija izračunajte integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-2}}, \qquad x = \frac{1}{t};$

b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}, \qquad x = -\ln t;$

c) $\displaystyle\int x(5x^2-3)^7\,\mathrm{d}x, \qquad 5x^2-3 = t;$

d) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}, \qquad t = \sqrt{x+1};$

e) $\displaystyle\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}, \qquad t = \sin x.$

Primjenom pogodnih supstitucija izračunajte integrale:

1192. $\displaystyle\int x(2x+5)^{10}\,\mathrm{d}x.$

1193. $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

1194. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x+1}}.$

1195. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x-1}}.$

1196. $\displaystyle\int \frac{\ln 2x\,\mathrm{d}x}{\ln 4x\,x}.$

1197. $\displaystyle\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

1198. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,\mathrm{d}x.$

1199. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x.$

1200*. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}.$

Primjenom trigonometrijskih supstitucija izračunajte integrale:

1201. $\displaystyle\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$

1202. $\displaystyle\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2-x^2}}.$

1203. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,\mathrm{d}x.$

1204*. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}.$

1205. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,\mathrm{d}x.$

1206*. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{4-x^2}}.$

1207. $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$

1208. Izračunajte integral

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$$

pomoću supstitucije $x = \sin^2 t$.

1209. Nađite

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

primjenom hiperbolne supstitucije $x = a\,\mathrm{sh}\,t$.

Rješenje. Imamo $\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2\,\mathrm{sh}^2\,t} = a\,\mathrm{ch}\,t$ i $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t$.

Odatle je

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \int a\,\mathrm{ch}\,t \cdot a\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t =$$

$$= a^2 \int \mathrm{ch}^2\,t\,\mathrm{d}t = a^2 \int \frac{\mathrm{ch}\,2t+1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,2t + t\right) + \mathrm{C} =$$

$$= \frac{a^2}{2}(\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t + t) + \mathrm{C}.$$

Budući da je

$$\mathrm{sh}\,t = \frac{x}{a}, \quad \mathrm{ch}\,t = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$$

i

$$e^t = \mathrm{ch}\,t + \mathrm{sh}\,t = \frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a},$$

to konačno dobivamo:

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + \mathrm{C}_1,$$

gde je $\mathrm{C}_1 = \mathrm{C} - \frac{a^2}{2}\ln a$ nova po volji odaberiva konstanta.

1210. Nađite

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

stavivši $x = a\,\mathrm{ch}\,t$.

3. Parcijalna integracija

Formula parcijalne integracije. Ako su $u = \varphi(x)$ i $v = \psi(x)$ neprekinuto derivabilne funkcije, onda je

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u.$$

Primjer 1. Nađimo

$$\int x \ln x\,\mathrm{d}x.$$

Stavimo $u = \ln x$; $\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$, pa imamo $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$; $v = \frac{x^2}{2}$. Odatle je

$$\int x \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Ponekad provodimo parcijalnu integraciju po nekoliko puta, da zadani integral dobije oblik integrala iz tablice. U nekim slučajevima parcijalnim integriranjem dobivamo jednadžbu iz koje se traženi integral može odrediti.

Primjer 2. Izračunajmo

$$\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x.$$

Imamo $\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x = \int e^x\,\mathrm{d}(\sin x) = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x =$

$$= e^x \sin x + \int e^x\,\mathrm{d}(\cos x) = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,\mathrm{d}x.$$

Zbog toga je

$$\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,\mathrm{d}x,$$

odakle slijedi

$$\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$$

Primjenom formule za parcijalnu integraciju izračunajte integrale:

1211. $\int \ln x\,\mathrm{d}x.$

1212. $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x.$

1213. $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x.$

1214. $\int x \sin x\,\mathrm{d}x.$

1215. $\int x \cos 3x\,\mathrm{d}x.$

1216. $\int \frac{x}{e^x}\mathrm{d}x.$

1217. $\int x \cdot 2^{-x}\,\mathrm{d}x.$

1218.** $\int x^2 e^{3x}\,\mathrm{d}x.$

1219*. $\int (x^2 - 2x + 5)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x.$

1220*. $\int x^3 e^{-\frac{x}{3}}\,\mathrm{d}x.$

1221. $\int x \sin x \cos x\,\mathrm{d}x.$

1222*. $\int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x\,\mathrm{d}x.$

1223. $\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x.$

1224. $\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x.$

1225. $\int \frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x.$

1226. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

1227. $\int x \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x.$

1228. $\int x \arcsin x\,\mathrm{d}x.$

1229. $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2})\,\mathrm{d}x.$

1230. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x}.$

1231. $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}\,dx.$

1232. $\int e^x \sin x\,dx.$

1233. $\int 3^x \cos x\,dx.$

1234. $\int e^{ax} \sin bx\,dx.$

1235. $\int \sin(\ln x)\,dx.$

Primjenom raznih metoda izračunajte integrale:

1236. $\int x^3 e^{-x^2}\,dx.$

1237. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$

1238. $\int (x^2-2x+3)\ln x\,dx.$

1239. $\int x\ln\frac{1-x}{1+x}\,dx.$

1240. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx.$

1241. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx.$

1242. $\int x^2 \operatorname{arctg} 3x\,dx.$

1243. $\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx.$

1244. $\int (\arcsin x)^2\,dx.$

1245. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx.$

1246. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx.$

1247. $\int x \operatorname{tg}^2 2x\,dx.$

1248. $\int \frac{\sin^2 x}{e^x}\,dx.$

1249. $\int \cos^2(\ln x)\,dx.$

1250**. $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx.$

1251*. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}.$

1252*.* $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

1253*. $\int \sqrt{A+x^2}\,dx.$

1254*. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

4. Jednostavniji integrali s kvadratnim trinomom

1°. Integral oblika

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Osnovni način računanja je svođenje kvadratnog trinoma na ovaj oblik:

$$ax^2+bx+c = a(x+k)^2+l, \tag{1}$$

gdje su k i l konstante. Za provedbu transformacije (1) najprikladnije je iz kvadratnog trinoma odijeliti puni kvadrat. Možemo se poslužiti i supstitucijom

$$2ax+b = t.$$

Ako je $m = 0$ onda svođenjem kvadratnog trinoma na oblik (1) dobivamo integral III ili IV (vidi 1, 2°, na str. 105 tablicu jednostavnijih integrala).

Primjer 1.

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 5x + 7} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{4} x + \frac{25}{16}\right) + \left(\frac{7}{2} - \frac{25}{16}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x - \frac{5}{4}\right)}{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{\sqrt{31}}{4}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{31}}{4}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{4x - 5}{\sqrt{31}} + C.$$

Ako je $m \neq 0$, onda iz brojnika odvojimo derivaciju $2ax + b$ kvadratnog trinoma

$$\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\frac{m}{2a} (2ax + b) + \left(n - \frac{mb}{2a}\right)}{ax^2 + bx + c} dx =$$

$$= \frac{m}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \left(n - \frac{mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c},$$

i na taj način dolazimo na prije razmotreni integral.

Primjer 2.

$$\int \frac{x - 1}{x^2 - x - 1} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x - 1) - \frac{1}{2}}{x^2 - x - 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - x - 1| -$$

$$- \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}} = \frac{1}{2} \ln |x^2 - x - 1| - \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2x - 1 - \sqrt{5}}{2x - 1 + \sqrt{5}} \right| + C.$$

2°. Integrali oblika

$$\int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

Metode računanja analogne su ranije razmotrenim metodama. Na kraju se integral svodi na integral V, kada je $a > 0$ i na VI, kada je $a < 0$.

Primjer 3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16} - \left(x - \frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x - 3}{5} + C.$$

Primjer 4.

$$\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x-2}}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx+2\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=$$

$$=\sqrt{x^2+2x+2}+2\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C.$$

3° Integrali oblika

$$\int\frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Pomoću racionalno razlomljene supstitucije

$$\frac{1}{mx+n}=t$$

ove integrale svodimo na integrale oblika 2°.

Primjer 5. Nađimo

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Rješenje. Stavimo

$$x+1=\frac{1}{t},$$

odakle je

$$dx=-\frac{dt}{t^2}.$$

Imamo:

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-2t+2t^2}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+\frac{1}{2}}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1}\right|+C$$

4°. Integrali oblika

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Odvajanjem punog kvadrata iz kvadratnog trinoma dani integral svodimo na jedan od ova dva osnovna integrala (vidi br. 1252 i 1253):

1) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C,\qquad(a>0);$

2) $\int\sqrt{x^2+A}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+A}+\frac{A}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+A}|+C.$

Primjer 6.

$$\int\sqrt{1-2x-x^2}\,dx-\int\sqrt{2-(1+x)^2}\;d(1+x)=\frac{1+x}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+\arcsin\frac{1+x}{\sqrt{2}}+C.$$

Izračunajte integrale:

1255. $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}.$

1256. $\int\frac{dx}{x^2+2x}.$

1257. $\int\frac{dx}{3x^2-x+1}.$

1258. $\int\frac{x\,dx}{x^2-7x+13}.$

1259. $\int\frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx.$

1260. $\int\frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}dx.$

1261. $\int\frac{x^2\,dx}{x^2-6x+10}.$

1262. $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$

1263. $\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$

1264. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}.$

1265. $\int\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx.$

1266. $\int\frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx.$

1267. $\int\frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}}dx.$

1268. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$

1269. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+-1}}.$

1270. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}.$

1271. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}.$

1272. $\int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx.$

1273. $\int\sqrt{x-x^2}\,dx.$

1274. $\int\sqrt{2-x-x^2}\,dx.$

1275. $\int\frac{x\,dx}{x^4-4x^2+3}.$

1276. $\int\frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+12}dx.$

1277. $\int\frac{e^x\,dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}.$

1278. $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}}.$

1279. $\int\frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}.$

5. Integriranje racionalnih funkcija

1°. Metoda neodređenih koeficijenata. Integriranje racionalne funkcije nakon odvajanja cijelog dijela svodimo na integriranje pravog racionalnog razlomka

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

gdje su $P(x)$ i $Q(x)$ cijeli polinomi, pri čemu je stupanj brojnika $P(x)$ niži od stupnja nazivnika $Q(x)$. Ako je

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha} \dots (x-l)^{\lambda},$$

gdje su $a, \dots, l$ različiti realni korijeni polinoma $Q(x)$, a $\alpha, \dots, \lambda$ prirodni brojevi (višestrukosti korijena) onda je provedivo rastavljanje razlomka (1) na parcijalne razlomke:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + \dots$$

$$\dots + \frac{L_1}{x-l} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + \dots + \frac{L_{\lambda}}{(x-l)^{\lambda}}. \tag{2}$$

Za izračunavanje neodređenih koeficijenata $A_1, A_2, \dots, L_{\lambda}$ svodimo obje strane identiteta (2) na cijeli oblik, a zatim izjednačujemo koeficijente s istim stupnjem varijable x (*prvi način*). Možemo također te koeficijente odrediti tako da u jednadžbu (2) ili njoj ekvivalentnu uvrstimo za x prikladno odabrane brojeve (*drugi način*).

Primjer 1. Izračunajmo

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)^2} = I.$$

Rješenje: Imamo

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

Odakle je

$$x \equiv A(x+1)^2 + B_1(x-1)(x+1) + B_2(x-1). \tag{3}$$

a) *Prvi način određivanja koeficijenata.* Napišemo identitet (3) u obliku

$$x \equiv (A+B_1)x^2 + (2A+B_2)x + (A-B_1-B_2).$$

Izjednačivši koeficijente uz iste potencije od x, dobivamo:

$$0 = A + B_1; \quad 1 = 2A + B_2; \quad 0 = A - B_1 - B_2.$$

odakle je

$$A = \frac{1}{4}; \quad B_1 = -\frac{1}{4}; \quad B_2 = \frac{1}{2}.$$

b) *Drugi način određivanja koeficijenata.* Uvrstimo $x = 1$ u identitet (3), pa imamo:

$$1 = A \cdot 4, \quad \text{tj.} \quad A = \frac{1}{4}.$$

Uvrstimo li $x = -1$, dobivamo:

$$-1 = -B_2 \cdot 2 \quad \text{tj.} \quad B_2 = \frac{1}{2}.$$

Dalje, uvrstimo $x=0$ i dobivamo:

$$0=A-B_1-B_2.$$

tj. $B_1=A-B_2=-\frac{1}{4}$.

Prema tome je

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2(x+1)}+C=-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

Primjer 2. Izračunajmo

$$\int\frac{dx}{x^3-2x^2+x}=I.$$

Rješenje. Imamo:

$$\frac{1}{x^3-2x^2+x}=\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

i

$$1=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx. \tag{4}$$

Prilikom rješavanja ovog primjera preporučljiva je primjena kombinacije obaju načina određivanja koeficijenata. Primjenom drugog načina uvrstimo $x=0$ u identitet (4); dobijemo $1=A$. Zatim uvrstimo $x=1$ pa dobijemo $1=C$. Zatim primjenjujemo prvi način, pa u identitetu (4) izjednačimo koeficijente uz x^2. Imat ćemo:

$$0=A+B, \quad \text{tj.} \quad B=-1.$$

Prema tome je

$$A=1, \quad B=-1 \quad \text{i} \quad C=1.$$

Slijedi da je

$$I=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C.$$

Ako polinom $Q(x)$ ima kompleksne k-struke korijene $a\pm ib$, gdje je i imaginarna jedinica, onda se u razvoju (2) pojavljuju parcijalni razlomci oblika

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\ldots+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}, \tag{5}$$

gdje je

$$x^2+px+q=[x-(a+ib)][x-(a-ib)],$$

a M_1, $N_1, \ldots, M_k$, N_k su neodređeni koeficijenti, koje određujemo na prije opisani način. Kada je $k=1$ razlomak (5) integriramo neposredno; kada je $k>1$ primjenjujemo *metodu snižavanja* pri čemu prethodno moramo kvadratni trinom x^2+px+q napisati u obliku

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$$

i upotrijebiti supstituciju $x+\frac{p}{2}=z$.

Primjer 3. Nađimo

$$\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2} \mathrm{d}x = I.$$

Rješenje. Kako je

$$x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1,$$

to supstitucijom $x+2=z$ dobivamo

$$I = \int \frac{z-1}{(z^2+1)^2} \mathrm{d}z = \int \frac{z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} - \int \frac{(1+z^2)-z^2}{(z^2+1)^2} \mathrm{d}z =$$

$$= -\frac{1}{2(z^2+1)} - \int \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} + \int -z\,\mathrm{d}\left[-\frac{1}{2(z^2+1)}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2(z^2+1)} - \operatorname{arctg} z - \frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z + \mathrm{C} =$$

$$= -\frac{z+1}{2(z^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z + \mathrm{C} = -\frac{x+3}{2(x^2+4x+5)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} (x+2) + \mathrm{C}.$$

2°. Metoda Ostrogradskog. Ako $Q(x)$ ima višestruke korijene, onda je

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x = \frac{X(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{Q_2(x)} \mathrm{d}x, \tag{6}$$

gdje je $Q_1(x)$ najveća zajednička mjera polinoma $Q(x)$ i njegove derivacije $Q'(x)$;

$$Q_2(x) = Q(x) : Q_1(x);$$

$X(x)$ i $Y(x)$ su polinomi s neodređenim koeficijentima kojima je stupanj za jedan manji od stupnja $Q_1(x)$ i $Q_2(x)$.

Neodređeni koeficijenti polinoma $X(x)$ i $Y(x)$ računaju se pomoću deriviranja identiteta (6).

Primjer 4. Nađimo

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3-1)^2}.$$

Rješenje.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3-1)^2} \equiv \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1} \mathrm{d}x.$$

Deriviranjem tog identiteta dobivamo:

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{(2Ax+B)(x^3-1) - 3x^2(Ax^2+Bx+C)}{(x^3-1)^2} + \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}$$

ili

$$1 = (2Ax+B)(x^3-1) - 3x^2(Ax^2+Bx+C) + (Dx^2+Ex+F)(x^3-1).$$

Izjednačenjem koeficijenata uz iste potencije od x dobit ćemo:

$D=0;\quad E-A=0;\quad F-2B=0;\quad D+3C=0;\quad E+2A=0;\quad B+F=-1;$

odatle je

$$A=0;\quad B=-\frac{1}{3};\quad C=0;\quad D=0;\quad E=0;\quad F=-\frac{2}{3}$$

i prema tome je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3-1)^2} = -\frac{1}{3}\frac{x}{x^3-1} - \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}. \tag{7}$$

Za računanje integrala na desnoj strani jednadžbe (7) rastavimo razlomak $\frac{1}{x^3-1}$ na parcijalne razlomke:

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{L}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1},$$

tj.

$$1 = L(x^2+x+1) + Mx(x-1) + N(x-1). \tag{8}$$

Uvrštenjem $x = 1$, dobivamo $L = \frac{1}{3}$.

Izjednačenjem koeficijenata uz iste potencije od x na desnoj i lijevoj strani jednadžbe (8) dobivamo:

$$L + M = 0; \quad L - N = 1,$$

tj.

$$M = -\frac{1}{3}; \quad N = -\frac{2}{3}.$$

Prema tome je

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

i

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{x}{3(x^2-1)} + \frac{1}{9}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Izračunajte integrale:

1280. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

1281. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$.

1282. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$.

1283. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$.

1284. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}\,dx$.

1285. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$.

1286. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$.

1287. $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}\,dx$.

1288. $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}\,dx$.

1289. $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}\,dx$.

1290. $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}\,dx$.

1291. $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}\,dx$.

1292. $\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx$.

1293. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$.

1294. $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

1295. $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

1296. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

1297. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

1298. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$.

1299. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$.

1300. $\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx$.

Primjenom metode Ostrogradskog nađite ove integrale:

1301. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$.

1302. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$.

1303. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$.

1304. $\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$.

Primjenom raznih načina izračunajte integrale:

1305. $\int \frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)}\,dx$.

1306. $\int \frac{x^7+x^3}{x^{12}-2x^4+1}\,dx$.

1307. $\int \frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)}\,dx$.

1308. $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$.

1309. $\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2}$.

1310*. $\int \frac{dx}{x(x^7+1)}$.

1311. $\int \frac{dx}{x(x^5+1)^2}$.

1312. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}$.

1313. $\int \frac{x^2dx}{(x-1)^{10}}$.

1314. $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$.

6. Integriranje nekih iracionalnih funkcija

1°. Integrali oblika

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots\right]dx, \qquad (1)$$

gdje je R racionalna funkcija a $p_1, q_1, p_2, q_2, \dots$ su cijeli brojevi.

Integrale oblika (1) računamo pomoću supstitucije

$$\frac{ax+b}{cx+d}=z^n$$

gdje je n najmanji zajednički višekratnik brojeva $q_1, q_2, \dots$

Primjer 1. Izračunajmo
$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}.$$

Rješenje. Supstitucija $2x-1=z^4$ daje integral oblika

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} = \int \frac{2z^3\,dz}{z^2-z} = 2\int \frac{z^2\,dz}{z-1} = 2\int\left(z+1+\frac{1}{z-1}\right)dz =$$
$$= (z+1)^2 + 2\ln|z-1| + C = (1+\sqrt[4]{2x-1})^2 + \ln(\sqrt[4]{2x-1}-1)^2 + C.$$

Izračunajte integrale:

1315. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx.$

1316. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{ax+b}}.$

1317. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}.$

1318. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$

1319. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx.$

1320. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx.$

1321. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,dx.$

1322. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$

1323. $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx.$

1324. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx.$

1325. $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\,dx.$

2°. Integrali oblika

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \tag{2}$$

gdje je $P_n(x)$ polinom n-tog stupnja.

Stavimo

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{3}$$

gdje je $Q_{n-1}(x)$ polinom stupnja $(n-1)$ s neodređenim koeficijentima, a λ je broj.

Koeficijente polinoma $Q_{n-1}(x)$ i broj λ određujemo deriviranjem identiteta (3).

Primjer 2. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx = \int\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = (Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+4}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$

Odatle je

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}=(3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+4}+\frac{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)x}{\sqrt{x^2+4}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Množenjem sa $\sqrt{x^2+4}$ i izjednačenjem koeficijenata istih potencija od x dobivamo:

$$A=\frac{1}{4};\quad B=0;\quad C=\frac{1}{2};\quad D=0;\quad \lambda=-2.$$

Slijedi da je

$$\int x^2\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x=\frac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln(x+\sqrt{x^2+4})+C.$$

3°. Integrali oblika

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}. \tag{4}$$

Svode se na integrale oblika (2) pomoću supstitucije

$$\frac{1}{x-\alpha}=t.$$

Izračunajte integrale:

1326. $\displaystyle\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+1}}.$

1327. $\displaystyle\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

1328. $\displaystyle\int\frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$

1329. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^5\sqrt{x^2-1}}.$

1330. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}.$

1331. $\displaystyle\int\frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}\mathrm{d}x.$

4°. Binomni integrali

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x, \tag{5}$$

gdje su m, n i p racionalni brojevi.

Uvjeti Čebiševa. Integral (5) možemo izraziti konačnom kombinacijom elementarnih funkcija samo u ova tri slučaja:

1) ako je p cio broj;

2) ako je $\dfrac{m+1}{n}$ cio broj. Ovdje primjenjujemo supstituciju $a+bx^n=z^s$, gdje je s nazivnik razlomka p;

3) ako je $\dfrac{m+1}{n}+p$ cio broj. U ovom slučaju koristimo se supstitucijom $ax^{-n}+b=z^s$.

Primjer 3. Nađimo

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=I.$$

Rješenje. Ovdje je $m = -\frac{1}{2}$; $n = \frac{1}{4}$; $p = \frac{1}{3}$; $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2.$

Prema tome imamo slučaj 2) integrabilnosti.

Supstitucija

$$1 + x^{\frac{1}{4}} = z^3$$

daje: $x = (z^3 - 1)^4$; $dx = 12z^2(z^3 - 1)^3 4z$. Prema tome je

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx = 12\int \frac{z^3(z^3-1)^3}{(z^3-1)^2} dz = 12\int (z^6 - z^3)\, dz = \frac{12}{7}z^7 - 3z^4 + C,$$

gdje je $z = \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}.$

Izračunajte integrale:

1332. $\int x^3 (1+2x^2)^{-\frac{3}{2}} dx.$

1333. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

1334. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}.$

1335. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}.$

1336. $\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{5/3}}.$

1337. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}.$

7. Integriranje trigonometrijskih funkcija

1°. Integrali oblika

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = I_{m,n}, \qquad (1)$$

gdje su *m* i *n* cijeli brojevi.

1) Ako je $m = 2k+1$ neparan pozitivni broj, onda stavljamo

$$I_{m,n} = -\int \sin^{2k} x \cos^n x\, d(\cos x) = -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x\, d(\cos x).$$

Analogno postupamo, ako je n neparan pozitivan broj.

Primjer 1. $\int \sin^{10} x \cos^3 x\, dx = \int \sin^{10} x\,(1 - \sin^2 x)\, d(\sin x) = \frac{\sin^{11} x}{11} = \frac{\sin^{13} x}{13} + C.$

2) Ako su m i n parni pozitivni brojevi, onda se podintegralni izraz (1) transformira pomoću formula:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x),$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Primjer 2. $\int \cos^2 3x \sin^4 3x \, dx = \int (\cos 3x \sin 3x)^2 \sin^2 3x \, dx =$

$$= \int \frac{\sin^2 6x}{4} \, \frac{1 - \cos 6x}{2} \, dx = \frac{1}{8} \int (\sin^2 6x - \sin^2 6x \cos 6x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \left(\frac{1 - \cos 12x}{2} - \sin^2 6x \cos 6x \right) dx = \frac{1}{8} \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 12x}{24} - \frac{1}{18} \sin^3 6x \right) + C.$$

3) Ako su $m = -\mu$ i $n = -\nu$ cijeli negativni brojevi jednake parnosti, pri čemu je $\mu + \nu \geqslant 2$, tada je

$$I_{m,n} = \int \frac{dx}{\sin^\mu x \cos^\nu x} = \int \operatorname{cosec}^\mu x \sec^{\nu - 2} x \, d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \right)^{\frac{\mu}{2}} (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{\nu - 2}{2}} \, d(\operatorname{tg} x) = \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{\mu + \nu}{2} - 1}}{\operatorname{tg}^\mu x} \, d(\operatorname{tg} x).$$

Posebno se na taj slučaj svode integrali

$$\int \frac{dx}{\sin^\mu x} = \frac{1}{2^{\mu - 1}} \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^\mu \frac{x}{2} \cos^\mu \frac{x}{2}} \quad \text{i} \quad \int \frac{dx}{\cos^\nu x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^\nu \left(x + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Primjer 3. $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \sec^2 x \, d(\operatorname{tg} x) = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \, d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C.$

Primjer 4. $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2^3} \int \frac{dx}{\sin^3 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} = \frac{1}{8} \int \operatorname{tg}^{-3} \frac{x}{2} \sec^6 \frac{x}{2} \, dx =$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)^2}{\operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}} \sec^2 \frac{x}{2} \, dx = \frac{8}{2} \int \left[\operatorname{tg}^{-3} \frac{x}{2} + \frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right] d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + 2 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2} \right] + C.$$

4) Integrali oblika $\int \operatorname{tg}^m x \, dx$ (ili $\int \operatorname{ctg}^m x \, dx$), gdje je m cijeli pozitivni broj, računaju se pomoću formule

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$$

(ili $\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$).

Primjer 5.

$$\int \operatorname{tg}^4 x\,dx = \int \operatorname{tg}^2 x(\sec^2 x - 1)\,dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int \operatorname{tg}^2 x\,dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

5) Općenito se integrali $I_{m,n}$ oblika (1) računaju pomoću *formula redukcije* (*rekurzijskih formula*) koje su obično izvedene parcijalnom integracijom.

Primjer 6.

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x}\,dx = \int \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx + \int \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \sin x \cdot \frac{1}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C.$$

Izračunajte integrale:

1338. $\int \cos^3 x\,dx.$

1339. $\int \sin^5 x\,dx.$

1340. $\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx.$

1341. $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2}\,dx.$

1342. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx$

1343. $\int \sin^4 x\,dx.$

1344. $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx.$

1345. $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx.$

1346. $\int \cos^6 3x\,dx.$

1347. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$

1348. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}.$

1349. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,dx.$

1350. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}.$

1351. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x}.$

1352. $\int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}}.$

1353. $\int \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin x \cos x}\,dx.$

1354. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}.$

1355. $\int \sec^5 4x\,dx.$

1356. $\int \operatorname{tg}^2 5x\,dx.$

1357. $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx.$

1358. $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx.$

1359. $\int \left(\operatorname{tg}^3 \frac{x}{3} + \operatorname{tg}^4 \frac{x}{3}\right)dx.$

1360. $\int x \sin^2 x^2\,dx.$

1361. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx.$

1362. $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x}\,dx.$

1363. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}.$

1364. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}.$

2°. Integrali oblika

$$\int \sin mx \cos nx \, dx, \quad \int \sin mx \sin nx \, dx \quad \text{i} \quad \int \cos mx \cos nx \, dx.$$

U tim slučajevima primjenjujemo formule:

$$1) \quad \sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x];$$

$$2) \quad \sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x];$$

$$3) \quad \cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x].$$

Primjer 7. $\int \sin 9x \sin x \, dx = \int \frac{1}{2}[\cos 8x - \cos 10x] \, dx = \frac{1}{16}\sin 8x - \frac{1}{20}\sin 10x + C.$

Izračunajte integrale:

1365. $\int \sin 3x \cos 5x \, dx.$

1366. $\int \sin 10x \sin 15x \, dx.$

1367. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3} \, dx.$

1368. $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3} \, dx.$

1369. $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b) \, dx.$

1370. $\int \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi) \, dt.$

1371. $\int \cos x \cos^2 3x \, dx.$

1372. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx.$

3°. Integrali oblika

$$\int R(\sin x, \cos x) \, dx, \tag{2}$$

gdje je ***R*** **racionalna funkcija.**

1) Pomoću supstitucije

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,$$

odakle je

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

integrale oblika (2) svodimo na integrale racionalnih funkcija s novom varijablom t.

Primjer 8. Nađimo

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = I.$$

Rješenje. Stavivši $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ imat ćemo

$$I=\int\frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{1+t}=\ln\left|1+t\right|+C=\ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

2) Ako vrijedi identitet

$$R(-\sin x,\ -\cos x)\equiv R(\sin x,\ \cos x),$$

onda za svođenje integrala (2) na racionalni oblik možemo primijeniti supstituciju $\operatorname{tg} x=t$. Ovdje je

$$\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\qquad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

i

$$x=\operatorname{arctg} t,\qquad dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

Primjer 9. Nađimo

$$\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}=I. \tag{3}$$

Rješenje. Stavivši

$$\operatorname{tg} x=t,\quad \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{dt}{1+t^2},$$

imat ćemo

$$I=\int\frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)}=\int\frac{dt}{1+2t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(t\sqrt{2})}{1+(t\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(t\sqrt{2})+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+C.$$

Primijetimo da bismo integral (3) mogli brže izračunati ako bismo prethodno brojnik i nazivnik razlomka podijelili sa $\cos^2 x$.

U pojedinim slučajevima korisno je primijeniti neke doskočice (vidi npr. zadatak 1379).

Izračunajte integrale:

1373. $\displaystyle\int\frac{dx}{3+5\cos x}.$

1374. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}.$

1375. $\displaystyle\int\frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx.$

1376. $\displaystyle\int\frac{\sin x}{1-\sin x}\,dx.$

1377. $\displaystyle\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}.$

1378. $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}.$

1379.** $\int \frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}\,\mathrm{d}x.$

1380. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x.$

1381*. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+3\cos^2 x}.$

1382*. $\int \frac{\mathrm{d}x}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}.$

1383*. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x}.$

1384*. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x-5\sin x\cos x}.$

1385. $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}\,\mathrm{d}x.$

1386. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$

1387. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x.$

1388. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+5}\,\mathrm{d}x.$

1389*. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2-\sin x)(3-\sin x)}.$

1390*. $\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}\,\mathrm{d}x.$

8. Integriranje hiperbolnih funkcija

Integriranje hiperbolnih funkcija potpuno je analogno integriranju trigonometrijskih funkcija. Sjetimo se osnovnih formula:

1) $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1;$

2) $\operatorname{sh}^2 x=\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x-1);$

3) $\operatorname{ch}^2 x=\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x+1);$

4) $\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x=\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x.$

Primjer 1. Nađimo

$$\int \operatorname{ch}^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Rješenje. Imamo:

$$\int \operatorname{ch}^2 x\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x+\frac{1}{2}x+C.$$

Primjer 2. Nađimo

$$\int \operatorname{ch}^3 x\,\mathrm{d}x.$$

Rješenje. Imamo:

$$\int \operatorname{ch}^3 x\,\mathrm{d}x=\int \operatorname{ch}^2 x\,\mathrm{d}(\operatorname{sh} x)=\int (1+\operatorname{sh}^2 x)\,\mathrm{d}(\operatorname{sh} x)=\operatorname{sh} x+\frac{\operatorname{sh}^3 x}{x}+C.$$

Izračunajte integrale:

1391. $\int \operatorname{sh}^3 x\,dx$.

1392. $\int \operatorname{ch}^4 x\,dx$.

1393. $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x\,dx$.

1394. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x\,dx$.

1395. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x}$.

1396. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}$.

1397. $\int \operatorname{th}^3 x\,dx$.

1398. $\int \operatorname{cth}^4 x\,dx$.

1399. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}$.

1400. $\int \frac{dx}{2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x}$

1401*. $\int \frac{dx}{\operatorname{th} x - 1}$.

1402. $\int \frac{\operatorname{sh} x\,dx}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}$.

9. Primjena trigonometrijskih i hiperbolnih supstitucija na određivanje integrala oblika

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \tag{1}$$

gdje je R racionalna funkcija.

Transformacijom kvadratnog trinoma ax^2+bx+c u sumu ili razliku kvadrata svodimo (1) na jedan od integrala ovih tipova:

1) $\int R(z, \sqrt{m^2-z^2})\,dz$;

2) $\int R(z, \sqrt{m^2+z^2})\,dz$;

3) $\int R(z, \sqrt{z^2-m^2})\,dz$.

Navedene integrale rješavamo pomoću supstitucija:

1) $z = m \sin t$ ili $z = m \operatorname{th} t$,
2) $z = m \operatorname{tg} t$ ili $z = m \operatorname{sh} t$,
3) $z = m \sec t$ ili $z = m \operatorname{ch} t$.

Primjer 1. Nađimo

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}} = I.$$

Rješenje. Imamo:

$$x^2+2x+2 = (x+1)^2+1.$$

Uvrstimo $x+1 = \operatorname{tg} t$, tada je $dx = \sec^2 t\,dt$ i

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{(x+1)^2+1}} = \int \frac{\sec^2 t\,dt}{\operatorname{tg}^2 t \sec t} = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{\sin t} + C = -\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + C.$$

Primjer 2. Nađimo

$$\int x\sqrt{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = I.$$

Rješenje. Imamo:

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Stavivši

$$x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh} t \quad \text{i} \quad \mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t,$$

dobivamo:

$$I=\int\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh} t-\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}\int\operatorname{sh} t\operatorname{ch}^2 t\,\mathrm{d}t-\frac{3}{8}\int\operatorname{ch}^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{\operatorname{ch}^3 t}{3}-\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t+\frac{1}{2}t\right)+C.$$

Budući da je

$$\operatorname{sh} t=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right),\quad \operatorname{ch} t=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+x+1}$$

i

$$t=\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+\ln\frac{2}{\sqrt{3}},$$

imamo konačno:

$$I=\frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}-\frac{3}{16}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C.$$

Izračunajte integrale:

1403. $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,\mathrm{d}x.$

1404. $\int\sqrt{2+x^2}\,\mathrm{d}x.$

1405. $\int\frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}\,\mathrm{d}x.$

1406. $\int\sqrt{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x.$

1407. $\int\sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x.$

1408. $\int\sqrt{x^2+x}\,\mathrm{d}x.$

1409. $\int\sqrt{x^2-6x-7}\,\mathrm{d}x.$

1410. $\int(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x.$

1411. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}.$

1412. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}.$

1413. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

1414. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}.$

10. Integriranje raznih transcendentnih funkcija

Izračunajte integrale:

1415. $\int (x^2+1)^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x.$

1416. $\int x^2 \cos^2 3x\,\mathrm{d}x.$

1417. $\int x \sin x \cos 2x\,\mathrm{d}x.$

1418. $\int e^{2x} \sin^2 x\,\mathrm{d}x.$

1419. $\int e^x \sin x \sin 3x\,\mathrm{d}x.$

1420. $\int x e^x \cos x\,\mathrm{d}x.$

1421. $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^{2x}+e^x-2}.$

1422. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}.$

1423. $\int x^2 \ln \frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x.$

1424. $\int \ln^2 (x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x.$

1425. $\int x \arccos (5x-2)\,\mathrm{d}x.$

1426. $\int \sin x \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x.$

11. Primjena redukcionih formula

Izvedite formule redukcija za integrale:

1427. $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$; izračunajte I_2 i I_3.

1428. $I_n = \int \sin^n x\,\mathrm{d}x$; izračunajte I_4 i I_5.

1429. $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x}$; izračunajte I_3 i I_4.

1430. $I_n = \int x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$; izračunajte I_{10}.

12. Integriranje raznih funkcija

1431. $\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-4x+9}.$

1432. $\int \frac{x-5}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x.$

1433. $\int \frac{x^3}{x^2+x+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x.$

1434. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+5)}.$

1435. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2(x+3)^2}$

1436. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2(x^2+1)}.$

1437. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2}.$

1438. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-2x^2+1}.$

1439. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2-x+1)^3}.$

1440. $\int \frac{3-4x}{(1-2\sqrt{x})^2}\,\mathrm{d}x.$

1441. $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^3}\,\mathrm{d}x.$

1442. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}.$

1443. $\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}\,\mathrm{d}x.$

1444. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x})^2}.$

1445. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{(4x^2-2x+1)^3}}\,\mathrm{d}x.$

1446. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}.$

1447. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\,\mathrm{d}x.$

1448. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}.$

1449. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x^2-x^4}}.$

1450. $\int \frac{x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x.$

1451*. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4x)\sqrt{4-x^2}}.$

1452. $\int \sqrt{x^2-9}\,\mathrm{d}x.$

1453. $\int \sqrt{x-4x^2}\,\mathrm{d}x.$

1454. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$

1455. $\int x\sqrt{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x.$

1456. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2-1}}.$

1457. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^3}}.$

1458. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$

1459. $\int \frac{5x}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x.$

1460. $\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x.$

1461. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x \sin^5 x}.$

1462. $\int \frac{1+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$

1463. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}\,\mathrm{d}x.$

1464. $\int \operatorname{cosec}^5 5x\,\mathrm{d}x.$

1465. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,\mathrm{d}x.$

1466. $\int \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\mathrm{d}x.$

1467. $\int \operatorname{tg}^3\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x.$

1468. $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x+3\cos x-5}.$

1469. $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3\cos^2 x}.$

1470. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x+2\sin x\cos x+2\sin^2 x}.$

1471. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \sin 2x}.$

1472. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)(3+\cos x)}.$

1473. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x + 1}} \, \mathrm{d}x.$

1474. $\int \frac{\cos ax}{\sqrt{a^2 + \sin^2 ax}} \, \mathrm{d}x.$

1475. $\int \frac{x \, \mathrm{d}x}{\cos^2 3x}.$

1476. $\int x \sin^2 x \, \mathrm{d}x.$

1477. $\int x^2 e^{x^3} \mathrm{d}x.$

1478. $\int x e^{2x} \mathrm{d}x.$

1479. $\int x^2 \ln \sqrt{1-x} \, \mathrm{d}x.$

1480. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} \, \mathrm{d}x.$

1481. $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} \, \mathrm{d}x.$

1482. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x + \cos x)^2}.$

1483. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{tg} x + 1) \sin^2 x}.$

1484. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \, \mathrm{d}x.$

1485. $\int \frac{\operatorname{sh} \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} \, \mathrm{d}x.$

1486. $\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x} \, \mathrm{d}x.$

1487. $\int \frac{x}{\operatorname{sh}^2 x} \, \mathrm{d}x.$

1488. $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^{2x} - 2e^x}.$

1489. $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 6e^x + 13} \, \mathrm{d}x.$

1490. $\int \frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^{\frac{1}{4}}} \, \mathrm{d}x.$

1491. $\int \frac{2^x}{1 - 4^x} \, \mathrm{d}x.$

1492. $\int (x^2 - 1) \, 10^{-2x} \mathrm{d}x.$

1493. $\int \sqrt{e^x + 1} \, \mathrm{d}x.$

1494. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} \mathrm{d}x.$

1495. $\int x^3 \arcsin \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x.$

1496. $\int \cos (\ln x) \, \mathrm{d}x.$

1497. $\int (x^2 - 3x) \sin 5x \, \mathrm{d}x.$

1498. $\int x \operatorname{arctg} (2x + 3) \, \mathrm{d}x.$

1499. $\int \arcsin \sqrt{x} \, \mathrm{d}x.$

1500. $\int |x| \, \mathrm{d}x.$

GLAVA V

ODREĐENI INTEGRAL

1. Određeni integral kao limes sume

1°. Integralna suma. Neka je funkcija $f(x)$ definirana u intervalu $a \leqslant x \leqslant b$ i $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ neka je po volji odabrana podjela tog intervala na n dijelova (sl. 37).

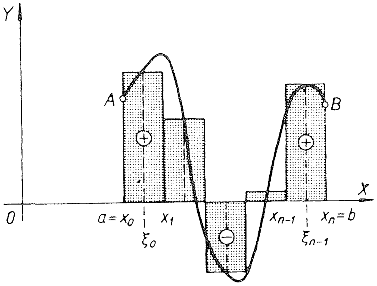
Sumu oblika

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \tag{1}$$

gde je

$$x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}; \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i; \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1),$$

nazivamo *integralnom sumom* funkcije $f(x)$ u $[a, b]$. Geometrijski S_n predstavlja algebarsku sumu površina pripadnih pravokutnika (vidi sl. 37).



Slika 37.

2°. Određeni integrali. Limes sume S_n, pod uvjetom da broj dijelova n podjele teži k beskonačnosti, a najveća razlika Δx_i teži k nuli, nazivamo *određenim integralom* funkcije $f(x)$ u granicama od $x = a$ do $x = b$, tj.

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Ako je funkcija $f(x)$ neprekinuta u $[a, b]$, onda je ona integrabilna u $[a, b]$, tj. limes (2) egzistira i nije ovisan o načinu diobe intervala integriranja $[a, b]$ na odsječke ni o izboru tačaka ξ_i na tim odsječcima. Određeni integral (2) geometrijski predstavlja algebarsku sumu površina likova koji sačinjavaju krivocrtni trapez $aABb$, pri čemu se površine dijelova iznad osi OX prigodom zbrajanja smatraju pozitivnim, a one ispod osi OX negativnim (vidi sl. 37).

Definicije integralne sume i odredenog integrala prirodno se uopćavaju na slučaj intervala $[a, b]$ gdje je $a > b$.

Primjer 1. Tvorimo integralnu sumu S_n za funkciju

$$f(x) = 1 + x$$

u intervalu [1, 10] time da taj interval podijelimo na n jednakih dijelova i odaberemo tačke ξ_i tako da su one ujedno tačke lijevih krajeva odsječaka $[x_i, x_{i+1}]$. Koliki je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$?

Rješenje. Ovdje je $\Delta x_i = \dfrac{10-1}{n} = \dfrac{9}{n}$ i $\xi_i = x_i = x_0 + i\Delta x_i = 1 + \dfrac{9i}{n}$. Odatle je

$$f(\xi_i) = 1 + 1 + \frac{9i}{n} = 2 + \frac{9i}{n}.$$

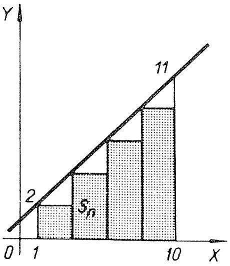
Slijedi (sl. 38),

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}\left(2 + \frac{9i}{n}\right)\frac{9}{n} = \frac{18}{n}\,n + \frac{81}{n^2}\left(0 + 1 + \ldots + n - 1\right) =$$

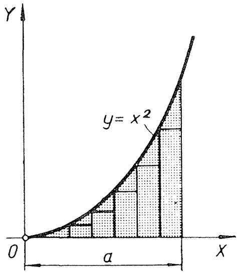
$$= 18 + \frac{81}{n^2}\,\frac{n(n-1)}{2} = 18 + \frac{81}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 58\,\frac{1}{2} - \frac{81}{2n},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 58\,\frac{1}{2}\,.$$

Primjer 2. Nađimo površinu krivocrtnog trokuta omeđenog lukom parabole $y = x^2$, osi OX i vertikalom $x = a$ $(a > 0)$.



Slika 38.



Slika 39.

Rješenje. Podijelimo bazu a na n jednakih dijelova $\Delta x = \dfrac{a}{n}$. Izabravši vrijednost funkcije u početku svakog intervala imat ćemo:

$$y_1 = 0; \quad y_2 = \left(\frac{a}{n}\right)^2; \quad y_3 = \left[2\left(\frac{a}{n}\right)^2\right]; \quad \ldots; \quad y_n = \left[(n-1)\,\frac{a}{n}\right]^2.$$

Površine upisanih pravokutnika izračunavaju se množenjem svakog y_k s bazom $\Delta x = \dfrac{a}{n}$ (sl. 39). Sumiranjem dobivamo površinu stepenastog lika

$$S_n = \frac{a}{n}\left(\frac{a}{n}\right)^2\left(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2\right).$$

Služeći se formulom za sumu kvadrata cijelih brojeva

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

nalazimo:

$$S_n = \frac{a^3(n-1)n(2n-1)}{6n^3};$$

odakle, prijelazom na limes, dobivamo:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^3(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

Izračunajte određene integrale kao limese pripadnih integralnih suma:

1501. $\int\limits_a^b \mathrm{d}x.$

1502. $\int\limits_0^T (v_0+gt)\,\mathrm{d}t,$

v_0 i g su konstante.

1503. $\int\limits_{-2}^{1} x^2\,\mathrm{d}x.$

1504. $\int\limits_0^{10} 2^x\,\mathrm{d}x.$

1505*. $\int\limits_1^5 x^3\,\mathrm{d}x.$

1506*. Nađite površinu krivuljnog trapeza omeđenog hiperbolom

$$y = \frac{1}{x},$$

osi OX i ordinatama: $x = a$ i $x = b$ $(0<a<b)$.

1507*. Nađite

$$f(x) = \int\limits_x^0 \sin t\,\mathrm{d}t.$$

2. Izračunavanje određenih integrala pomoću neodređenih

1°. Određeni integral s promjenljivom gornjom granicom. Ako je funkcija $f(t)$ neprekinuta u intervalu $[a, b]$, onda je funkcija

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

primitivna za funkciju $f(x)$, tj.

$$F'(x) = f(x)$$

kada je $a \leqslant x \leqslant b$

2°. Newton-Leibnizova formula. Ako je $F'(x) = f(x)$, onda je

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Primitivna funkcija $F(x)$ izračunava se određivanjem neodređenog integrala

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Primjer 1. Izračunajte integral $\int_{-1}^{3} x^4\,dx$.

Rješenje. $$\int_{-1}^{3} x^4\,dx = \frac{x^5}{5}\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{3^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = 48\frac{4}{5}.$$

1508. Zadano je

$$I = \int_a^b \frac{dx}{\ln x} \qquad (b>a>1).$$

Izračunajte

$$1)\ \frac{dI}{da};\quad 2)\ \frac{dI}{db}.$$

Nađite derivacije ovih funkcija:

1509. $F(x) = \int_1^x \ln t\,dt \quad (x>0)$.

1510. $F(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^4}\,dt$.

1511. $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt$.

1512. $I = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\,dt \quad (x>0)$.

1513. Nađite tačke ekstrema funkcije

$$y = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \text{ u području } x>0.$$

Primjenom Newton-Leibnizove formule nađite integrale:

1514. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

1515. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3}$.

1516 $\int_{-x}^{x} e^t\,dt$.

1517. $\int_0^x \cos t\,dt$.

Pomoću određenih integrala nađite limese suma:

1518.** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right)$.

1519.** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right)$.

1520. $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p>0)$.

Izračunajte integrale:

1521. $\int_{1}^{2} (x^2-2x+3)\,dx.$

1522. $\int_{0}^{8} (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})\,dx.$

1523. $\int_{1}^{4} \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\,dy.$

1524. $\int_{2}^{6} \sqrt{x-2}\,dx.$

1525. $\int_{0}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}.$

1526. $\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1}.$

1527. $\int_{0}^{1} \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}.$

1528. $\int_{-1}^{1} \frac{y^5\,dy}{y+2}.$

1529. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}.$

1530. $\int_{3}^{4} \frac{dx}{x^2-3x+2}.$

1531. $\int_{0}^{1} \frac{z^3}{z^8+1}\,dz.$

1532. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\alpha\,d\alpha.$

1533. $\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

1534. $\int_{2}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}.$

1535. $\int_{0}^{1} \frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^6+4}}.$

1536. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\alpha\,d\alpha.$

1537. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\,d\varphi.$

1538. $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$

1539. $\int_{1}^{e} \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx.$

1540. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx.$

1541. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg}^4\varphi\,d\varphi.$

1542. $\int_{0}^{1} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx.$

1543. $\int\limits_0^1 \operatorname{ch} x \, \mathrm{d}x.$ **1544.** $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x}.$ **1545.** $\int\limits_0^{\pi} \operatorname{sh}^2 x \, \mathrm{d}x.$

3. Nepravi integrali

1°. Integrali neograđenih funkcija. Ako funkcija $f(x)$ nije ograđena u bilo kojoj okolini unutarnje tačke c intervala $[a, b]$ i neprekinuta za $a \leqslant x < c$ i $c < x \leqslant b$, onda po definiciji stavljamo:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\eta \to +0} \int\limits_{c+\eta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

Ako limesi na desnoj strani jednadžbe (1) postoje i konačni su, onda nepravi integral nazivamo *konvergentnim*, a u protivnom slučaju *divergentnim*. Za $c=a$ ili $c=b$ definicija se na odgovarajući način pojednostavnjuje.

Ako u intervalu $[a, b]$ postoji neprekinuta funkcija $F(x)$ takva da je $F'(x)=f(x)$ za $x \neq c$ (*uopćena primitivna funkcija*), onda je

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

Ako je $|f(x)| \leqslant \Phi(x)$ za $a \leqslant x \leqslant b$ a $\int\limits_a^b \Phi(x)\,\mathrm{d}x$ konvergira, onda integral (1) također konvergira (*kriterij usporedbe*).

Ako je $f(x) \geqslant 0$ i $\lim\limits_{x \to c} \{f(x)\,|c-x|^m\} = A \neq \infty$, $A \neq 0$, tj. $f(x) \sim \frac{A}{|c-x|^m}$ kada $x \to c$, onda: 1) za $m<1$ integral (1) konvergira, 2) za $m \geqslant 1$ integral (1) divergira.

2°. Integrali s beskonačnim limesima. Ako je funkcija $f(x)$ neprekinuta za $a \leqslant x < \infty$, onda stavljamo

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b \to \infty} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (3)$$

i ovisno o postojanju ili nepostojanju konačnog limesa na desnoj strani jednadžbe (3) pripadni integral nazivamo *konvergentnim* ili *divergentnim*.

Analogno je

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{i} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ako $|f(x)| \leqslant F(x)$ i integral $\int\limits_a^{\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiraju, onda integral (3) također konvergira.

Ako je $f(x) \geqslant 0$ i $\lim\limits_{x \to \infty} \{f(x)\,x^m\} = A \neq \infty$, $A \neq 0$, tj. $f(x) \sim \frac{A}{x^m}$ za $x \to \infty$, onda: 1) za $m>1$ integral (3) konvergira, 2) za $m \leqslant 1$ integral (3) divergira.

Primjer 1.

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{\eta \to 0} \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) + \lim_{\eta \to 0} \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) = \infty;$$

integral divergira.

Primjer 2.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Primjer 3. Ispitajmo konvergenciju *Euler-Poissonova integrala*

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx. \tag{4}$$

Rješenje. Stavimo

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\, dx.$$

Prvi integral na desnoj strani nije nepravi, a drugi konvergira, jer je $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$ kada je $x \geqslant 1$ i

$$\int_1^\infty e^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty} (-e^{-b} + e^{-1}) = e^{-1},$$

pa prema tome integral (4) konvergira.

Primjer 4. Ispitajmo konvergenciju integrala

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}. \tag{5}$$

Rješenje. Kada $x \to +\infty$ imamo:

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Kako integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ konvergira, to naš integral (5) također konvergira.

Primjer 5. Ispitajmo konvergenciju eliptičkog integrala

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}. \tag{6}$$

Rješenje: Tačka prekinutosti podintegralne funkcije: $x = 1$. Primijenimo fomulu $1 - x^4 = (1 - x)(1 + x)(1 + x^2)$, pa dobijemo:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)^{1/2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}.$$

Prema tome ćemo pri $x \to 1$ imati

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Kako integral

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

konvergira, to i dani integral (6) također konvergira.

Izračunajte neprave integrale (ili ustanovite njihovu divergenciju):

1546. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

1547. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$.

1548. $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$.

1549. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

1550. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1551. $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$.

1552. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$.

1553. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$.

1554. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$.

1555. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

1556. $\int_0^\infty \sin x \, dx$.

1557. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}$.

1558. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

1559. $\int_a^\infty \frac{dx}{x \ln x}$ $(a > 1)$.

1560. $\int_a^\infty \frac{dx}{x \ln^2 x}$ $(a > 1)$.

1561. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x \, dx$.

1562. $\int\limits_0^\infty e^{-kx}\,\mathrm{d}x \quad (k>0).$

1563. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$

1564. $\int\limits_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}.$

1565. $\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}.$

1566. $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3-5x^2}.$

Ispitajte konvergenciju integrala:

1567. $\int\limits_0^{100} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}.$

1568. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}.$

1569. $\int\limits_{-1}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}.$

1570. $\int\limits_0^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^5+1}}.$

1571. $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-x^4}}.$

1572. $\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}.$

1573. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

1574*. Dokažite da Eulerov integral prve vrste (*beta-funkcija*)

$$\mathrm{B}(p,\ q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$$

konvergira za $p>0$ i $q>0$.

1575*. Dokažite da Eulerov integral druge vrste (*gama-funkcija*)

$$\Gamma(p)=\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

konvergira za $p>0$.

4. Zamjena varijable u određenom integralu

Ako je funkcija $f(x)$ neprekinuta u intervalu $a \leqslant x \leqslant b$, a $x = \varphi(t)$ je funkcija neprekinuta zajedno sa svojom derivacijom $\varphi'(t)$ u intervalu $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, gdje je $a = \varphi(\alpha)$ i $b = \varphi(\beta)$, pri čemu je $f[\varphi(t)]$ definirana i neprekinuta u intervalu $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, onda je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Primjer 1. Izračunajte

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (a>0).$$

Rješenje. Stavimo

$$x = a\sin t;$$

$$\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Tada je $t = \arcsin\dfrac{x}{a}$ i prema tome možemo uzeti da je $\alpha = \arcsin 0 = 0$, $\beta = \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Prema tome ćemo imati:

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,\mathrm{d}t = a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,\mathrm{d}t = \frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,\mathrm{d}t = \frac{a^4}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

1576. Može li se integral

$$\int_0^2 \sqrt[3]{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

izračunati pomoću supstitucije $x = \cos t$?

Transformirajte određene integrale pomoću naznačenih supstitucija:

1577. $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x, \quad x = 2t-1.$

1578. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}, \quad x = \sin t.$

1579. $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x = \operatorname{sh} t.$

1580. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad x = \operatorname{arctg} t.$

1581. Za integral

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad (b>a)$$

odredite cijelu linearnu supstituciju $x=\alpha t+\beta$, pomoću koje će pripadne granice integriranja postati 0 i 1.

Primjenom naznačenih supstitucija izračunajte ove integrale:

1582. $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}, \qquad x=t^2.$

1583. $\displaystyle\int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3}\,\mathrm{d}x, \qquad x-2=z^3.$

1584. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x, \qquad e^x-1=z^2.$

1585. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{3+2\cos t}, \qquad \operatorname{tg}\frac{t}{2}=z.$

1586. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\sin^2 x}, \qquad \operatorname{tg} x=t.$

Pomoću odgovarajućih supstitucija izračunajte integrale:

1587. $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

1588. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,\mathrm{d}x.$

1589. $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,\mathrm{d}x.$

1590. $\displaystyle\int_0^5 \frac{\mathrm{d}x}{2x+\sqrt{3x+1}}.$

Izračunajte integrale:

1591. $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+5x+1}}.$

1592. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}.$

1593. $\displaystyle\int_0^a \sqrt{ax-x^2}\,\mathrm{d}x.$

1594. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{5-3\cos x}.$

1595. Dokažite da je

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

kada je $f(x)$ parna funkcija, a da je

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

kada je $f(x)$ neparna funkcija.

1596. Pokažite da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

1597. Pokažite da je

$$\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\arccos x} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

1598. Pokažite da je

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

5. Parcijalna integracija

Ako su funkcije $u(x)$ i $v(x)$ neprekinuto derivabilne u intervalu $[a, b]$, onda je

$$\int_{a}^{b} u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x)\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v(x)\,u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Primjenom formule za parcijalnu integraciju izračunajte integrale:

1599. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x.$

1600. $\int_{1}^{e} \ln x\,\mathrm{d}x.$

1601. $\int_{0}^{1} x^3 e^{2x}\,\mathrm{d}x.$

1602. $\int_{0}^{\pi} e^x \sin x\,\mathrm{d}x.$

1603. $\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x.$

1604. $\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x \qquad (a>0).$

1605. $\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x \qquad (a>0).$

1606*. Pokažite da za gama-funkciju (vidi br. 1575) vrijedi formula rekurzije:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \qquad (p>0).$$

Odatle izvedite da je $\Gamma(n+1) = n!$ ako je n prirodni broj.

1607. Pokažite da za integral

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

vrijedi *formula rekurzije*

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Nađite I_n, ako je n prirodan broj. Pomoću dobivene formule izračunajte I_9 i I_{10}.

1608. Primjenom višestruke parcijalne integracije izračunajte integral (vidi br. 1574)

$$B(p,\ q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

gdje su p i q cijeli pozitivni brojevi.

1609*. Izrazite pomoću B (beta-funkcije) integral

$$I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\,dx,$$

ako su m i n cijeli nenegativni brojevi.

6. Teorem o srednjoj vrijednosti

1°. Procjena integrala. Ako je $f(x) \leqslant F(x)$ za $a \leqslant x \leqslant b$, onda je

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b F(x)\,dx. \tag{1}$$

Ako su $f(x)$ i $\varphi(x)$ neprekinute za $a \leqslant x \leqslant b$, a pored toga je $\varphi(x) \geqslant 0$, onda je

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leqslant M\int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{2}$$

gdje je m najmanja, a M najveća vrijednost funkcije $f(x)$ u intervalu $[a,\ b]$.

Napose, ako je $\varphi(x) \equiv 1$, onda je

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{3}$$

Nejednadžbe (2) i (3) možemo zamijeniti ekvivalentnim pripadnim jednadžbama:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a),$$

gdje su c i ξ neki brojevi koji leže između a i b.

Primjer: Procijeniti integral

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx.$$

Rješenje. Kako je $0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1$, to imamo:

$$\frac{\pi}{2} < I < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \text{tj.}\ 1{,}57 < I < 1{,}91 .$$

2°. Srednja vrijednost funkcije. Broj

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

nazivamo *srednjom vrijednosti* funkcije $f(x)$ u intervalu $a \leqslant x \leqslant b$.

1610*. Ne izračunavši integrale odredite njihov predznak:

a) $\int_{-1}^{2} x^3\,dx$;

b) $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$;

c) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

1611. Istražite koji je od dva integrala veći ne izračunavši integrale:

a) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ ili $\int_0^1 x\,dx$;

b) $\int_0^1 x^2\sin^2 x\,dx$ ili $\int_0^1 x\sin^2 x\,dx$;

c) $\int_1^2 e^{x^2}\,dx$ ili $\int_1^2 e^x\,dx$.

Nađite srednje vrijednosti funkcija u označenim intervalima:

1612. $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. **1613.** $f(x) = a + b\cos x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

1614. $f(x) = \sin^2 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$. **1615.** $f(x) = \sin^4 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

1616. Dokažite da je $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$ uključen između $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$ i $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}70$.

Nađite tačnu vrijednost tog integrala.

Procijenite integrale:

1617. $\int\limits_0^1 \sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x.$

1618. $\int\limits_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}x}{8+x^3}.$

1619. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{10+3\cos x}.$

1620*. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x.$

1621. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$

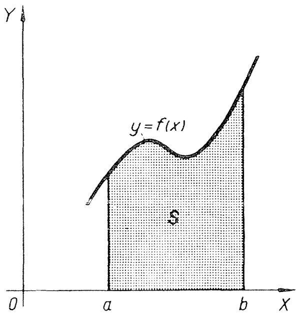
1622. Parcijalnom integracijom dokažite da je $0 < \int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x < \frac{1}{100\pi}.$

7. Površine ravninskih likova

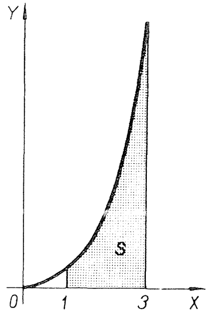
1°. Površina u pravokutnim koordinatama. Ako je neprekinuta krivulja zadana u pravokutnim koordinatama jednadžbom $y=f(x)$ $[f(x)\geqslant 0]$, onda se površina krivocrtnog trapeza omeđenog tom krivuljom, dvjema vertikalama u tačkama $x=a$ i $x=b$ te odsječkom osi apscisa $a\leqslant x\leqslant b$ (sl. 40) određuje formulom

$$S=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Primjer 1. Izračunajmo površinu omeđenu parabolom $y=\frac{x^2}{2}$, pravcima $x=1$ i $x=3$ i osi apscisa (sl. 41).



Slika 40.



Slika 41.

Rješenje. Tražena površina izražena je integralom

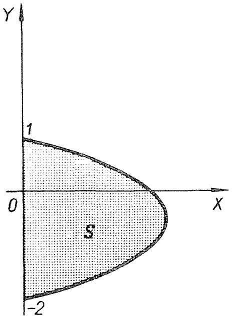
$$S=\int\limits_1^3 \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = 4\,\frac{1}{3}.$$

Primjer 2. Izračunajmo površinu omeđenu krivuljom $x = 2 - y - y^2$ i osi ordinata (sl. 42).

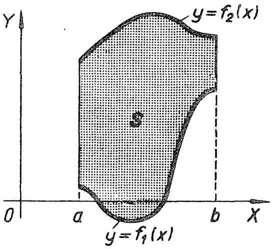
Rješenje. Ovdje su zamijenjene uloge koordinatnih osi pa se stoga tražena površina izražava integralom

$$S = \int_{-2}^{1} (2 - y - y^2)\,\mathrm{d}y = 4\,\frac{1}{2},$$

gdje su granice integriranja $y_1 = -2$ i $y_2 = 1$ nađene kao ordinate tačaka u kojima dana krivulja siječe os ordinata.



Slika 42.



Slika 43.

U općenitijem slučaju, kada je površina S omeđena sa dvije neprekinute krivulje $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ i sa dvije vertikale $x = a$ i $x = b$, gdje je $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ za $a \leqslant x \leqslant b$ (sl. 43) imat ćemo:

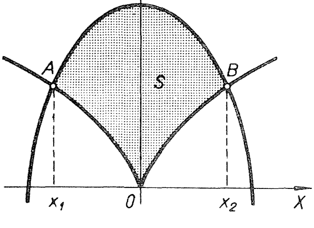
$$S = \int_{a}^{b} [f_2(x) - f_1(x)]\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Primjer 3. Izračunajmo površinu S zatvorenu među krivuljama (sl. 44)

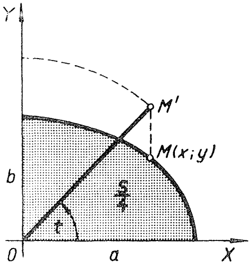
$$y = 2 - x^2 \quad \text{i} \quad y^3 = x^2. \tag{3}$$

Rješenje. Rješavajući sistem jednadžbi (3) nalazimo granice integriranja: $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$. Na osnovu formule (2) dobivamo:

$$S = \int_{-1}^{1} \left(2 - x^2 - x^{\frac{2}{3}}\right)\mathrm{d}x = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{3}\,x^{\frac{5}{3}}\right)_{-1}^{1} = 2\,\frac{2}{15}.$$



Slika 44.



Slika 45.

Ako je po dijelovima glatka krivulja zadana jednadžbama u parametarskom obliku $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, onda se površina krivocrtnog trapeza, omeđena tom krivuljom, sa dvije vertikale kojima su jednadžbe $x = a$ i $x = b$, te odsječkom osi OX, izražava integralom

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt,$$

gdje se t_1 i t_2 određuju iz jednadžbi

$$a = \varphi(t_1) \quad \text{i} \quad b = \varphi(t_2) \quad [\psi(t) \geqslant 0 \text{ u intervalu } [t_1, t_2].$$

Primjer 4. Nađimo površinu elipse S (sl. 45) pomoću njenih parametarskih jednadžbi

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \; (0 \leqslant t \leqslant 2\pi). \end{cases}$$

Rješenje. Zbog simetrije dovoljno je da izračunamo površinu jedne četvrtine elipse i zatim je pomnožimo sa četiri.

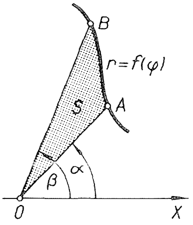
Stavljajući u jednadžbi $x = a\cos t$ najprije $x = 0$, zatim $x = a$ dobit ćemo granice integracije $t_1 = \frac{\pi}{2}$ i $t_2 = 0$. Prema tome imamo:

$$\frac{1}{4} S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\,(-\sin t)\,dt = ab \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \frac{\pi ab}{4} \quad \text{i iz toga} \quad S = \pi ab.$$

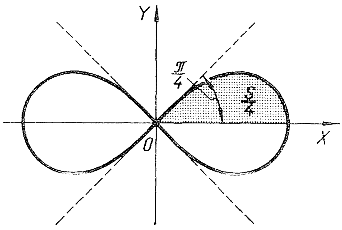
2°. Površina u polarnim koordinatama. Kada je neprekinuta krivulja zadana u polarnim koordinatama jednadžbom $r = f(\varphi)$, tada površinu isječka AOB (sl. 46) ograđenog lukom krivulje i sa dva polarna radijusa OA i OB s pripadnim vrijednostima $\varphi_1 = \alpha$ i $\varphi_2 = \beta$ možemo izraziti integralom

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2\,d\varphi.$$

Primjer 5. Nađimo površinu koju zatvara Bernoullijeva lemniskata $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ (sl. 47).



Slika 46.



Slika 47.

Rješenje. Zbog simetrije krivulje računamo najprije samo jednu četvrtinu tražene površine

$$\frac{1}{4} S = \frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$

Odatle je $S = a^2$.

1623. Izračunajte površinu omeđenu parabolom $y = 4x - x^2$ i osi apscisa.

1624. Izračunajte površinu omeđenu krivuljom $y = \ln x$, osi OX i pravcem $x = e$.

1625*. Nađite površinu omeđenu krivuljom $y = x(x-1)(x-2)$ i osi OX.

1626. Nađite površinu omeđenu krivuljom $y^3 = x$, pravcem $y = 1$ i vertikalom $x = 8$.

1627. Izračunajte površinu omeđenu jednim poluvalom sinusoide $y = \sin x$ i osi OX.

1628. Izračunajte površinu omeđenu krivuljom $y = \operatorname{tg} x$, osi OX i pravcem $x = \frac{\pi}{3}$.

1629. Nađite površinu omeđenu hiperbolom $xy = m^2$, vertikalama $x = a$ i $x = 3a$ $(a > 0)$ i osi OX.

1630. Nađite površinu koja se nalazi između «versiere» Marije Agnesi $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ i osi apscisa.

1631. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljom $y = x^3$, pravcem $y = 8$ i osi OY.

1632. Nađite površinu omeđenu parabolama $y^2 = 2px$ i $x^2 = 2py$.

1633. Izračunajte površinu omeđenu parabolom $y = 2x - x^2$ i pravcem $y = -x$.

1634. Izračunajte površinu odsječka koji od parabole $y = x^2$ odsijeca pravac $y = 3 - 2x$.

1635. Izračunajte površinu zatvorenu između parabola $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ i pravca $y = 2x$.

1636. Izračunajte površinu zatvorenu među parabolama $y = \frac{x^2}{3}$ i $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$.

1637. Izračunajte površinu omeđenu »versierom« Marija Agnesi $y = \frac{1}{1 + x^2}$ i parabolom $y = \frac{x^2}{2}$.

1638. Izračunajte površinu omeđenu krivuljama $y = e^x$, $y = e^{-x}$ i pravcem $x = 1$.

1639. Nađite površinu lika omeđenog hiperbolom $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ i pravcem $x = 2a$.

1640*. Nađite površinu omeđenu astroidom $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

1641. Nađite površinu između lančanice $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, osi OY i pravca

$$y = \frac{a}{2e}(e^2 + 1).$$

1642. Nađite površinu omeđenu krivuljom $a^2y^2 = x^2(a^2-x^2)$.

1643. Izračunajte površinu unutar krivulje

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

1644. Nađite površinu između istostrane hiperbole $x^2 - y^2 = 9$, osi OX i promjera koji prolazi tačkom (5; 4).

1645. Nađite površinu između krivulje $y = \frac{1}{x^2}$, osi OX i ordinate $x = 1$ $(x>1)$.

1646*. Nađite površinu omeđenu cisoidom $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ i njenom asimptotom $x = 2a$ $(a>0)$.

1647*. Nađite površinu između strofoide $y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a-x}$ i njene asimptote $(a>0)$.

1648. Izračunajte površinu obaju dijelova na koje parabola $y^2 = 2x$ dijeli krug $x^2+y^2 = 8$.

1649. Izračunajte površinu unutar kružnice $x^2+y^2=16$ i parabole $x^2=12(y-1)$.

1650. Nađite površinu unutar astroide $x = a\cos^3 t$; $y = b\sin^3 t$.

1651. Nađite površinu omeđenu osi OX i jednim lukom cikloide

$$x = a(t-\sin t), \qquad y = a(1-\cos t).$$

1652. Nađite površinu omeđenu jednom granom trohoide

$$\begin{cases} x = at - b\sin t, \\ y = a - b\cos t \end{cases} \qquad (0<b\leqslant a)$$

i tangentom u njenim najnižim tačkama.

1653. Nađite površinu omeđenu kardioidom

$$\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\sin t - \sin 2t). \end{cases}$$

1654*. Nađite površinu petlje Decartesova lista

$$x = \frac{3at}{1+t^3}; \qquad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

1655*. Nađite površinu lika omeđenog kardioidom $r = a(1+\cos\varphi)$.

1656*. Nađite površinu koja se nalazi između prvog i drugog zavoja Arhimedove spirale $r = a\varphi$ (sl. 48).

1657. Nađite površinu jedne latice krivulje

$$r = a \cos 2\varphi.$$

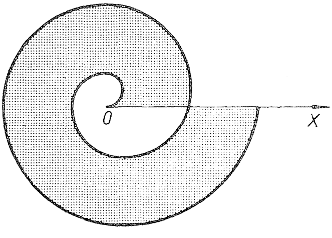
1658. Nađite površinu omeđenu krivuljom

$$r^2 = a^2 \sin 4\,\varphi.$$

1659*. Nađite površinu omeđenu krivuljom

$$r = a \sin 3\varphi.$$

1660. Nađite površinu omeđenu Pascalovim pužem $r = 2 + \cos\varphi$.



Slika 48.

1661. Nađite površinu omeđenu parabolom $r = a \sec^2 \frac{\varphi}{2}$ i poluzrakama $\varphi = \frac{\pi}{4}$ i $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

1662. Nađite površinu lika omeđenog elipsom $r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $(0 \leq \varepsilon < 1)$.

1663. Nađite površinu izvan kruga $r = a$ omeđenu krivuljom $r = 2a \cos 3\,\varphi$.

1664*. Nađite površinu omeđenu krivuljom $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

8. Duljina luka krivulje

1°. Duljina luka u pravokutnim koordinatama. Duljina s luka glatke krivulje između dvije tačke s apscisama $x = a$ i $x = b$ $(a < b)$, iznosi

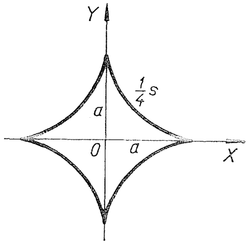
$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Primjer 1. Nađimo duljinu astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (sl. 49).

Rješenje. Deriviranjem jednadžbe astroide dobivamo:

$$y' = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}.$$

Prema tome je duljina luka četvrtine astroide:



Slika 49.

$$\frac{1}{4}s = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx = \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\,dx = \frac{3}{2}a.$$

Odatle dobivamo $s = 6a$.

2°. Duljina luka krivulje zadane parametarski. Ako je krivulja zadana jednadžbama u parametarskom obliku $x = \varphi(t)$ i $y = \psi(t)$ ($\varphi(t)$ i $\psi(t)$ su neprekinuto derivabilne funkcije), onda je duljina luka s krivulje

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, \mathrm{d}t,$$

gdje su t_1 i t_2 vrijednosti parametara koji odgovaraju krajevima luka ($t_1 < t_2$).

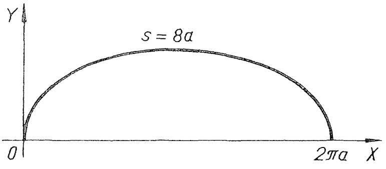
Primjer 2. Nađimo duljinu svoda (luka) cikloide (sl. 50)

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

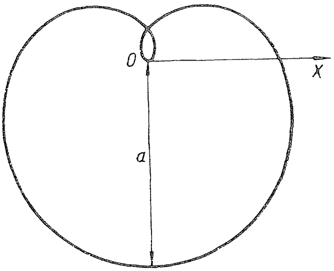
Rješenje. Imamo $x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(1 - \cos t)$ i $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a \sin t$. Prema tome je

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, \mathrm{d}t = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, \mathrm{d}t = 8a.$$

Granice integracije $t_1 = 0$ i $t_2 = 2\pi$ odgovaraju krajnjim tačkama svoda cikloide.



Slika 50.



Slika 51.

Ako je glatka krivulja zadana jednadžbom $r = r(\varphi)$ u polarnim koordinatama r i φ, onda duljina luka s iznosi

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\, \mathrm{d}\varphi,$$

gdje su α i β vrijednosti polarnog kuta u krajnjim tačkama luka ($\alpha < \beta$).

Primjer 3. Nađimo duljinu čitave krivulje $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ (sl. 51). Čitava krivulja opisana je tačkom (r, φ) kada se φ mijenja od 0 do 3π.

Rješenje. Imamo $r' = a \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3}$, pa prema tome čitava duljina krivulje iznosi

$$s = \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2 \sin^6 \frac{\varphi}{3} + a^2 \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cos^2 \frac{\varphi}{3}}\, \mathrm{d}\varphi = a \int_0^{3\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{3}\, \mathrm{d}\varphi = \frac{3\pi a}{2}.$$

1665. Izračunajte duljinu luka semikubne parabole $y^2 = x^3$ od ishodišta koordinatnog sistema do tačke kojoj su koordinate $x = 4$, $y = 8$.

1666*. Nađite duljinu luka lančanice $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ od vrha $A(0; a)$ do tačke $B(b; h)$.

1667. Izračunajte duljinu luka parabole $y = 2\sqrt{x}$ od $x = 0$ do $x = 1$.

1668. Nađite duljinu luka krivulje $y = e^x$ između tačaka $(0; 1)$ i $(1; e)$.

1669. Nađite duljinu luka krivulje $y = \ln x$ od $x = \sqrt{3}$ do $x = \sqrt{8}$.

1670. Nađite duljinu luka $y = \arcsin (e^{-x})$ od $x = 0$ do $x = 1$.

1671. Izračunajte duljinu luka krivulje $x = \ln \sec y$ između $y = 0$ i $y = \frac{\pi}{3}$.

1672. Nađite duljinu luka krivulje $x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln y$ od $y = 1$ do $y = e$.

1673. Nađite duljinu luka desne grane traktrise

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} + a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right| \quad \text{od } y = a \text{ do } y = b \quad (0 < b < a).$$

1674. Nađite duljinu luka zatvorenog dijela krivulje $9ay^2 = x(x - 3a)^2$.

1675. Nađite duljinu luka krivulje $y = \ln \left(\operatorname{cth} \frac{x}{2} \right)$ od $x = a$ do $x = b$ $(0 < a < b)$.

1676*. Nađite duljinu luka evolvente kružnice

$$\left.\begin{aligned} x &= a(\cos t + t \sin t), \\ y &= a(\sin t - t \cos t) \end{aligned}\right\} \quad \text{od } t = 0 \text{ do } t = T.$$

1677. Nađite duljinu evolute elipse

$$x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t; \qquad y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t \qquad (c^2 = a^2 - b^2,\ 0 < b < a).$$

1678. Nađite duljinu krivulje

$$\left.\begin{aligned} x &= a(2 \cos t - \cos 2t), \\ y &= a(2 \sin t - \sin 2t). \end{aligned}\right\}$$

1679. Nađite duljinu prvog zavoja Arhimedove spirale $r = a\varphi$.

1680. Nađite ukupnu duljinu kardioide $r = a(1 + \cos \varphi)$.

1681. Nađite duljinu luka dijela parabole $r = a \sec^2 \frac{\varphi}{2}$ koji od parabole odsijeca vertikalni pravac kroz pol.

1682. Nađite duljinu luka hiperbolne spirale

$$r\varphi = 1 \text{ od tačke } \left(2;\ \frac{1}{2}\right) \text{ do tačke } \left(\frac{1}{2}\ 2;\right).$$

1683. Nađite duljinu luka logaritamske spirale $r = ae^{m\varphi}$ $(m>0)$ koji je unutar kruga $r = a$.

1684. Nađite duljinu luka krivulje $\varphi = \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$ od $r = 1$ do $r = 3$.

9. Volumeni tijela

1°. Volumen rotacionog tijela. Volumen tijela nastalog rotacijom krivocrtnog trapeza omeđenog krivuljom $y = f(x)$, osi OX i dvjema vertikalama $x = a$ i $x = b$, oko osi OX ili OY, izražen je pripadno formulama:

$$1)\ V_X = \pi \int_a^b y^2\,dx; \qquad 2)\ V_Y = 2\pi \int_a^b xy\,dx\ ^{*)}.$$

Primjer 1. Izračunajmo volumen tijela nastalog rotacijom lika omeđenog jednim poluvalom sinusoide $y = \sin x$ i odsječkom $0 \leqslant x \leqslant \pi$ osi OX oko a) osi OX i b) osi OY.

Rješenje.

$$a)\ V_X = \pi \int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{\pi^2}{2}; \qquad b)\ V_Y = 2\pi \int_0^\pi x \sin x\,dx = 2\pi\,(-x\cos x + \sin x)_0^\pi = 2\pi^2.$$

Volumen tijela nastalog rotacijom oko osi OY lika omeđenog krivuljom $x = g(y)$, i sa dvije paralele $y = c$ i $y = d$ $(c < d)$, možemo odrediti pomoću formule:

$$V_Y = \pi \int_c^d x^2\,dy,$$

koju dobivamo iz ranije navedene formule 1) permutacijom koordinata x i y.

Ako je krivulja zadana u nekom drugom obliku (parametarski, u polarnim koordinatama itd.) onda u navedenim formulama moramo provesti odgovarajuću zamjenu varijable integracije.

U općenitijem slučaju volumen tijela nastalog rotacijom lika omeđenog krivuljama $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$ [pri čemu je $f_1(x) \leqslant f_2(x)$] i pravcima $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ oko koordinatne osi OX jest

$$V_X = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx\cdot$$

odnosno oko osi OY

$$V_Y = 2\pi \int_a^b x(y_2 - y_1)\,dx.$$

---

*) Neka je tijelo nastalo rotacijom oko osi OY krivocrtnog trapeza omeđenog neprekinutom krivuljom $y = f(x)$ i pravcima $x = a$ i $x = b$ $(a < b)$ i $y = 0$. Za element volumena toga tijela odabiremo volumen dijela tijela koji nastaje rotacijom pravokutnika sa stranicama y i dx oko osi OY i udaljenog za x od osi OY. Tada je element volumena $dY_Y = 2\pi xy$, odakle je $Y_Y = 2\pi \int_a^b xy\ dx$.

Primjer 2. Nađimo volumen torusa nastalog rotacijom kruga $x^2+(y-b)^2 \leqslant a^2$ $(b \geqslant a > 0)$ oko osi OX (sl. 52).

Rješenje. Imamo: $y_1 = b - \sqrt{a^2+x^2}$ i $y_2 = b + \sqrt{a^2-x^2}$.

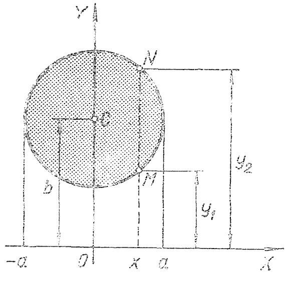
Prema tome je

$$V_X = \pi \int_{-a}^{a} [(b+\sqrt{a^2-x^2})^2 - (b-\sqrt{a^2-x^2})^2]\,dx = 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx = 2\pi^2 a^2 b$$

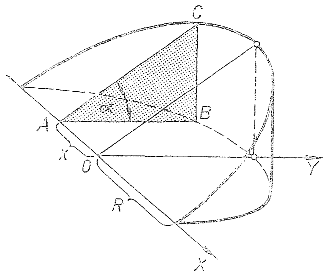
(posljednji integral rješava se supstitucijom $x = a \sin t$).

Volumen tijela nastalog rotacijom isječka omeđenog lukom krivulje $r = F(\varphi)$ i sa dva polarna radijusa $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, oko polarne osi, možemo izračunati ovom formulom:

$$V_P = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\varphi\, d\varphi.$$



Slika 52.



Slika 53.

Ova formula je preporučljiva pri traženju volumena nastalog rotacijom oko polarne osi lika koji je omeđen nekom zatvorenom krivuljom zadanom u polarnim koordinatama.

Primjer 3. Odredite volumen koji nastane rotacijom krivulje $r = a \sin 2\varphi$ oko polarne osi.

Rješenje.

$$V_P = 2 \cdot \frac{2}{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin\varphi\, d\varphi = \frac{4}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\varphi \sin\varphi\, d\varphi = \frac{32}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi \cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{64}{105}\pi a^3.$$

2°. **Izračunavanje volumena tijela pomoću poznatog poprečnog presjeka.** Ako je $S = S(x)$ površina presjeka tijela ravninom okomitom na neki pravac (koji uzimamo za os OX) u tački s apscisom x, onda je volumen tog tijela

$$V = \int_{x_1}^{x_2} S(x)\,dx,$$

gdje su x_1 i x_2 apscise krajnjih presjeka tijela $(x_1 < x_2)$.

Primjer 4. Odredimo volumen klina odsječenog od kružnog valjka ravninom koja prolazi kroz promjer baze i nagnuta je prema bazi za kut α. Polumjer baze je R (sl. 53).

Rješenje. Odaberimo za os OX promjer baze po kojem ravnina presijeca bazu, a za os OY promjer baze koji je okomit na OX. Jednadžba kružnice baze će biti $x^2+y^2=R^2$. Površina presjeka ABC udaljenog za x od ishodišta koordinata O, jednaka je

$$S(x)=\text{površina}\ \triangle\ ABC=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}yy\operatorname{tg}\alpha=\frac{y^2}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Prema tome je volumen klina

$$V=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^R y^2\operatorname{tg}\alpha\,dx=\operatorname{tg}\alpha\int_0^R(R^2-x^2)\,dx=\frac{2}{3}\operatorname{tg}\alpha\,R^3.$$

1685. Nađite volumen tijela nastalog rotacijom oko osi OX plohe omeđene s osi OX i parabolom $y=ax-x^2$ $(a>0)$.

1686. Nađite volumen elipsoida nastalog rotacijom elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ oko osi OX.

1687. Nađite volumen tijela nastalog rotacijom oko osi OX plohe omeđene lančanicom $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, osi OX i pravcima $x=\pm a$.

1688. Nađite volumen tijela nastalog rotacijom oko osi OX krivulje $y=\sin^2x$ u intervalu $x=0$ do $x=\pi$.

1689. Nađite volumen tijela nastalog rotacijom plohe omeđene semikubnom parabolom $y^2=x^3$, osi OX i pravcem $x=1$ oko osi OX.

1690. Nađite volumen tijela nastalog rotacijom plohe iz zadatka 1689 oko osi OY.

1691. Nađite volumen tijela nastalog rotacijom plohe omeđene linijama $y=e^x$, $x=0$, $y=0$ oko: a) osi OX i b) osi OY.

1692. Nađite volumen tijela nastalog rotacijom oko osi OY onog dijela parabole $y^2=4\,ax$ koji odsijeca pravac $x=a$.

1693. Nađite volumen tijela nastalog rotacijom oko pravca $x=a$ onog dijela parabole $y^2=4ax$ koji odsijeca taj pravac.

1694. Nađite volumen tijela nastalog rotacijom oko pravca $y=-p$ lika omeđenog parabolom $y^2=2px$ i pravcem $x=\frac{p}{2}$.

1695. Nađite volumen tijela nastalog rotacijom oko osi OX plohe koja se nalazi između parabola $y=x^2$ i $y=\sqrt{x}$.

1696. Nađite volumen tijela nastalog rotacijom oko osi OX petlje krivulje $(x-4a)\,y^2=ax\,(x-3a)$ $(a>0)$.

1697. Nađite volumen tijela nastalog rotacijom cisoide $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ oko njene asimptote $x=2a$.

1698. Nađite volumen rotacionog paraboloida kojemu je polumjer baze R, a visina H.

1699. Ravni parabolni odsječak kojem je baza $2a$ i visina h rotira oko baze. Odredite volumen rotacionog tijela koje pri tome nastane (Cavalierijev «limun»).

1700. Pokažite da je volumen tijela koje ravnina $x = 2a$ odsijeca od tijela nastalog rotacijom istostrane hiperbole $x^2-y^2 = a^2$ oko osi OX, jednak volumenu kugle polumjera a.

1701. Nađite volumen tijela nastalog rotacijom lika omeđenog jednim svodom cikloide $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ i osi OX, oko: a) osi OX, b) osi OY i c) osi simetrije lika.

1702. Nađite volumen tijela nastalog rotacijom astroide $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$ oko osi OY.

1703. Nađite volumen tijela nastalog rotacijom kardioide $r = a(1+\cos\varphi)$ oko polarne osi.

1704. Nađite volumen tijela nastalog rotacijom krivulje $r = a\cos^2\varphi$ oko polarne osi.

1705. Nađite volumen obeliska kome su paralelne baze pravokutnici sa stranicama A, B i a, b, a visina je h.

1706. Nađite volumen eliptičkog stošca kome je baza elipsa s poluosima a i b, a visina h.

1707. Na tetivama astroide $x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}$ paralelnim s osi OX konstruirani su kvadrati kojima su stranice jednake duljinama tetiva, a ravnine su im okomite na ravninu XOY. Nađite volumen tijela koje sačinjavaju ti kvadrati.

1708. Krug se mijenja i pomiče tako da jedna tačka njegove kružnice leži na osi OY, a centar opisuje elipsu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$, dok je ravnina kruga okomita na os OY. Nađite volumen tijela koje tvori taj krug.

1709. Ravnina pomičnog trokuta ostaje okomita na nepomični promjer kruga polumjera a. Baza trokuta je tetiva kruga, a vrh trokuta kliže po pravcu koji je paralelan s nepomičnim promjerom i od ravnine kruga udaljen za h. Nađite volumen tijela (nazvanog *konoidom*) koje nastaje pomicanjem tog trokuta od jednog do drugog kraja promjera.

1710. Nađite volumen tijela omeđenog valjcima $x^2+z^2 = a^2$ i $y^2+z^2 = a^2$.

1711. Nađite volumen odsječka koji ravnina $x = a$ odsijeca od eliptičkog paraboloida $\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q} \leqslant x$.

1712. Nađite volumen tijela omeđenog jednodijelnim hiperboloidom

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{i ravninama} \quad z = 0 \quad \text{i} \quad z = h.$$

1713. Nađite volumen elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$.

10. Površina rotacione plohe

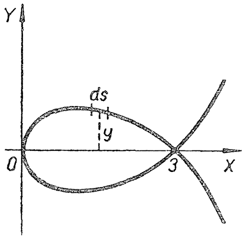
Površina plohe nastale rotacijom oko osi OX luka glatke krivulje $y=f(x)$ između tačaka $x=a$ i $x=b$ $(a<b)$ izračunava se formulom

$$S_X = 2\pi\int_a^b y\,\frac{ds}{dx}\,dx = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad (1)$$

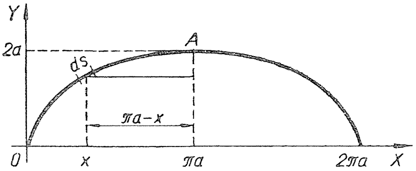
(ds je diferencijal luka krivulje).

Ako je jednadžba krivulje drukčije zadana, onda se površina S_X dobiva iz formule (1) odgovarajućom zamjenom varijabla.

Primjer 1. Nađimo površinu plohe nastale rotacijom oko osi OX petlje krivulje $9y^2=x(3-x)^2$ (sl. 54).



Slika 54.



Slika 55.

Rješenje. Za gornji dio krivulje za $0\leqslant x\leqslant 3$ imamo:

$y=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$. Odatle je diferencijal luka $ds=\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx$. Na temelju formule (1) površina plohe će biti

$$S=2\pi\int_0^3 \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}\,\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx = 3\pi.$$

Primjer 2. Nađimo površinu plohe nastale rotacijom jednog svoda cikloide $x=a(t-\sin t)$; $y=a(1\text{-}\cos t)$ oko njene osi simetrije (sl. 55).

Rješenje. Tražena površina nastane rotacijom luka OA oko pravca AB kojemu je jednadžba $x=\pi a$. Ako odaberemo y za nezavisnu varijablu i uzmemo u obzir da je os rotacije AB pomaknuta za πa od koordinatne osi OY imat ćemo:

$$S=2\pi\int_0^{2a}(\pi a-x)\,\frac{ds}{dy}\cdot dy.$$

Prijelazom na varijablu t dobivamo:

$$S=2\pi\int_0^{\pi}(\pi a-at-a\sin t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = 2\pi\int_0^{\pi}(\pi a-at+a\sin t)\,2a\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$=4\pi a^2\int_0^{\pi}\left(\pi\sin\frac{t}{2}-t\sin\frac{t}{2}+\sin t\sin\frac{t}{2}\right)dt =$$

$$=4\pi a^2\left[-2\pi\cos\frac{t}{2}+2t\cos\frac{t}{2}-4\sin\frac{t}{2}+\frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right]_0^{\pi} = 8\pi\left(\pi-\frac{4}{3}\right)a^2.$$

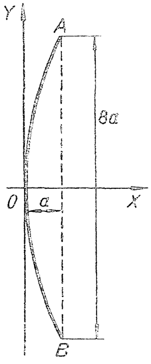
1714. Dimenzije paraboličnog zrcala AOB označene su na sl. 56. Treba naći površinu plohe tog zrcala.

1715. Nađite površinu plohe »vretena« koje se dobiva vrtnjom jednog poluvala sinusoide $y = \sin x$ oko osi OX.

1716. Nađite površinu plohe nastale rotacijom dijela tangentoide $y = \operatorname{tg} x$ od $x = 0$ do $x = \frac{\pi}{4}$ oko osi OX.

1717. Nađite površinu plohe nastale rotacijom oko osi OX luka krivulje $y = e^{-x}$ od $x = 0$ do $x = +\infty$.

1718. Nađite površinu plohe (nazvane *katenoidom*) nastale rotacijom lančanice $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ oko osi OX u intervalu od $x = 0$ do $x = a$.



Slika 56.

1719. Nađite površinu plohe nastale rotacijom astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ oko osi OY.

1720. Nađite površinu plohe nastale rotacijom krivulje $x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln y$ oko osi OX od $y = 1$ do $y = e$.

1721*. Nađite površinu torusa nastalog rotacijom kružnice $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ oko osi OX $(b > a)$.

1722. Nađite površinu plohe nastale rotacijom elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ oko: 1) osi OX; 2) osi OY $(a > b)$.

1723. Nađite površinu plohe nastale rotacijom jednog svoda cikloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, oko: a) osi OX; b) osi OY; c) tangente na cikloidu u njenoj najvišoj tački.

1724. Nađite površinu plohe nastale rotacijom oko osi OX kardioide

$$\left.\begin{aligned} x &= a(2\cos t - \cos 2t), \\ y &= a(2\sin t - \sin 2t). \end{aligned}\right\}$$

1725. Odredite površinu plohe nastale rotacijom lemniskate $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ oko polarne osi.

1726. Nađite površinu plohe nastale rotacijom kardioide $r = 2a(1 + \cos \varphi)$ oko polarne osi.

11. Momenti. Težište. Guldinovi teoremi

1°. Statički moment. *Statičkim momentom* s obzirom na os l materijalne tačke A mase m udaljene za d od osi l nazivamo vrijednost $M_l = md$.

Statičkim momentom s obzirom na os l sistema n materijalnih tačaka s masama $m_1, m_2, \ldots m_n$, koje leže u istoj ravnini s osi i udaljene su od nje za $d_1, d_2, \ldots, d_n$ nazivamo sumu

$$M_l = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i, \tag{1}$$

pri čemu udaljenosti tačaka koje leže s jedne strane osi l uzimamo s predznakom (+), a one s druge strane s predznakom (−). Analogno određujemo *statički moment sistema tačaka* s obzirom na ravninu.

Ako masa neprekinuto ispunjava liniju ili lik ravnine XOY, onda statičke momente M_X i M_Y s obzirom na koordinatne osi OX i OY umjesto sumom (1) izražavamo pripadnim integralima. Za geometrijske likove smatramo da je gustoća jednaka jedinici.

Napose: 1) za krivulju $x = x(s)$, $y = y(s)$ gdje je parametar s duljina luka, imamo:

$$M_X = \int_0^L y(s)\,\mathrm{d}s; \qquad M_Y = \int_0^L x(s)\,\mathrm{d}s \tag{2}$$

($\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$ je diferencijal luka, a L duljina čitave krivulje);

2) Za ravninski lik omeđen krivuljom $y = y(x)$, osi OX i sa dvije vertikale $x = a$ i $y = b$, $(a < b)$, dobivamo

$$M_X = \frac{1}{2}\int_a^b y\,|y|\,\mathrm{d}x; \quad M_Y = \int_a^b x\,|y|\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

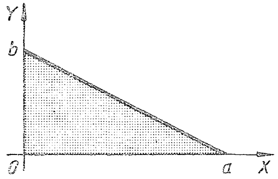
Primjer 1. Nađimo statički moment s obzirom na osi OX i OY trokuta omeđenog pravcima: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $x = 0$, $y = 0$ (sl. 57).

Rješenje. Ovdje je $y = b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$. Primjenom formule (3) dobijemo

$$M_X = \frac{b^2}{2}\int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{ab^2}{6}$$

i

$$M_Y = b\int_0^a x\left(1 - \frac{x}{a}\right)\mathrm{d}x = \frac{a^2b}{6}.$$



Slika 57.

2°. Moment tromosti (inercije). *Momentom tromosti* s obzirom na os l, materijalne tačke mase m udaljene od osi l za d, nazivamo broj $I_l = md^2$.

Momentom tromosti s obzirom na os l, sistema od n materijalnih tačaka s masama m_1, $m_2, \ldots, m_n$ nazivamo sumu

$$I_l = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2,$$

gdje su $d_1, d_2, \ldots, d_n$ udaljenosti tačaka od osi l. Za slučaj neprekinute razdijeljene mase, umjesto sume dobivamo odgovarajući integral.

Primjer 2. Nađimo moment tromosti trokuta s bazom b i visinom h s obzirom na njegovu bazu.

Rješenje. Bazu trokuta uzet ćemo za os OX, a njegovu visinu za os OY (sl. 58).

Rastavimo trokut na neizmjerno tanke horizontalne trake širine $\mathrm{d}y$ koje predstavljaju elementarne mase $\mathrm{d}m$. Koristeći se sličnošću trokuta dobivamo:

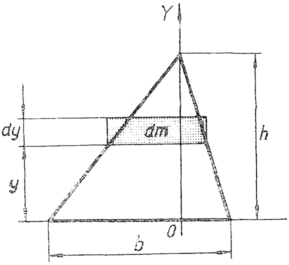
$$\mathrm{d}m = b\,\frac{h-y}{h}\,\mathrm{d}y$$

i

$$\mathrm{d}I_X = y^2\,\mathrm{d}m = \frac{b}{h}\,y^2(h-y)\,\mathrm{d}y.$$

Odatle je

$$I_X = \frac{b}{h}\int_0^h y^2(h-y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{12}\,bh^3.$$



Slika 58.

3°. Težište. *Koordinate težišta* ravninske krivulje (ili lika) mase m računamo po formulama

$$\bar{x} = \frac{m_y}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{m_x}{m},$$

gdje su M_X i M_Y statički momenti mase. Za geometrijske likove masa M je brojčano jednaka pripadnoj duljini luka ili površini.

Za koordinate težišta $(\bar{x}, \bar{y})$ luka glatke krivulje u ravnini $y=f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, koji spaja tačke $A(a; f(a))$ i $B(b; f(b))$, imamo:

$$\bar{x} = \frac{\int\limits_A^B x\,ds}{s} = \frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx}, \qquad \bar{y} = \frac{\int\limits_A^B y\,ds}{s} = \frac{\int\limits_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx}. \ ^{*)}$$

Koordinate težišta $(\bar{x}, \bar{y})$ krivocrtnog trapeza $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ možemo izračunati po formulama

$$\bar{x} = \frac{\int\limits_a^b xy\,dx}{S}, \qquad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2\,dx}{S},$$

gdje je $S = \int\limits_a^b y\,dx$ površina lika.

Analogne formule vrijede za koordinate težišta tijela.

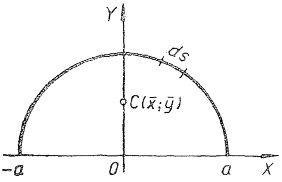
Primjer 3. Nađimo težište luka polukružnice $x^2+y^2=a^2$ $(y \geqslant 0)$ (sl. 59).

Rješenje. Imamo

$$y = \sqrt{a^2-x^2}; \quad y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

i

$$ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$



Slika 59.

Odatle je

$$M_Y = \int\limits_{-a}^{a} x\,ds = \int\limits_{-a}^{a} \frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = 0,$$

$$M_X = \int\limits_{-a}^{a} y\,ds = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,\frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2a^2, \qquad M = \int\limits_{-a}^{a} \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \pi a.$$

Prema tome je

$$\bar{x} = 0; \quad \bar{y} = \frac{2}{\pi}a.$$

4°. Guldinovi teoremi.

Teorem 1. Površina plohe nastale rotacijom luka ravninske krivulje oko neke osi koja je u istoj ravnini s krivuljom, ali je ne siječe, jednaka je produktu duljine luka s duljinom kružnice koju opisuje težište luka krivulje.

---

*) Definiciju krivuljnih integrala $\int\limits_A^B x\,ds$ i $\int\limits_A^B y\,ds$ vidite u gl. VII, **9**, 1°.

Teorem 2. Volumen tijela nastalog rotacijom ravninskog lika oko neke osi koja leži u ravnini lika, ali ga ne siječe, jednaka je produktu površine tog lika s duljinom kružnice koju opisuje težište lika.

1727. Nađite statičke momente, s obzirom na koordinatne osi, odsječka pravca

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

zatvorenog među koordinatnim osima.

1728. Nađite statičke momente pravokutnika sa stranicama a i b s obzirom na njegove stranice.

1729. Nađite statičke momente s obzirom na osi OX i OY i koordinate težišta trokuta, omeđenog pravcima: $x+y=a$, $x=0$ i $y=0$.

1730. Nađite statičke momente s obzirom na osi OX i OY i koordinate težišta luka astroide

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3},$$

koji leži u prvom kvadrantu.

1731. Nađite statički moment kružnice

$$r=2a\sin\varphi$$

s obzirom na polarnu os.

1732. Nađite koordinate težišta luka lančanice

$$y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$$

od $x=-a$ do $x=a$.

1733. Nađite težište luka kružnice polumjera a nad kutom 2α.

1734. Nađite koordinate težišta luka prvog svoda cikloide

$$x=a(t-\sin t);\quad y=a(1-\cos t)$$

$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

1735. Nađite koordinate težišta lika omeđenog elipsom $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ i koordinatnim osima OX i OY $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$.

1736. Nađite koordinate težišta lika omeđenog krivuljama

$$y=x^2;\quad y=\sqrt{x}.$$

1737. Nađite koordinate težišta lika omeđenog prvim svodom cikloide

$$x=a(t-\sin t);\quad y=a(1-\cos t)$$

i osi OX.

1738.** Nađite težište polovice kugline plohe polumjera a sa središtem u ishodištu koordinatnih osi, smještene nad ravninom XOY.

1739.** Nađite težište homogenog uspravnog kružnog stošca s polumjerom r i visinom h.

1740.** Nađite težište homogene polukugle (tijela) polumjera a sa središtem u ishodištu koordinatnih osi, smještene iznad ravnine XOY.

1741. Nađite moment tromosti kružnice polumjera a s obzirom na njen promjer.

1742. Nađite momente tromosti pravokutnika sa stranicama a i b s obzirom na njegove stranice.

1743. Nađite moment tromosti uspravnog parabolnog odječka s bazom $2b$ i visinom h s obzirom na njegovu os simetrije.

1744. Nađite moment tromosti površine elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ s obzirom na njene glavne osi.

1745.** Nađite polarni moment tromosti kružnog prstena s polumjerima R_1 i R_2 $(R_1<R_2)$, tj. moment tromosti s obzirom na os koja prolazi kroz središte prstena i okomita je na njegovu ravninu.

1746.** Nađite moment tromosti homogenog uspravnog kružnog stošca s polumjerom baze R i visinom H, s obzirom na njegovu os.

1747.** Nađite moment tromosti homogene kugle polumjera a i mase M s obzirom na njen promjer.

1748. Nađite površinu i volumen torusa nastalog rotacijom kruga polumjera a oko osi koja je u ravnini kruga i udaljena za b $(b \geqslant a)$ od njegova središta.

1749. a) Odredite položaj težišta luka astroide $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, koji leži u prvom kvadrantu.

b) Nađite težište lika omeđenog krivuljama $y^2=2px$ i $x^2=2py$.

1750.** a) Nađite težište polukruga pomoću Guldinova teorema.

b) Dokažite pomoću Guldinova teorema da je težište trokuta pomaknuto od njegove baze za trećinu visine.

12. Primjena određenih integrala na rješavanje zadataka iz fizike

1°. Put koji prijeđe tačka. Ako se tačka giba po nekoj krivulji, i apsolutna veličina njene brzine $v=f(t)$ je poznata funkcija vremena t, onda je put koji prijeđe tačka u intervalu vremena $[t_1, t_2]$

$$s=\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt.$$

Primjer 1. Brzina tačke je

$$v=0{,}1\,t^3 \text{ m/s}.$$

Nađimo put s kojeg prijeđe tačka u vremenu $T=10$ sekundi od početka gibanja. Kolika je srednja brzina gibanja za to vrijeme?

Rješenje. Imamo:

$$s=\int_0^{10} 0{,}1\,t^3\,dt=0{,}1\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^{10}=250 \text{ m} \quad \text{i} \quad v_{sr}=\frac{s}{T}=25 \text{ m/s}.$$

2°. **Rad sile.** Ako promjenjiva sila $X=f(x)$ djeluje u smjeru osi OX, onda je *rad sile* u intervalu $[x_1, x_2]$

$$A=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Primjer 2. Koliki rad treba utrošiti da se opruga rastegne za 6 cm ako sila od 1 kp rastegne oprugu za 1 cm?

Rješenje. Po Hookovu zakonu sila X kp, koja rasteže oprugu za x_{m}, iznosi $X=kx$, gdje je k koeficijent proporcionalnosti.
Pretpostavivši da je $x=0{,}01$ m i $X=1$ kp dobivamo $k=100$ i prema tome $X=100\,x$.
Odatle je traženi rad

$$A=\int_0^{0{,}06} 100x\,\mathrm{d}x = 50x^2 \Big|_0^{0{,}06} = 0{,}18 \text{ kpm}.$$

3°. **Kinetička energija.** *Kinetičkom energijom* materijalne tačke mase m i brzine v nazivamo izraz

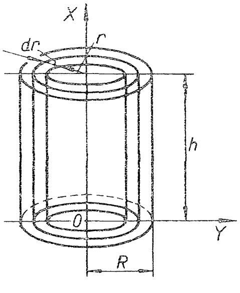
$$K=\frac{mv^2}{2}.$$

Kinetička energija sistema od n materijalnih tačaka s masama $m_1, m_2, \ldots, m_n$ i pripadnim brzinama $v_1, v_2, \ldots, v_n$ jednaka je

$$K=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2}. \qquad (1)$$

Za određivanje kinetičke energije tijela rastavljamo to tijelo na određeni način na elementarne čestice (koje imaju ulogu materijalnih tačaka) a zatim, sumirajući kinetičke energije tih čestica, u limesu umjesto sume (1) dobivamo integral.

Primjer 3. Nađimo kinetičku energiju homogenog kružnog valjka gustoće δ s polumjerom baze R i visinom h, koji se vrti kutnom brzinom ω oko svoje osi.



Slika 60.

Rješenje. Za elementarnu masu dm odabiremo masu šupljeg valjka visine h, s unutarnjim polumjerom r i debljinom stijenke dr (sl. 60). Imamo

$$\mathrm{d}m = 2\pi r\cdot h\delta\,\mathrm{d}r.$$

Kako linearna brzina mase dm iznosi $v=r\omega$, to je elementarna kinetička energija

$$\mathrm{d}K=\frac{v^2\,\mathrm{d}m}{2}=\pi r^3\omega^2\,h\delta\,\mathrm{d}r\,.$$

Odatle je

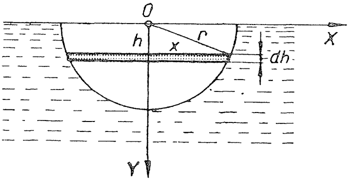
$$K=\pi\omega^2\,h\delta\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r=\frac{\pi\omega^2\,\delta R^4\,h}{4}\,.$$

4°. Pritisak tekućine. Za računanje sile *pritiska tekućine* koristimo se Pascalovim zakonom, po kome pritisak tekućine na površinu S uronjenu na dubinu h iznosi

$$P = \gamma h S,$$

gdje je γ gustoća tekućine.

Primjer 4. Nađimo pritisak na polukrug polumjera r uronjenog vertikalno u vodu tako da se njegov promjer podudara s površinom vode (sl. 61).



Slika 61.

Rješenje. Podijelimo površinu polukruga na elemente (trake) paralelne površini vode. Površina jednog takvog elementa (ako odbacimo beskonačno male višeg reda) udaljenog za h od površine iznosi

$$dS = 2x\,dh = 2\sqrt{r^2-h^2}\,dh.$$

Pritiska, koji djeluje na taj element, jest

$$dP = \gamma h\,ds = 2\gamma h\sqrt{r^2-h^2}\,dh,$$

gdje je γ gustoća vode jednaka jedinici.

Odatle je ukupni pritisak

$$P = 2\int_0^r h\sqrt{r^2-h^2}\,dh = -\frac{2}{3}(r^2-h^2)^{3/2}\Big|_0^r = \frac{2}{3}r^3.$$

1751. Brzina tijela bačenog vertikalno uvis početnom brzinom v_0, uz zanemareni otpor uzduha, dana je formulom

$$v = v_0 - gt,$$

gdje je t proteklo vrijeme i g ubrzanje sile teže. Na kojoj će se udaljenosti od početnog položaja nalaziti tijelo nakon t sekundi od trenutka izbacivanja?

1752. Brzina tijela bačenog vertikalno uvis početnom brzinom v_0, uz otpor uzduha, dana je formulom

$$v = c\cdot\operatorname{tg}\left(-\frac{g}{c}t + \operatorname{arctg}\frac{v_0}{c}\right),$$

gdje je t proteklo vrijeme, g ubrzanje sile teže i c konstanta. Nađite visinu leta tijela.

1753. Tačka osi OX vrši harmonijsko njihanje oko ishodišta koordinata pri čemu je njena brzina dana formulom

$$v = v_0\cos\omega t,$$

gdje je t vrijeme, a v_0 i ω su konstante.

Nađite zakon njihanja tačke ako je ona za $t = 0$ imala apscisu $x = 0$. Kolika je srednja vrijednost apsolutne vrijenosti brzine tačke za period njihanja?

1754. Brzina gibanja tačke iznosi $v = te^{-0,01t}$ m/s. Nađite put koji prijeđe tačka od početka gibanja do potpunog zaustavljanja.

1755. Raketni projektil leti vertikalno uvis. Smatrajući da uz konstantnu silu težu ubrzanje rakete na račun smanjenja njene težine raste po zakonu $j = \frac{A}{a - bt}$ $(a - bt > 0)$, nađite brzinu rakete u nekom trenutku t, ako je njena početna brzina bila nula. Nađite također visinu koju je raketa postigla u trenutku $t = t_1$.

1756*. Izračunajte rad koji treba utrošiti da se iscrpe voda iz vertikalnog valjkastog rezervoara polumjera baze R i visine H.

1757. Izračunajte rad koji treba utrošiti da se iscrpe voda iz konične posude okrenute vrhom nadolje, kojoj je polumjer baze R i visina H.

1758. Izračunajte rad koji treba utrošiti da se iscrpe voda iz polusfernog kotla kojem je polumjer $R = 10$ m.

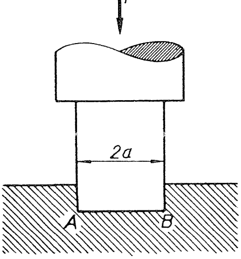
1759. Izračunajte rad koji treba utrošiti da se iscrpe ulje kroz gornji otvor horizontalne cisterne valjkastog oblika s bazom polumjera R i duljinom H, ako je gustoća ulja γ.

1760.** Koliki rad treba utrošiti da se tijelo mase m digne s površine Zemlje koja ima polumjer R na visinu h? Koliki je rad potreban da se tijelo udalji do neizmjernosti?

1761.** Električni naboji $e_0 = 100$ CGSE i $e_1 = 200$ CGSE nalaze se na osi OX u pripadnim tačkama $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$ cm. Koji se rad proizvede ako se drugi naboj premjesti u tačku $x_2 = 10$ cm?

1762.** Cilindar s pomičnim klipom promjera $D = 20$ cm i duljine $l = 80$ cm ispunjen je parom tlaka $p = 10$ kp/cm^2. Koliki rad treba utrošiti da se pri nepromijenjenoj temperaturi (izotermički proces) volumen pare smanji na polovinu?

1763.** Odredite rad proizveden pri adijabatskom širenju zraka početnog volumena $V_0 = 1$ m^3 i tlaka $p_0 = 1$ kp/cm^2, do volumena $V_1 = 10$ m^3.



Slika 62.

1764.** Vertikalna osovina težine P i polumjera a podupire se na ležaj AB (sl. 62). Sila trenja među malim dijelom σ baze osovine i priležeće površine ležaja je $F = \mu p \sigma$, gdje je $p =$ const. pritisak baze na jedinicu površine ležaja, a μ je koeficijent trenja. Nađite rad sile trenja za jedan okretaj osovine.

1765.** Izračunajte kinetičku energiju diska mase M i polumjera R koji se vrti kutnom brzinom ω oko osi kroz centar diska koja je okomita na njegovu ravninu.

1766. Izračunajte kinetičku energiju uspravnog kružnog stošca mase M, koji se vrti kutnom brzinom ω oko svoje osi, ako je polumjer baze stošca R, a visina H.

1767*. Koliki rad treba utrošiti za zaustavljanje željezne kugle polumjera $R = 2$ m koja se vrti kutnom brzinom $\omega \equiv 1000$ o/min oko svog promjera? (specifična masa željeza $\gamma = 7{,}8$ g/cm^3).

1768. Vertikalni trokut s bazom b i visinom h uronjen je u vodu vrhom nadolje tako da se njegova baza nalazi na površini vode. Nađite pritisak vode.

1769. Vertikalna brana ima oblik trapeza. Izračunajte pritisak vode na čitavu branu, ako je poznato da je gornja baza brane $a = 70$ m, donja baza $b = 50$ m, a visina brane $h = 20$ m.

1770. Nađite pritisak tekućine specifične mase γ na vertikalnu elipsu s osima $2a$ i $2b$ kojoj je centar uronjen u tekućinu na dubinu h, pri čemu je velika os $2a$ elipse paralelna nivou tekućine ($h \geqslant b$).

1771. Nađite pritisak vode na vertikalni kružni stožac s polumjerom baze R i visinom H, koji je uronjen u vodu vrhom nadolje tako da se njegova baza nalazi na površini vode.

Razni zadaci

1772. Nađite masu šipke duljine $l = 100$ cm, ako je linearna gustoća na udaljenosti x cm od jednog kraja

$$\delta = 2 + 0{,}001\, x^2 \text{ g/cm}.$$

1773. Prema empirijskim podacima specifična toplina vode pri temperaturi t°C ($0 \leqslant t \leqslant 100°$) jednaka je

$$c = 0{,}9983 - 5{,}184 \cdot 10^{-5}\, t + 6{,}912 \cdot 10^{-7}\, t^2.$$

Koliku toplinu treba utrošiti da se 1 g vode zagrije od temperature 0 °C do temperature 100 °C?

1774. Vjetar proizvodi jednolik tlak p p/cm^2 na vrata širine b cm i visine h cm. Nađite moment pritiska vjetra koji nastoji zakrenuti vrata oko šarnira.

1775. S kakvom silom privlačenja djeluje materijalna šipka duljine l i mase M na materijalnu tačku mase m koja se nalazi na istom pravcu sa šipkom udaljena za a od jednog kraja šipke?

1776.** Pri ustaljenom laminarnom (strujnom) toku tekućine kroz cijev kružnog presjeka polumjera a brzina v u tački tekućine, koja se nalazi na udaljenosti r od osi cijevi, dana je formulom

$$v = \frac{p}{4\mu l}(a^2 - r^2),$$

gdje je p razlika tlaka tekućine na krajevima cijevi, μ koeficijent viskoznosti, l duljina cijevi. Odredite *protok tekućine* Q, tj. količinu tekućine koja protječe kroz poprečni presjek cijevi u jedinici vremena.

1777*. Uvjeti su isti kao u zadatku 1776, ali je cijev pravokutnog presjeka pri čemu je baza a velika u usporedbi s visinom $2b$. U tom je slučaju brzina protjecanja v u tački $M(x, y)$ određena formulom

$$v = \frac{p}{2\mu l}\left[b^2 - (b - y)^2\right].$$

Odredite protok tekućine Q.

1778.** Pri izučavanju dinamičkih svojstava automobila često se konstruira specijalni dijagram: na osi apscisa nanose se brzine v, na osi ordinata recipročne vrijednosti odgovarajućih ubrzanja a. Pokažite da je površina S, omeđena lukom tog grafa, sa dvije ordinate $v = v_1$ i $v = v_2$ i osi apscisa, brojčano jednaka vremenu potrebnom za ubrzanje automobila od v_1 do v_2 (*vrijeme zaleta*).

1779. Horizontalna greda duljine l nalazi se u ravnoteži pod djelovanjem tereta koji djeluje prema dolje, jednoliko raspodijeljenog na dužini grede, i reakcijama u uporištima A i B $\left(A = B = \frac{Q}{2}\right)$, usmjerenih vertikalno nagore. Nađite moment savijanja M_x u poprečnom presjeku x, tj. moment s obzirom na tačku P s apscisom x svih sila koje djeluju na dio grede AP.

1780. Horizontalna greda duljine l nalazi se u ravnoteži pod djelovanjem reakcija u uporištima A i B i tereta raspoređenog po duljini grede intenzitetom $q = kx$, gdje je x udaljenost od lijevog ležaja x a k konstantni koeficijent. Nađite moment savijanja M_x u presjeku x.

Napomena: Intenzitetom raspodjele tereta nazivamo teret (silu) po jedinici duljine.

1781*. Nađite količinu topline proizvedene izmjeničnom sinusnom strujom

$$I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi\right)$$

u toku perioda T u vodiču s otporom R. Ovdje je I_0 amplituda, t vrijeme, a φ faza.

GLAVA VI

FUNKCIJE VIŠE VARIJABLI

1. Osnovni pojmovi

1°. Pojam funkcije nekoliko varijabli. Označivanje funkcija. Varijablu z nazivamo jednoznačnom *funkcijom* dviju varijabli x, y, ako svakom paru njihovih vrijednosti (x, y) iz danog područja odgovara jednoznačno određena vrijednost z. Varijable x, y nazivamo *argumentima* ili *nezavisnim varijablama.* Funkcionalnu zavisnost označavamo ovako:

$$z = f(x, y), \quad \text{ili} \quad z = F(x, y)$$

i slično.

Analogno se definiraju funkcije triju i više argumenata.

Primjer 1. Izrazimo volumen stošca V kao funkciju njegove izvodnice x i polumjera baze y.

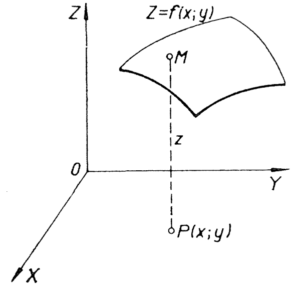
Rješenje. Iz geometrije nam je poznato da je volumen stošca

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 h,$$

gdje je h visina stošca, za koju vrijedi $h = \sqrt{x^2 - y^2}$. Prema tome je

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 \sqrt{x^2 - y^2}.$$

To je upravo tražena funkcionalna zavisnost.



Slika 63.

Vrijednost funkcije $z = f(x, y)$ u tački $P(a, b)$ tj. za $x = a$ i $y = b$ označavamo sa $f(a, b)$ ili $f(P)$. Geometrijska slika funkcije $z = f(x, y)$ u pravokutnom koordinatnom sistemu X, Y, Z, općenito je neka ploha (sl. 63).

Primjer 2. Nađimo $f(2, -3)$ i $f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$ ako je $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$.

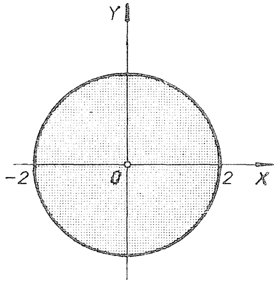
Rješenje. Uvrštenjem $x=2$ i $y=-3$ dobivamo:

$$f(2,\ -3)=\frac{2^2+(-3)^2}{2\cdot 2\cdot(-3)}=-\frac{13}{12}.$$

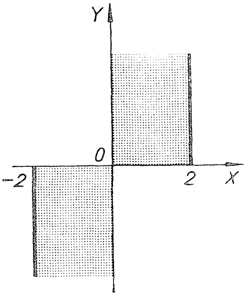
Uvrštenjem $x=1$ i zamjenom y sa $\frac{y}{x}$ dobit ćemo:

$$f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\cdot 1\left(\frac{y}{x}\right)}=\frac{x^2+y^2}{2xy},\quad \text{tj.}\quad f\left(1,\frac{y}{x}\right)=f(x,y).$$

2°. Područje egzistencije funkcije. Pod *područjem egzistencije* (*definicije*) funkcije $z=f(x,y)$ razumijevamo skup tačaka (x,y) ravnine XOY, u kojoj je dana funkcija definirana (tj. poprima određene realne vrijednosti). U jednostavnijim slučajevima područje egzistencije funkcije je konačan ili beskonačan dio koordinatne ravnine OXY, ograničene jednom ili sa nekoliko krivulja (*granica područja*).



Slika 64.



Slika 65.

Analogno za funkcije triju varijabli $u=f(x,y,z)$ područje egzistencije funkcije je neko tijelo u prostoru $OXYZ$.

Primjer 3. Nađimo područje egzistencije funkcije

$$z=\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

Rješenje. Funkcija ima realne vrijednosti ako je $4-x^2-y^2>0$ ili $x^2+y^2<4$. Drugu nejednadžbu zadovoljavaju koordinate tačaka koje leže unutar kružnice polumjera 2 sa središtem u ishodištu koordinatnog sistema. Područje egzistencije funkcije je unutrašnjost tog kruga (sl. 64).

Primjer 4. Nađimo područje egzistencije funkcije

$$z=\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{xy}.$$

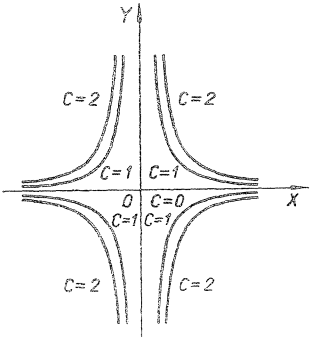
Rješenje. Prvi pribrojnik funkcije definiran je za $-1\leqslant\frac{x}{2}\leqslant 1$ ili $-2\leqslant x\leqslant 2$. Drugi pribrojnik ima realne vrijednosti ako je $xy\geqslant 0$, tj. u dva slučaja: za $\begin{cases}x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$ ili za $\begin{cases}x\leqslant 0\\ y\leqslant 0\end{cases}$. Područje egzistencije čitave funkcije nacrtano je na sl. 65 i uključuje granice područja.

3°. Nivo-linije i nivo-plohe funkcije. *Nivo-linijom* funkcije $z=f(x, y)$ nazivamo takvu liniju $f(x, y)=C$ u ravnini XOY, u čijim tačkama funkcija prima jednu te istu vrijednost $z=C$ (obično unesena na crtež u obliku kota).

Nivo-plohama funkcije triju argumenata $u=f(x, y, z)$ nazivamo takvu plohu $f(x, y, z)=C$ u čijim tačkama funkcija prima konstantnu vrijednost $u=C$.

Primjer 5. Nacrtajmo nivo-liniju funkcije $z=x^2y$.

Rješenje. Jednadžba nivo-linije ima oblik $x^2y=C$ ili $y=\dfrac{C}{x^2}$. Pretpostavimo li da je $C=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, dobijemo porodicu nivo-linija (sl. 66).



Slika 66.

1782. Izrazite volumen V pravilne četverostrane piramide kao funkciju njene visine x i pobočnog brida y.

1783. Izrazite površinu S plašta pravilne šesterostrane krnje piramide kao funkciju stranica x i y baze a, i visine z.

1784. Izračunajte $f\left(\dfrac{1}{2}, 3\right)$, $f(1, -1)$, ako je

$$f(x, y)=xy+\frac{x}{y}.$$

1785. Izračunajte $f(y, x)$, $f(-x, -y)$, $f\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right)$, $\dfrac{1}{f(x, y)}$, ako je

$$f(x, y)=\frac{x^2-y^2}{2xy}.$$

1786. Nađite vrijednosti koje dobiva funkcija

$$f(x, y)=1+x-y$$

u tačkama parabole $y=x^2$ i nacrtajte graf funkcije

$$F(x)=f(x, x^2).$$

1787. Nađite vrijednost funkcije

$$z = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2}$$

u tačkama kružnice $x^2 + y^2 = R^2$.

1788*. Odredite $f(x)$ ako je

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} \quad (xy > 0).$$

1789.** Nađite $f(x, y)$ ako je $f(x + y,\ x - y) = xy + y^2$.

1790*. Neka je $z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1)$. Odredite funkcije f i z ako je $z = x$ za $y = 1$.

1791.** Neka je $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$. Odredite funkcije f i z, ako je $z = \sqrt{1 + y^2}$ za $x = 1$

1792. Nađite i nacrtajte područja egzistencije ovih funkcija:

a) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

b) $z = 1 + \sqrt{-(x - y)^2}$;

c) $z = \ln(x + y)$;

d) $z = x + \arccos y$;

e) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$;

f) $z = \arcsin \frac{y}{x}$;

g) $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$;

h) $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)(2a^2 - x^2 - y^2)} \quad (a > 0)$;

i) $z = \sqrt{y \sin x}$;

j) $z = \ln(x^2 + y)$;

k) $z = \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + x^2y^2}$;

l) $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$;

m) $z = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$;

n) $z = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{y}$;

o) $z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$.

1793. Nađite područja egzistencije ovih funkcija triju argumenata:

a) $u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$;

b) $u = \ln(xyz)$;

c) $u = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z$;

d) $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$.

1794. Nacrtajte nivo-linije danih funkcija i ispitajte karakter ploha koje odgovaraju tim funkcijama:

a) $z = x + y$;

b) $z = x^2 + y^2$;

c) $z = x^2 - y^2$;

d) $z = \sqrt{xy}$;

e) $z = (1 + x + y)^2$;

f) $z = 1 - |x| - |y|$;

g) $z = \frac{y}{x^2}$;

h) $z = \frac{y}{\sqrt{x}}$;

i) $z = \frac{2x}{x^2 + y^2}$.

1795. Nađite nivo-linije ovih funkcija:

a) $z = \ln(x^2 + y)$; c) $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$; e) $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

b) $z = \arcsin xy$; d) $z = f(y - ax)$;

1796. Nađite nivo-plohe funkcija triju nezavisnih varijabli:

a) $u = x + y + z$,

b) $u = x^2 + y^2 + z^2$,

c) $u = x^2 + y^2 - z^2$.

2. Neprekinutost

1°. Limes funkcije. Broj A nazivamo *limesom funkcije* $z = f(x, y)$ kada tačka $P'(x, y)$ teži k tački $P(a, b)$, ako za po volji odabrani $\varepsilon > 0$ postoji takav $\delta > 0$, da za $0 < \rho < \delta$, gdje je $\rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ udaljenost među tačkama P i P', vrijedi nejednadžba

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

U tom slučaju pišemo:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A.$$

2°. Neprekinutost i tačke prekinutosti. Funkciju $z = f(x, y)$ nazivamo *neprekinutom u tački* $P(a, b)$, ako je

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b).$$

Funkciju neprekinutu u svim tačkama nekog područja nazivamo *neprekinutom u tom području.*

Nezadovoljavanje uvjeta neprekinutosti za funkciju $f(x, y)$ može nastupiti kako u pojedinim tačkama (*izolirana tačka prekinutosti*), tako i u tačkama koje tvore jednu ili više linija (*linije prekinutosti*) a ponekad i složenije geometrijske likove.

Primjer 1. Nađite tačku prekinutosti funkcije

$$z = \frac{xy + 1}{x^2 - y}.$$

Rješenje. Funkcija gubi smisao ako je nazivnik jednak nuli. No $x^2 - y = 0$ ili $y = x^2$ je jednadžba parabole. Prema tome dana funkcija ima za liniju prekinutosti parabolu $y = x^2$.

1797*. Nađite ove limese funkcija:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$; c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \frac{\sin xy}{x}$; e) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x}{x + y}$;

b) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{x + y}{x^2 + y^2}$; d) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to k}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$; f) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

1798. Ispitajte u pogledu neprekinutosti funkciju

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-y^2} & \text{za}\quad x^2+y^2\leqslant 1,\\ 0 & \text{za}\quad x^2+y^2>1.\end{cases}$$

1799. Nađite tačke prekinutosti ovih funkcija:

a) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$;

b) $z=\dfrac{1}{(x-y)^2}$;

c) $z=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$;

d) $z=\cos\dfrac{1}{xy}$.

1800*. Pokažite da je funkcija

$$z=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{za}\quad x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & \text{za}\quad x=y=0\end{cases}$$

neprekinuta za svaku varijablu x i y posebno ali da nije neprekinuta u tački $(0,\ 0)$ za obje varijable zajedno.

3. Parcijalne derivacije

1°. Definicija parcijalnih derivacija. Ako je $z=f(x, y)$ onda, uz pretpostavku da je npr. y konstanta, dobivamo derivaciju

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x; y)-f(x, y)}{\Delta x}=f'_x(x, y),$$

koju nazivamo *parcijalnom derivacijom* funkcije z po varijabli x. Analogno se definira i označava parcijalna derivacija funkcije z po varijabli y. Očigledno je da se za određivanje parcijalnih derivacija možemo služiti običnim formulama deriviranja.

Primjer 1. Nađimo parcijalne derivacije funkcije $z=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$.

Rješenje. Smatrajući y konstantom dobivamo:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\,\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}.$$

Analogno, smatrajući x konstantom imat ćemo:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}.$$

Primjer 2. Nađimo parcijalne derivacije funkcije triju argumenata

$$u=x^3y^2z+2x-3y+z+5.$$

Rješenje. $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^2z + 2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3yz - 3$, $\frac{\partial u}{\partial z} = x^3y^2 + 1$.

2°. Eulerov teorem. Funkciju $f(x, y)$ nazivamo *homogenom* funkcijom stupnja n, ako za po volji odabrani realni faktor k vrijedi jednadžba

$$f(kx, ky) \equiv k^n f(x, y).$$

Cijela racionalna funkcija bit će homogena, ako su svi njeni članovi istog stupnja.

Za homogenu derivabilnu funkciju stupnja n vrijedi relacija (*Eulerov teorem*):

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = nf(x, y).$$

Nađite parcijalne derivacije funkcija:

1801. $z = x^3 + y^3 - 3axy$.

1802. $z = \frac{x-y}{x+y}$.

1803. $z = \frac{y}{x}$.

1804. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

1805. $z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1806. $z = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$.

1807. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

1808. $z = x^y$.

1809. $z = e^{\sin \frac{y}{x}}$.

1810. $z = \arcsin \sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

1811. $z = \ln \sin \frac{x+a}{\sqrt{y}}$.

1812. $u = (xy)^z$.

1813. $u = z^{xy}$.

1814. Izračunajte $f'_x(2; 1)$ i $f'_y(2; 1)$, ako je $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$.

1815. Izračunajte $f'_x(1; 2; 0)$, $f'_y(1; 2; 0)$, $f'_z(1; 2; 0)$, ako je

$$f(x, y, z) = \ln(xy + z).$$

Provjerite Eulerov teorem o homogenim funkcijama (br. 1816—1819):

1816. $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$.

1817. $z = \frac{x}{x^2+y^2}$.

1818. $f(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$.

1819. $f(x, y) = \ln \frac{y}{x}$.

1820. Izračunajte $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$, gdje je $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1821. Izračunajte $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$, ako je $x=r\cos\varphi$ i $y=r\sin\varphi$.

1822. Pokažite da je $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2$, ako je

$$z=\ln(x^2+xy+y^2).$$

1823. Pokažite da je $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$, ako je $z=xy+xe^{\frac{y}{x}}$.

1824. Pokažite da je $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$, ako je

$$u=(x-y)(y-z)(z-x).$$

1825. Pokažite da je $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=1$, ako je

$$u=x+\frac{x-y}{y-z}.$$

1826. Izračunajte $z=z(x,\ y)$, ako je

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

1827. Nađite $z=z(x, y)$, ako znate da je

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^2+y^2}{x} \quad \text{i} \quad z(x,\ y)=\sin y \quad \text{za} \quad x=1.$$

1828. Tačkom $M(1;\ 2;\ 6)$ plohe $z=2x^2+y^2$ prolaze ravnine paralelne koordinatnim ravninama XOZ i YOZ. Odredite kutove što ih zatvaraju koordinatne osi i tangente dobivenih presječnica u zajedničkoj tački M.

1829. Površina trapeza s bazama a i b i visinom h je $S=\frac{1}{2}(a+b)h$. Nađite $\frac{\partial S}{\partial a}$, $\frac{\partial S}{\partial b}$, $\frac{\partial S}{\partial h}$ i pomoću crteža objasnite njihov geometrijski smisao.

1830*. Pokažite da funkcija

$$f(x,\ y)=\begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ako je } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{ako je } x=y=0, \end{cases}$$

ima parcijalne derivacije $f'_x(x, y)$ i $f'_y(x, y)$ u tački $(0;\ 0)$, premda je prekinuta u toj tački. Konstruirajte geometrijsku sliku te funkcije u blizini tačke $(0;\ 0)$.

4. Totalni diferencijal funkcije

1°. Totalni prirast funkcije. *Totalnim prirastom* funkcije $z = f(x, y)$ nazivamo razliku

$$\Delta z = \Delta f(x, y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

2°. Totalni diferencijal funkcije. *Totalnim diferencijalom* funkcije $z = f(x,y)$ u tački (x,y) nazivamo glavni dio totalnog prirasta Δz za $\Delta x \to 0$ i $\Delta y \to 0$ koji je linearan s obzirom na priraste argumenata Δx i Δy.

čina višega reda s obzirom na $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Funkcija svakako ima totalni diferencijal u slučaju neprekinutosti njenih parcijalnih derivacija. Ako funkcija ima totalni diferencijal, nazivamo je *diferencijabilnom*. Diferencijali nezavisnih varijabli se po definiciji podudaraju s njihovim prirastima, tj. $dx = \Delta x$ i $dy = \Delta y$. Totalni diferencijal funkcije $z = f(x, y)$ računa se po formuli

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

Analogno se totalni diferencijal funkcije triju argumenata $u = f(x, y, z)$ računa po formuli

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz.$$

Primjer 1. Za funkciju

$$f(x, y) = x^2 + xy - y^2$$

nađimo totalni prirast i totalni diferencijal.

Rješenje. $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2$;

$$\begin{aligned}\Delta f(x, y) &= [(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2] - (x^2 + xy - y^2) = \\ &= 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2 + x\cdot\Delta y + y\cdot\Delta x + \Delta x\cdot\Delta y - 2y\cdot\Delta y - \Delta y^2 = \\ &= [(2x + y)\Delta x + (x - 2y)\Delta y] + (\Delta x^2 + \Delta x\cdot\Delta y - \Delta y^2).\end{aligned}$$

Ovdje je izraz $df = (2x + y)\,\Delta x + (x - 2y)\,\Delta y$ totalni diferencijal funkcije, a $(\Delta x^2 + \Delta x\cdot\Delta y - \Delta y^2)$ je neizmjerno mala veličina višega reda u usporedbi s neizmjerno malom veličinom $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Primjer 2. Nađimo totalni diferencijal funkcije

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Rješenje.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$dz = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3°. Primjena totalnog diferencijala funkcije u približnim računima. Uz dovoljno male $|\Delta x|$ i $|\Delta y|$, a to znači, uz dovoljno mali $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ za diferencijabilnu funkciju $z = f(x,y)$ u tački (x,y) vrijedi približna jednadžba $\Delta z \approx dz$ ili

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\Delta y.$$

Primjer 3. Visina stošca je $H = 30$ cm, a polumjer baze $R = 10$ cm. Kako će se promijeniti volumen stošca ako povećamo H za 3 mm, a R smanjimo za 1 mm?

Rješenje. Volumen stošca je $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Promjenu volumena zamijenimo približno diferencijalom

$$\Delta V \approx \mathrm{d}V = \frac{1}{3}\pi(2RH\,\mathrm{d}R + R^2\,\mathrm{d}H) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi(-2\cdot 10\cdot 30\cdot 0{,}1 + 100\cdot 0{,}3) = -10\pi \approx -31{,}4\ \mathrm{cm}^3.$$

Primjer 4. Izračunajmo približno $1{,}02^{3,01}$.

Rješenje. Ispitajmo funkciju $z = x^y$. Traženi broj možemo smatrati povećanjem vrijednosti te funkcije uzete za $x = 1$, $y = 3$, $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = 0{,}01$. Početna vrijednost funkcije je $z = 1^3 = 1$,

$$\Delta z \approx dz = yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x\,\Delta y = 3\cdot 1\cdot 0{,}02 + 1\cdot \ln 1\cdot 0{,}01 = 0{,}06.$$

Slijedi da je $1{,}02^{3,01} \approx 1 + 0{,}06 = 1{,}06$.

1831. Za funkciju $f(x, y) = x^2 y$ nađite totalni prirast i totalni diferencijal u tački $(1; 2)$; usporedite ih ako je:

a) $\Delta x = 1$, $\Delta y = 2$; b) $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

1832. Pokažite da za funkcije u i v od više varijabli (npr. dvije) vrijede obična pravila diferenciranja:

a) $\mathrm{d}(u+v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v$; b) $\mathrm{d}(uv) = v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v$;

c) $\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}$.

Nađite totalne diferencijale ovih funkcija:

1833. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

1834. $z = x^2 y^3$.

1835. $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

1836. $z = \sin^2 x + \cos^2 y$.

1837. $z = yx^y$.

1838. $z = \ln(x^2 + y^2)$.

1839. $f(x, y) = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)$.

1840. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

1841. $z = \ln \operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

1842. Izračunajte $\mathrm{d}f(1; 1)$, ako je $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$.

1843. $u = xyz$.

1844. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1845. $u = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^z$.

1846. $u = \operatorname{arctg}\frac{xy}{z^2}$.

1847. Izračunajte $\mathrm{d}f(3; 4; 5)$, ako je $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

1848. Jedna je stranica pravokutnika $a = 10$ cm, a druga $b = 24$ cm. Kako će se promijeniti dijagonala l pravokutnika ako stranicu a produljimo za 4 mm, a stranicu b skratimo za 1 mm? Nađite približnu promjenu i usporedite je s tačnom.

1849. Zatvoreni sanduk kojemu su vanjske dimenzije 10 cm, 8 cm i 6 cm napravljen je iz šperploča debljine 2 mm. Odredite približno volumen materijala utrošenog za izradu sanduka.

1850*. Središnji kut kružnog isječka iznosi 80°, a želite ga smanjiti za 1°. Koliko morate produljiti polumjer isječka da njegova površina ostane nepromijenjena, ako je prvobitna duljina polumjera 20 cm?

1851. Izračunajte približno: a) $(1{,}02)^3 \cdot (0{,}97)^2$; b) $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$;

c) $\sin 32° \cdot \cos 59°$ (pri prevođenju stupnjeva u radijane i pri računanju $\sin 60°$ računajte na tri mjesta; posljednju znamenku zaokružite).

1852. Pokažite da je relativna pogreška produkta približno jednaka zbroju relativnih pogrešaka faktora.

1853. Pri mjerenju na terenu trokuta ABC dobili ste ove podatke: stranica $a = 100\text{ m} \pm 2\text{ m}$, stranica $b = 200\text{ m} \pm 3\text{ m}$, kut $C = 60° \pm 1°$. S kojom se tačnošću može izračunati stranica c?

1854. Period T njihanja njihala računa se po formuli

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g ubrzanje sile teže. Nađite pogrešku pri određivanju T, koju dobivate kao rezultat malih pogrešaka $\Delta l = \alpha$ i $\Delta g = \beta$ prilikom mjerenja l i g.

1855. Razmak među tačkama $P_0(x_0, y_0)$ i $P(x, y)$ iznosi ρ, a kut koji čini vektor $\overline{P_0P}$ s osi OX iznosi α. Za koliko će se promijeniti kut α, ako tačka P uz nepomičnu tačku u P_0 zauzme položaj $P_1(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y)$?

5. Deriviranje složenih funkcija

1°. Slučaj jedne nezavisne varijable. Ako je $z = f(x, y)$ diferencijabilna funkcija argumenata x i y koji su sa svoje strane derivabilne funkcije nezavisne varijable t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

onda derivaciju složene funkcije $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ možemo izračunati po formuli:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}. \tag{1}$$

Napose, ako se t podudara s jednim argumentom, npr. x, onda će »totalna« derivacija funkcije z po x biti:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \tag{2}$$

Primjer 1. Izračunajte $\frac{dz}{dt}$, ako je

$$z = e^{3x+2y}, \quad \text{gdje je } x = \cos t, \quad y = t^2.$$

Rješenje. Po formuli (1) imamo:

$$\frac{dz}{dt} = e^{3x+2y} \cdot 3(-\sin t) + e^{3x+2y} \cdot 2 \cdot 2t =$$
$$= e^{3x+2y}(4t - 3\sin t) = e^{3\cos t + 2t^2}(4t - 3\sin t).$$

Primjer 2. Nađimo parcijalnu derivaciju $\frac{\partial z}{\partial x}$ i totalnu derivaciju $\frac{dz}{dx}$, ako je

$$z = e^{xy}, \text{ gdje je } y = \varphi(x).$$

Rješenje. $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$, Na temelju formule (2) dobivamo

$$\frac{dz}{dx} = ye^{xy} + xe^{xy}\varphi'(x).$$

2°. Slučaj više nezavisnih varijabli. Ako je z složena funkcija od nekoliko nezavisnih varijabli, na primjer $z = f(x, y)$ gdje je $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ (u i v su nezavisne varijable; f, φ, ψ su diferencijabilne funkcije), onda se parcijalne derivacije z po u i v izražavaju ovako:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{3}$$

i

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{4}$$

Za sve razmotrene slučajeve vrijedi formula

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

(*svojstvo invarijantnosti totalnog diferencijala*).

Primjer 3. Izračunajmo $\frac{\partial z}{\partial u}$ i $\frac{\partial z}{\partial v}$, ako je

$$z = f(x, y), \text{ gdje je } x = uv, \ y = \frac{u}{v}.$$

Rješenje. Primjenom formule (3) i (4) dobivamo:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f'_x(x, y) \cdot v + f'_y(x, y)\frac{1}{v}$$

i

$$\frac{\partial z}{\partial v} = f'_x(x, y)u - f'_y(x, y)\frac{u}{v^2}.$$

Primjer 4. Pokažimo da funkcija $z = \varphi(x^2 + y^2)$ (φ je derivabilna) zadovoljava jednadžu

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Rješenje. Funkcija φ ovisi o x i y preko međuargumenta $x^2+y^2=t$, pa je stoga

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial t}{\partial x}=\varphi'(x^2+y^2)\,2x$$

i

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial t}{\partial y}=\varphi'(x^2+y^2)\,2y.$$

Parcijalne derivacije prenesimo na lijevu stranu jednadžbe pa ćemo imati

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=y\varphi'(x^2+y^2)\,2x-x\varphi'(x^2-y^2)\,2y=2xy\,\varphi'(x^2+y^2)-2xy\,\varphi'(x^2+y^2)\equiv 0.$$

tj. funkcija z zadovoljava zadanu jednadžbu.

1856. Izračunajte $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, ako je

$$z=\frac{x}{y},\qquad \text{gdje je } x=e^t,\ y=\ln t.$$

1857. Izračunajte $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, ako je

$$u=\ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}},\qquad \text{gdje je } x=3t^2,\ y=\sqrt{t^2+1}.$$

1858. Izračunajte $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, ako je

$$u=xyz,\qquad \text{gdje je } x=t^2+1,\ y=\ln t,\ z=\mathrm{tg}\,t.$$

1859. Izračunajte $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, ako je

$$u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \text{gdje je } x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ z=H.$$

1860. Izračunajte $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, ako je

$$z=u^v,\qquad \text{gdje je } u=\sin x,\ v=\cos x.$$

1861. Izračunajte $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ i $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, ako je

$$z=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\quad \text{i}\quad y=x^2.$$

1862. Izrčunajte $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{dz}{dx}$, ako je

$$z = x^y, \qquad \text{gdje je } y = \varphi(x).$$

1863. Izračunajte $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$, ako je

$$z = f(u, v), \qquad \text{gdje je } u = x^2 - y^2, \quad v = e^{xy}.$$

1864. Izračunajte $\frac{\partial z}{\partial u}$ i $\frac{\partial z}{\partial v}$, ako je

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \qquad \text{gdje je } x = u \sin v, \quad y = u \cos v.$$

1865. Izračunajte $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$, ako je

$$z = f(u), \qquad \text{gdje je } u = xy + \frac{y}{x}.$$

1866. Pokažite da je

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial \psi} = 0,$$

ako je

$$u = \Phi(x^2 + y^2 + z^2),$$

gdje je $\quad x = R \cos\varphi \cos\psi, \quad y = R \cos\varphi \sin\psi, \quad z = R \sin\varphi.$

1867. Nađite $\frac{du}{dx}$, ako je

$$u = f(x, y, z), \qquad \text{gdje je } y = \varphi(x), \; z = \psi(x, y).$$

1868. Pokažite da je

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x}$$

ako je $\quad z = f(x + ay), \quad$ gdje je f derivabilna funkcija.

1869. Pokažite da funkcija

$$w = f(u, v),$$

gdje je $\quad u = x + at, \quad v = y + bt, \quad$ zadovoljava jednadžbu

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial y}.$$

1870. Pokažite da funkcija $z = y\varphi(x^2 - y^2)$ zadovoljava jednadžbu

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

1871. Pokažite da funkcija $z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ zadovoljava jednadžbu

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

1872. Pokažite da funkcija $z = e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$ zadovoljava jednadžbu

$$(x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xyz.$$

1873. Stranica pravokutnika $x = 20$ m produžava se brzinom od 5 m/s, druga stranica $y = 30$ m skraćuje se brzinom od 4 m/s. Kojom brzinom se mijenja opseg i površina pravokutnika?

1874. Jednadžbe gibanja materijalne tačke glase

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3.$$

Kojom brzinom raste udaljenost te tačke od ishodišta koordinatnog sistema?

1875. Dva broda isplove istovremeno iz luke A, jedan na sjever, a drugi na sjeveroistok. Brzina brodova je 20 km/h i 40 km/h. Kojom brzinom raste njihova međusobna udaljenost?

6. Derivacija u zadanom smjeru i gradijent funkcije

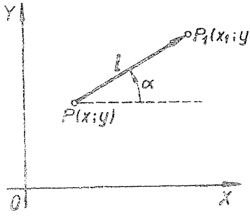
1°. Derivacija funkcije u zadanom smjeru. *Derivacijom funkcije* $z = f(x, y)$ u tački P u zadanom smjeru $l = \overrightarrow{PP_1}$ nazivamo

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{P_1P \to 0} \frac{f(P_1) - f(P)}{P_1P},$$

gdje su $f(P)$ i $f(P_1)$ vrijednosti funkcija u tačkama P i P_1. Ako je funkcija z diferencijabilna, onda vrijedi formula

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha, \qquad (1)$$

gdje je α kut koji čini vektor l s osi OX (sl. 67).



Slika 67.

Analogno se određuje derivacija u zadanom smjeru l za funkcije triju argumenata $u = f(x, y, z)$. U tom slučaju je

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (2)$$

gdje su α, β, γ kutovi među smjerom l i pripadnim koordinatnim osima. Derivacija u zadanom smjeru karakterizira brzinu mijenjanja funkcije u tom smjeru.

Primjer 1. Nađimo derivaciju funkcije $z=2x^2-3y^2$ u tački $P\,(1;0)$ u smjeru koji sa osi OX zatvara kut od 120°.

Rješenje. Nađemo parcijalne derivacije zadane funkcije i njihove vrijednosti u tački P:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x;\quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P=4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-6y;\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P=0.$$

Ovdje je

$$\cos\alpha=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2},$$

$$\sin\alpha=\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Primjenom formule (1) dobijemo:

$$\frac{\partial z}{\partial l}=4\left(-\frac{1}{2}\right)+0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-2.$$

Predznak minus pokazuje da je funkcija u danoj tački i u danom smjeru silazna.

2°. Gradijent funkcije. *Gradijentom* derivabilne funkcije $z=f(x,y)$ u tački (x,y) nazivamo vektor kojem su projekcije na koordinatne osi pripadne parcijalne derivacije zadane funkcije:

$$\operatorname{grad} z=\frac{\partial z}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\boldsymbol{j}. \tag{3}$$

Derivacija zadane funkcije u smjeru l vezana je s gradijentom funkcije ovom relacijom

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\mathrm{pr}_l\ \operatorname{grad} z,$$

tj. derivacija u zadanom smjeru jednaka je projekciji gradijenta funkcije na smjer deriviranja.

Gradijent funkcije u svakoj tački, u kojoj je on različit od nule, je normala na pripadne nivo-linije funkcije. Smjer gradijenta funkcije u zadanoj tački je smjer najveće brzine porasta funkcije u toj tački, tj. za $l=\operatorname{grad} z$ derivacija $\frac{\partial z}{\partial l}$ ima najveću vrijednost koja iznosi

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Analogno se definira gradijent funkcije triju varijabli $u=f\,(x,y,z)$:

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{4}$$

Gradijent funkcije triju varijabli u svakoj tački, u kojoj je on različit od nule, okomit je na nivo-plohu koja tom tačkom prolazi.

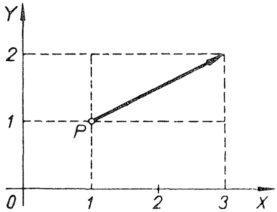
Primjer 2. Nađimo i konstruirajmo gradijent funkcije $z = x^2y$ u tački $P(1; 1)$.

Rješenje. Izračunamo parcijalne derivacije i njihove vrijednosti u tački P.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 1.$$

Prema tome je grad $z = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ (sl. 68).



Slika 68.

1876. Nađite derivaciju funkcije $z = x^2 - xy - 2y^2$ u tački $P(1; 2)$ u smjeru koji s osi OX zatvara kut od 60°.

1877. Nađite derivaciju funkcije $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ u tački $M(1; 2)$ u smjeru od te tačke prema tački $N(4; 6)$.

1878. Nađite derivaciju funkcije $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ u tački $P(1; 1)$ u smjeru simetrale prvog kvadranta .

1879. Nađite derivaciju funkcije $u = x^2 - 3yz + 5$ u tački $M(1; 2; -1)$ u smjeru koji sa svim koordinatnim osima zatvara jednake kutove.

1880. Nađite derivaciju funkcije $u = xy + yz + zx$ u tački $M(2; 1; 3)$ u smjeru od te tačke prema tački $N(5; 5; 15)$.

1881. Nađite derivaciju funkcije $u = \ln(e^x + e^y + e^z)$ u ishodištu koordinatnog sistema u smjeru koji s koordinatnim osima OX, OY, OZ zatvara pripadne kutove α, β, γ.

1882. Tačku u kojoj je derivacija u bilo kojem smjeru jednaka nuli nazivamo *stacionarnom tačkom* te funkcije. Nađite stacionarne tačke ovih funkcija:

a) $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$;

b) $z = x^3 + y^3 - 3xy$;

c) $u = 2y^2 + z^2 - xy - yz + 2x$.

1883. Pokažite da je derivacija funkcije

$$z = \frac{y^2}{x}$$

uzeta u nekoj tački elipse

$$2x^2 + y^2 = C^2$$

duž normale na elipsu jednaka nuli.

1884. Nađite grad z u tački $(2; 1)$ ako je

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

1885. Nađite grad z u tački $(5; 3)$ ako je

$$z = \sqrt{x^2 - y^2}.$$

1886. Nađite grad u u tački $(1; 2; 3)$, ako je $u = xyz$.

1887. Nađite veličinu i smjer grad u u tački $(2; -2; 1)$, ako je $u = x^2 + y^2 + z^2$.

1888. Nađite kut među gradijentima funkcije $z = \ln \frac{y}{x}$ u tačkama $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ i $B(1; 1)$.

1889. Nađite vrijednost najstrmijeg uspona plohe $z = x^2 + 4y^2$ u tački $(2; 1; 8)$.

1890. Odredite vektorsko polje gradijenta ovih funkcija:

a) $z = x + y$;

b) $z = xy$;

c) $z = x^2 + y^2$;

d) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

7. Derivacije i diferencijali višeg reda

1°. Parcijalne derivacije višeg reda. *Parcijalnim derivacijama drugog reda* funkcije $z = f(x, y)$ nazivamo parcijalne derivacije njenih parcijalnih derivacija prvog reda.

Za derivacije drugog reda upotrebljavamo ove oznake

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y) \text{ itd.}$$

Analogno se definiraju i označavaju derivacije viših redova.

U primjerima ove glave mi ćemo formalno derivirati pretpostavljajući, bez da to posebno istaknemo, da su zadovoljeni dovoljni uvjeti glatkosti promatranih funkcija.

Ako su parcijalne derivacije, koje računamo, neprekinute, onda *rezultat višestrukog deriviranja ne ovisi o poredaju deriviranja.*

Primjer 1. Nađimo parcijalne derivacije drugog reda funkcije

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

Rješenje. Nađimo najprije parcijalne derivacije prvog reda

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left(- \frac{x}{y^2} \right) = - \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Zatim deriviramo ponovo:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(- \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - 2y \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Primijetimo da tzv. »mješovitu« parcijalnu derivaciju možemo naći i na drugi način i to:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = - \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

2°. **Diferencijal višeg reda.** *Diferencijalom drugog reda* funkcije $z = f(x, y)$ nazivamo diferencijal diferencijala (prvog reda) te funkcije za fiksirane priraste nezavisnih varijabli.

$$\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}(\mathrm{d}z).$$

Analogno se određuju diferencijali funkcije z višega nego drugog reda, na primjer:

$$\mathrm{d}^3 z = \mathrm{d}(\mathrm{d}^2 z)$$

i općenito

$$\mathrm{d}^n z = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} z) \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Ako je $z = f(x, y)$ gdje su x i y nezavisne varijable i funkcija f ima neprekinute parcijalne derivacije drugog reda, tada se diferencijal drugog reda funkcije z računa po formuli

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \mathrm{d}x^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \mathrm{d}y^2. \tag{1}$$

Općenito, kada postoje neprekinute odgovarajuće derivacije, vrijedi simbolička formula

$$\mathrm{d}^n z = \left(\mathrm{d}x \frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{d}y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n z,$$

koja se formalno razvija po binomnom zakonu.

Ako je $z = f(x, y)$, gdje su argumenti x i y funkcije jedne ili više nezavisnih varijabli, onda je

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y. \qquad (2)$$

Ako su x i y nezavisne varijable, onda je $d^2 x = 0$, $d^2 y = 0$ i formula (2) prelazi u formulu (1).

Primjer 2. Nađite totalne diferencijale prvog i drugog reda funkcije

$$z = 2x^2 - 3xy - y^2.$$

Rješenje. Prvi način. Imamo.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -3x - 2y.$$

Prema tome

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (4x - 3y)\,dx - (3x + 2y)\,dy.$$

Dalje

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial x\,\partial y} = -3, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2,$$

odakle slijedi, da je

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = 4\,dx^2 - 6\,dx\,dy - 2\,dy^2.$$

Drugi način. Diferenciranjem nalazimo:

$$dz = 4x\,dx - 3\,(y\,dx + x\,dy) - 2y\,dy = (4x - 3y)\,dx - (3x + 2y)\,dy.$$

Diferencirajmo još jednom i sjetimo se da dx i dy ne zavise od x i y. Dobivamo:

$$d^2 z = (4\,dx - 3dy)\,dx - (3dx + 2dy)\,dy = 4dx^2 - 6dx\,dy - 2\,dy^2.$$

1891. Izračunajte $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, ako je

$$z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}.$$

1892. Izračunajte $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, ako je

$$z = \ln(x^2 + y).$$

1893. Izračunajte $\frac{\partial z^2}{\partial x\,\partial y}$, ako je

$$z = \sqrt{2xy + y^2}.$$

1894. Izračunajte $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, ako je

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}.$$

1895. Izračunajte $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$, ako je

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

1896. Nađite sve parcijalne derivacije drugog reda funkcije

$$u = xy + yz + zx.$$

1897. Izračunajte $\frac{\partial^3 u}{\partial x \, \partial y \, \partial z}$, ako je

$$u = x^\alpha y^\beta z^\gamma.$$

1898. Izračunajte $\frac{\partial^3 z}{\partial x \, \partial y^2}$, ako je

$$z = \sin(xy).$$

1899. Izračunajte $f''_{xx}(0, 0)$, $f''_{xy}(0, 0)$, $f''_{yy}(0, 0)$, ako je

$$f(x, y) = (1+x)^m (1+y)^n.$$

1900. Pokažite da je $\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \, \partial x}$, ako je

$$z = \arcsin \sqrt{\frac{x-y}{x}}.$$

1901. Pokažite da je $\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \, \partial x}$, ako je

$$z = x^y.$$

1902*. Pokažite da za funkciju

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

s dodatnim uvjetom $f(0, 0) = 0$ imamo

$$f''_{xy}(0, 0) = -1, \quad f''_{yx}(0, 0) = +1.$$

1903. Izračunajte $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, ako je

$$z = f(u, v),$$

gdje je $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.

1904. Izračunajte $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ako je

$$u = f(x, y, z), \text{ gdje je } z = \varphi(x, y).$$

1905. Izračunajte $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, ako je

$$z = f(u, v), \text{ gdje je } u = \varphi(x, y), \ v = \psi(x, y).$$

1906. Pokažite da funkcija

$$u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

zadovoljava Laplaceovu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

1907. Pokažite, da funkcija

$$u = \ln \frac{1}{r},$$

gdje je $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ zadovoljava Laplaceovu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

1908. Pokažite, da funkcija

$$u(x, t) = A \sin(a\lambda t + \varphi) \sin \lambda x$$

zadovoljava jednadžbu titranja žice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1909. Pokažite da funkcija

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4a^2 t}}$$

(x_0, y_0, z_0, a su konstante) zadovoljava jednadžbu vođenja topline

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

1910. Pokažite, da funkcija

$$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at),$$

gdje su φ i ψ po volji odabrane dvaput derivabilne funkcije, zadovoljavaju jednadžbu titranja žice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1911. Pokažite da funkcija

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

zadovoljava jednadžbu

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

1912. Pokažite da funkcija

$$u = \varphi(xy) + \sqrt{xy}\,\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

zadovoljava jednadžbu

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

1913. Pokažite da funkcija $z = f[x + \varphi(y)]$ zadovoljava jednadžbu

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

1914. Nađite $u = u(x, y)$ ako je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

1915. Odredite oblik funkcije $u = u(x, y)$, koja zadovoljava jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

1916. Nađite d^2z, ako je

$$z = e^{xy}.$$

1917. Nađite d^2u, ako je

$$u = xyz.$$

1918. Nađite d^2z, ako je

$$z = \varphi(t), \quad \text{gdje je} \quad t = x^2 + y^2.$$

1919. Nađite dz i d^2z, ako je

$$z = u^v, \text{ gdje je } u = \frac{x}{y},\ v = xy,$$

1920. Nađite d^2z, ako je

$$z = f(u, v), \text{ gdje je } u = ax, \; v = by.$$

1921. Nađite d^2z, ako je

$$z = f(u, v), \text{ gdje je } u = xe^y, \; v = ye^x.$$

1922. Nađite d^3z, ako je

$$z = e^x \cos y.$$

1923. Nađite diferencijal trećeg reda funkcije

$$z = x\cos y + y \sin x,$$

i odredite sve parcijalne derivacije trećeg reda

1924. Nađite $df(1, 2)$ i $d^2f(1, 2)$ ako je

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10 \ln y.$$

1925. Nađite $d^2f(0, 0, 0)$, ako je

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz.$$

8. Integriranje totalnih diferencijala

1°. Uvjeti totalnog diferencijala. Da bi izraz $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$, gdje su funkcije $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ neprekinute u jednostruko suvislom području D zajedno sa svojim parcijalnim derivacijama prvog reda, bio u području D totalni diferencijal neke funkcije $u(x, y)$, nužno je i dovoljno da je ispunjen uvjet

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Primjer 1. Uvjerimo se da je izraz

$$(2x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy$$

totalni diferencijal neke funkcije i nađimo tu funkciju.

Rješenje. U ovom slučaju su $P = 2x + y$, $Q = x + 2y$. Prema tome je $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ i stoga je

$$(2x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy,$$

gdje je u tražena funkcija.

Iz uvjeta $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$ slijedi

$$u = \int (2x + y)\,dx = x^2 + xy + \varphi(y).$$

No s druge strane je $\frac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi'(y) = x + 2y$, odakle je

$$\varphi'(y) = 2y, \quad \varphi(y) = y^2 + C$$

i

$$u = x^2 + xy + y^2 + C.$$

Konačno je

$$(2x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = d\,(x^2 + xy + y^2 + C).$$

2°. **Slučaj triju varijabla.** Analogni izraz

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz,$$

gdje su $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ funkcije varijabli x, y i z, neprekinute zajedno sa svojim parcijalnim derivacijma prvog reda, onda i samo onda je totalni diferencijal neke funkcije $u(x, y, z)$ u prostornom jednostruko suvislom području D, ako su u D ispunjeni uvjeti

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Primjer 2. Uvjerimo se da je izraz

$$(3x^2 + 3y - 1)\,dx + (z^2 + 3x)\,dy + (2yz + 1)\,dz$$

totalni diferencijal neke funkcije i nađimo tu funkciju.

Rješenje. Ovdje je $P = 3x^2 + 3y - 1$, $Q = z^2 + 3x$, $R = 2yz + 1$.

Ustanovimo da je

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 3, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

i prema tome

$$(3x^2 + 3y - 1)\,dx + (z^2 + 3x)\,dy + (2yz + 1)\,dz = du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz,$$

gdje je u tražena funkcija.

Imamo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 3y - 1.$$

Znači da je

$$u = \int (3x^2 + 3y - 1)\,dx = x^3 + 3xy - x + \varphi(y, z).$$

S druge strane je

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = z^2 + 3x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2yz + 1,$$

odakle je $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = z^2$ i $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2yz + 1$. Zadatak se svodi na traženje funkcije dviju varijabli $\varphi(y, z)$ kojoj su parcijalne derivacije poznate i ispunjen je uvjet totalnog diferencijala.

Nađimo φ:

$$\varphi(y, z) = \int z^2 \mathrm{d}y = y\,z^2 + \psi(z),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2yz + \psi'(z) = 2yz + 1,$$

$$\psi'(z) = 1, \quad \psi(z) = z + C,$$

tj. $\varphi(y, z) = yz^2 + z + C$. Konačno dobivamo

$$u = x^3 + 3xy - x + yz^2 + z + C.$$

Uvjerivši se da su dalje navedeni izrazi totalni diferencijali nekih funkcija, nađite te funkcije.

1926. $y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y.$

1927. $(\cos x + 3x^2 y)\,\mathrm{d}x + (x^3 - y^2)\,\mathrm{d}y.$

1928. $\dfrac{(x+2y)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2}.$

1929. $\dfrac{x+2y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x - \dfrac{2x-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y.$

1930. $\dfrac{1}{y}\,\mathrm{d}x - \dfrac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y.$

1931. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y.$

1932. Odredite konstante a i b tako, da izraz

$$\frac{(ax^2+2xy+y^2)\,\mathrm{d}x - (x^2+2xy+by^2)\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}$$

bude totalni diferencijal neke funkcije z, i nađite tu funkciju.

Uvjerivši se da su dalje navedeni izrazi totalni diferencijali nekih funkcija, nađite te funkcije.

1933. $(2x+y+z)\,\mathrm{d}x + (x+2y+z)\,\mathrm{d}y + (x+y+2z)\,\mathrm{d}z.$

1934. $(3x^2+2y^2+3z)\,\mathrm{d}x + (4xy+2y-z)\,\mathrm{d}y + (3x-y-2)\,\mathrm{d}z.$

1935. $(2xyz-3y^2z+8xy^2+2)\,\mathrm{d}x + (x^2z-6xyz+8x^2y+1)\,\mathrm{d}y + (x^2y-3xy^2+3)\,\mathrm{d}z.$

1936. $\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{z}{x^2}\right)\mathrm{d}x + \left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y + \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{z^2}\right)\mathrm{d}z.$

1937. $\dfrac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

1938*. Zadane su projekcije sile na koordinatne osi:

$$X = \frac{y}{(x+y)^2}, \quad Y = \frac{\lambda x}{(x+y)^2},$$

gdje je λ konstantna veličina. Kakav mora biti koeficijent λ, da sila ima potencijal?

1939. Koji uvjet mora zadovoljavati derivabilna funkcija $f(x,y)$ da izraz

$$f(x, y)(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$$

bude totalni diferencijal?

1940. Nađite funkciju u, ako je $f(z)$ neprekinuta i

$$\mathrm{d}u = f(xy)(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y).$$

9. Deriviranje implicitno zadanih funkcija

1°. Slučaj jedne nezavisne varijable. Ako jednadžba $f(x,y) = 0$, gdje je $f(x,y)$ diferencijabilna funkcija varijabli x i y, definira y kao diferencijabilnu funkciju od x, onda derivaciju te implicitno zadane funkcije, uz uvjet da je $f'_y(x,y) \neq 0$, možemo naći po formuli

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f'_x(x,\ y)}{f'_y(x,\ y)}. \tag{1}$$

Derivacije viših redova nalazimo uzastopnim deriviranjem formule (1).

Primjer 1. Izračunajmo $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ i $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, ako je

$$(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0.$$

Rješenje. Označimo lijevu stranu zadane jednadžbe sa $f(x, y)$ i nađimo parcijalne derivacije

$$f'_x(x,y) = 3(x^2 + y^2)^2 \cdot 2x - 3 \cdot 2x = 6x[(x^2 + y^2)^2 - 1],$$

$$f'_y(x,y) = 3(x^2 + y^2)^2 \cdot 2y - 3 \cdot 2y - 6y[(x^2 + y^2)^2 - 1].$$

Odatle primjenom formule (1) dobivamo:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = -\frac{6x[(x^2+y^2)^2 - 1]}{6y[(x^2+y^2)^2 - 1]} = -\frac{x}{y}.$$

Da nađemo drugu derivaciju derivirajmo po x dobivenu prvu derivaciju uzimajući pri tome u obzir da je y funkcija od x:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{1 \cdot y - x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}.$$

2°. Slučaj više nezavisnih varijabli. Analogno, ako jednadžba $F(x,y,z) = 0$, gdje je $F(x,y,z)$ diferencijabilna funkcija varijabli x, y i z, određuje z kao diferencijabilnu funkciju nezavisnih varijabli x i y a $F'_z(x,y,z) \neq 0$, parcijalne derivacije implicitno zadane funkcije možemo naći po formulama:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,\ y,\ z)}{F'_z(x,\ y,\ z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,\ y,\ z)}{F'_z(x,\ y,\ z)}. \tag{2}$$

Drugi način određivanja derivacija funkcije z je ovaj: diferenciranjem jednadžbe $F(x, y, z) = 0$, dobivamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial F}{\partial z}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Odavde se može odrediti dz, a prema tome i $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Primjer 2. Nađimo $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$, ako je

$$x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0.$$

Rješenje. **Prvi način.** Označimo lijevu stranu zadane jednadžbe sa $F(x, y, z)$ i nađimo parcijalne derivacije

$$F'_x(x, y, z) = 2x, \quad F'_y(x, y, z) = -4y - z + 1, \quad F'_z(x, y, z) = 6z - y.$$

Primjenom formule (2) dobivamo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{2x}{6z - y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{1 - 4y - z}{6z - y}.$$

Drugi način. Diferenciranjem zadane jednadžbe dobivamo:

$$2x\,dx - 4y\,dy + 6z\,dz - y\,dz - z\,dy + dy = 0.$$

Odatle izrazimo dz tj. totalni diferencijal implicitno zadane funkcije:

$$dz = \frac{2x\,dx + (1 - 4y - z)\,dy}{y - 6z}$$

Usporedba s formulom $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ pokazuje da je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y - 6z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 - 4y - z}{y - 6z}.$$

3°. Sistem implicitno zadanih funkcija. Ako sistem dviju jednadžbi

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

gdje su F i G diferencijabilne, definira u i v kao diferencijabilne funkcije varijabli x i y i ako je jakobijana

$$\frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

onda diferencijale tih funkcija (a prema tome i njihove parcijalne derivacije) možemo naći iz sistema jednadžbi

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial u}du + \frac{\partial G}{\partial v}dv = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Primjer 3. Jednadžbe

$$u + v = x + y, \quad xu + yv = 1$$

definiraju u i v kao funkcije od x i y; nađite $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ i $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Rješenje. Prvi način. Derivirajmo obje jednadžbe po x, pa dobijemo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \qquad u + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

odakle je

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u+y}{x-y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u+x}{x-y}.$$

Analognim načinom nalazimo:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{v+y}{x-y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v+x}{x-y}.$$

Drugi način. Diferenciranjem nalazimo dvije jednadžbe koje povezuju diferencijale sve četiri varijable

$$du + dv = dx + dy,$$

$$x\,du + u\,dx + y\,dv + v\,dy = 0.$$

Riješivši taj sistem po diferencijalima du i dv, dobivamo

$$du = -\frac{(u+y)\,dx + (v+y)\,dy}{x-y}, \qquad dv = \frac{(u+x)\,dx + (v+x)\,dy}{x-y}.$$

Odatle je

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u+y}{x-y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{v+y}{x-y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u+x}{x-y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v+x}{x-y}.$$

4°. Funkcije zadane u parametarskom obliku. Ako je diferencijabilna funkcija z s varijablama x i y zadana u parametarskom obliku jednadžbama

$x = x(u,\ v)$, $y = y(u,\ v)$, $z = z(u,\ v)$ gdje su x, y i z diferencijabilne

i

$$\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

onda diferencijal te funkcije možemo naći iz sistema jednadžbi

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv, \\ dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv. \end{cases} \tag{4}$$

Kada nam je poznat diferencijal $dz = p\,dx + q\,dy$, dobivamo parcijalne derivacije

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q.$$

Primjer 4. Funkcija z s argumentima x i y zadana je jednadžbama

$$x = u + v, \qquad y = u^2 + v^2, \qquad z = u^3 + v^3 \quad (u \neq v).$$

Nađimo $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Rješenje. **Prvi način.** Diferenciranjem nađemo tri jednadžbe koje povezuju diferencijale svih pet varijabli:

$$\begin{cases} dx = du + dv, \\ dy = 2u\,du + 2v\,dv, \\ dz = 3u^2\,du + 3v^2\,dv. \end{cases}$$

Iz prve dvije jednadžbe odredimo du i dv:

$$du = \frac{2v\,dx - dy}{2(v-u)}, \qquad dv = \frac{dy - 2u\,dx}{2(v-u)}.$$

Uvrstimo u treću jednadžbu dobivene izraze du i dv:

$$dz = 3u^2\frac{2v\,dx - dy}{2(v-u)} + 3v^2\frac{dy - 2u\,dx}{2(v-u)} =$$

$$= \frac{6uv(u-v)\,dx + 3(v^2-u^2)\,dy}{2(v-u)} = -3uv\,dx + \frac{3}{2}(u+v)\,dy.$$

Odatle je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3uv, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}(u+v).$$

Drugi način. Iz treće zadane jednadžbe možemo naći:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2\frac{\partial u}{\partial x} + 3v^2\frac{\partial v}{\partial x}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3u^2\frac{\partial u}{\partial y} + 3v^2\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{5}$$

Derivirajmo prve dvije jednadžbe najprije po x, a zatim po y:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = 2u\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2v\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ 1 = 2u\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

Iz prvog sistema nalazimo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v}{v-u}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u}{u-v}.$$

Iz drugog sistema nalazimo:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2(u-v)}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2(v-u)}.$$

Uvrštenjem izraza $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ u formulu (5) dobivamo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2 \frac{v}{v-u} + 3v^2 \frac{u}{u-v} = -3uv,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3u^2 \frac{1}{2(u-v)} + 3v^2 \frac{1}{2(v-u)} = \frac{3}{2}(u+v).$$

1941. Neka je y funkcija od x određena jednadžbom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Nađite $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ i $\frac{d^3y}{dx^3}$.

1942. Neka je y funkcija određena jednadžbom

$$x^2 + y^2 + 2axy = 0 \quad (a > 1).$$

Pokažite da je $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ i objasnite dobiveni rezultat.

1943. Nađite $\frac{dy}{dx}$, ako je $y = 1 + y^x$.

1944. Nađite $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2y}{dx^2}$, ako je $y = x + \ln y$.

1945. Nađite $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}$ i $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1}$, ako je

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0.$$

Pomoću dobivenih rezultata konstruirajte približno graf zadane krivulje u okolini tačke $x = 1$.

1946. Funkcija y određuje se jednadžbom

$$\ln\sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \qquad (a \neq 0).$$

Nađite $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2y}{dx^2}$.

1947. Nađite $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2y}{dx^2}$, ako je

$$1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0.$$

1948. Funkcija z s varijablama x i y zadana je jednadžbom

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

Nađite $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1949. Nađite $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$, ako je

$$x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1.$$

1950. Funkcija z zadana je jednadžbom

$$x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0.$$

Nađite $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ za sistem vrijednosti $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$.

1951. Nađite $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, ako je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

1952. $f(x, y, z) = 0$. Pokažite da je $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$.

1953. $z = \varphi(x, y)$ gdje je y funkcija od x određena jednadžbom $\psi(x, y) = 0$. Nađite $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

1954. Nađite $\mathrm{d}z$ i $\mathrm{d}^2 z$, ako je

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

1955. Neka je z funkcija s varijablama x i y, određena jednadžbom

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0.$$

Nađite $\mathrm{d}z$ i $\mathrm{d}^2 z$ za sistem vrijednosti $x = 2$, $y = 0$, $z = 1$.

1956. Nađite $\mathrm{d}z$ i $\mathrm{d}^2 z$, ako je $\ln z = x + y + z - 1$. Kolike su derivacije prvog i drugog reda funkcije z?

1957. Neka je derivabilna funkcija z određena jednadžbom

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz),$$

gdje je φ po volji odabrana derivabilna funkcija, a a, b i c su konstante. Pokažite da je

$$(cy - bz) \frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx) \frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

1958. Pokažite da funkcija z, određena jednadžbom

$$F(x - az, \quad y - bz) = 0,$$

gdje je F po volji odabrana diferencijabilna funkcija svojih argumenata, zadovoljava jednadžbu

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

1959. $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$. Pokažite da je $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

1960. Pokažite, da funkcija z, definirana jednadžbom $y = x\varphi(z) + \psi(z)$ zadovoljava jednadžbu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

1961. Derivabilne funkcije y i z nezavisne varijable x zadane su sistemom jednadžbi $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$. Nađite $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, $\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$ ako je $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$.

1962. Derivabilne funkcije y i z nezavisne varijable x zadane su sistemom jednadžbi

$$xyz = a, \quad x + y + z = b.$$

Nađite $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, d^2y, d^2z.

1963. Derivabilne funkcije u i v nezavisnih varijabli x i y zadane su implicitno sistemom jednadžbi

$$u = x + y, \quad uv = y.$$

Izračunajte

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \text{za} \quad x = 0, \quad y = 1.$$

1964. Derivabilne funkcije u i v nezavisnih varijabli x i y zadane su implicintno sistemom jednadžbi

$$u + v = x, \quad u - yv = 0$$

gdje su φ i ψ derivabilne i $D(\varphi, \psi)/D(u, v) \neq 0$.

Nađite $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$, d^2u, d^2v.

1965. Funkcije u i v s varijablama x i y zadane su implicitno sistemom jednadžbi

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v).$$

Nađite $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

1966. a) Nađite $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$, ako je $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = cv$.

b) Nađite $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$, ako je $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$,

c) Nađite $\mathrm{d}z$, ako je $x = e^{u+v}$, $y = e^{u-v}$, $z = uv$.

1967. $z = F(r, \varphi)$, gdje su r i φ funkcije varijabli x i y određene sistemom jednadžbi

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Nađite $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1968. Smatrajući z funkcijom od x i y, nađite: $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ ako je

$$x = a\cos\varphi\cos\psi, \quad y = b\sin\varphi\cos\psi, \quad z = c\sin\psi.$$

10. Zamjena varijabli

Prilikom zamjene varijabli u diferencijalnim izrazima derivacije u njima moramo izraziti derivacijama po novim varijablama, služeći se pravilom za deriviranje složenih funkcija.

1°. Zamjena varijabli u izrazima s običnim derivacijama.

Primjer 1. Transformirajmo jednadžbu

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{x^2}y = 0,$$

supstitucijom $x = \frac{1}{t}$.

Rješenje. Izrazimo derivacije od y po x pomoću derivacija od y po t.

Imamo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{-\frac{1}{t^2}} = -t^2\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = -\left(2t\frac{dy}{dt} + t^2\frac{d^2y}{dt^2}\right)(-t^2) = 2t^3\frac{dy}{dt} + t^4\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Uvrštenjem dobivenih izraza za derivacije u zadanu jednadžbu i zamjenom x sa $\frac{1}{t}$ dobivamo:

$$\frac{1}{t^2}\cdot t^3\left(2\frac{dy}{dt} + t\frac{d^2y}{dt^2}\right) + 2\cdot\frac{1}{t}\left(-t^2\frac{dy}{dt}\right) + a^2t^2y = 0$$

ili

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0.$$

Primjer 2. Transformirajmo jednadžbu

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{dy}{dx} = 0,$$

uzimajući y kao argument, a x kao funkciju.

Rješenje. Izrazimo derivacije od y po x derivacijama od x po y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}.$$

Uvrštenjem tih izraza za derivacije u zadanu jednadžbu imat ćemo

$$x\left[-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}\right]+\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}-\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=0,$$

ili konačno

$$x\frac{d^2x}{dy^2}-1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=0.$$

Primjer 3. Transformirajmo jednadžbu

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y},$$

prijelazom na polarne koordinate

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi.$$

Rješenje. Smatrajući r funkcijom od φ dobivamo iz formule (1):

$$dx=\cos\varphi\, dr-r\sin\varphi\, d\varphi,\quad dy=\sin\varphi\, dr+r\cos\varphi\, d\varphi,$$

i odatle

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\varphi\, dr+r\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi\, dr-r\sin\varphi\, d\varphi}=\frac{\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi}.$$

Uvrštenjem izraza za x, y i $\frac{dy}{dx}$ u zadanu jednadžbu imat ćemo

$$\frac{\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi}=\frac{r\cos\varphi+r\sin\varphi}{r\cos\varphi-r\sin\varphi},$$

ili nakon pojednostavnjenja

$$\frac{dr}{d\varphi}=r.$$

2°. Zamjena varijabli u izrazima sa parcijalnim derivacijama

Primjer 4. Jednadžbu titranja žice

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\qquad(a\neq0)$$

gdje je nepoznata funkcija $u=u(x,d)$ dva puta derivabilna, transformirajmo na nove nezavisne varijable α i β gdje je $\alpha=x-at$, $\beta=x+at$.

Rješenje. Izrazimo parcijalne derivacije od u po x i t parcijalnim derivacijama od u po α i β. Primjenom formula za deriviranje složenih funkcija

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial t}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x},$$

dobivamo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}(-a) + \frac{\partial u}{\partial \beta}a = a\left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial \beta}\cdot 1 = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}.$$

Deriviramo ponovo primjenjujući iste formule:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \beta}{\partial t} =$$

$$= a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\right)(-a) + a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}\right)a = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \beta}{\partial x} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}\right)\cdot 1 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right)\cdot 1 = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}.$$

Kada $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ uvrstimo u zadanu jednadžbu, dobit ćemo:

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right) = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right) \quad \text{ili} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} = 0.$$

Primjer 5. Transformirajmo jednadžbu $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = z^2$, gdje je nepoznata funkcija $z = z(x, y)$ derivabilna, izabravši za nove varijable $u = x$, $v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$ a za novu funkciju $\frac{1}{z} - \frac{1}{x}$.

Rješenje. Izrazimo parcijalne derivacije $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ pomoću parcijalnih derivacija $\frac{\partial w}{\partial u}$ i $\frac{\partial w}{\partial v}$. U tu svrhu diferencirajmo zadani odnos među starim i novim varijablama

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}x}{x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{y^2}, \qquad \mathrm{d}w = \frac{\mathrm{d}x}{x^2} - \frac{\mathrm{d}z}{z^2}.$$

S druge strane

$$\mathrm{d}w = \frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

Prema tome je

$$\frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}x}{x^2} - \frac{\mathrm{d}z}{z^2}$$

ili

$$\frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}x + \frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{d}x}{x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{y^2}\right) = \frac{\mathrm{d}x}{x^2} - \frac{\mathrm{d}z}{z^2}.$$

Odatle je

$$dz = z^2\left(\frac{1}{x^2}\,\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\,\frac{\partial w}{\partial v}\right)dx + \frac{z^2}{y^2}\,\frac{\partial w}{\partial v}\,dy$$

i prema tome

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z^2\left(\frac{1}{x^2}\,\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\,\frac{\partial w}{\partial v}\right)$$

i

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y^2}\,\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Uvrstivši te izraze u zadanu jednadžbu dobivamo

$$x^2z^2\left(\frac{1}{x^2}\,\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\,\frac{\partial w}{\partial v}\right) + z^2\,\frac{\partial w}{\partial v} = z^2$$

ili

$$\frac{\partial w}{\partial u} = 0.$$

1969. Transformirajte jednadžbu

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

stavivši $x = e^t$.

1970. Transformirajte jednadžbu

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0,$$

stavivši $x = \cos t$.

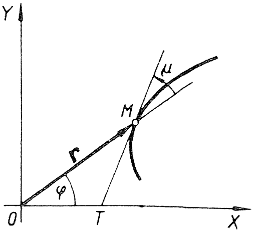
1971. Transformirajte ove jednadžbe uzevši za argument y:

a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$ b) $\dfrac{dy}{dx}\,\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0.$

1972. Tangens kuta μ koji zatvara tangenta MT i radijvektor OM dirališta (sl. 69), izražen je na ovaj način:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{y' - \dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{y}{x}y'}.$$

Transformirajte taj izraz prijelazom na polarne koordinate: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.



Slika 69.

1973. Formulu zakrivljenosti krivulje

$$K=\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}$$

izrazite u polarnim koordinatama $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

1974. Transformirajte na nove nezavisne varijable u i v jednadžbu

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

ako je $u=x$, $v=x^2+y^2$.

1975. Transformirajte na nove nezavisne varijable u i v jednadžbu

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z=0, \qquad \text{ako je } u=x,\ v=\frac{y}{x}.$$

1976. Laplaceovu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

transformirajte na polarne koordinate r i φ stavivši

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi.$$

1977. Transformirajte jednadžbu

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

stavivši $u=xy$ i $v=\dfrac{x}{y}$.

1978. Transformirajte jednadžbu

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z,$$

uvođenjem novih nezavisnih varijabli

$$u=x^2+y^2, \quad v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

i nove funkcije $w=\ln z-(x+y)$.

1979. Transformirajte jednadžbu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

uzevši za nove nezavisne varijable

$$u = x + y, \quad v = \frac{y}{x}$$

i za novu funkciju

$$w = \frac{z}{x}.$$

1980. Transformirajte jednadžbu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

supstitucijom $u = x + y$, $v = x - y$, $\omega = xy - z$, gdje je $w = w(u, v)$.

11. Tangencijalna ravnina i normala na plohu

1°. Jednadžba tangencijalne ravnine i normale kada je ploha zadana u eksplicitnom obliku. *Tangencijalnom ravninom* na plohu u njenoj tački M (diralištu) nazivamo ravninu u kojoj leže sve tangente u tački M na različite glatke krivulje povučene na plohi tom tačkom.

Normalom na plohu nazivamo okomicu na tangencijalnu ravninu u diralištu.

Ako je jednadžba plohe u Descartesovom koordinatnom sistemu zadana eksplicitno $z = f(x, y)$, gdje je $f(x, y)$ diferencijabilna funkcija, onda je jednadžba tangencijalne ravnine u tački $M(x_0, y_0, z_0)$ plohe

$$Z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(X - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(Y - y_0). \tag{1}$$

Ovdje je $z_0 = f(x_0, y_0)$, a X, Y i Z su koordinate pomične tačke tangencijalne ravnine.

Jednadžba normale ima oblik

$$\frac{X - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{Y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{Z - z_0}{-1}, \tag{2}$$

gdje su X, Y i Z koordinate pomične tačke normale.

Primjer 1. Napišimo jednadžbu tangencijalne ravnine i normale na plohu $z = \frac{x^2}{2} - y^2$ u njenoj tački $M(2; -1; 1)$.

Rješenje. Nađimo parcijalne derivacije zadane funkcije i njihove vrijednosti u tački M

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 2.$$

Odatle ćemo primjenom formula (1) i (2) imati:

$z - 1 = 2(x-2) + 2(y+1)$ ili $2x + 2y - z - 1 = 0$ kao jednadžbu tangencijalne ravnine i

$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$ kao jednadžbu normale.

2°. Jednadžba tangencijalne ravnine i normale kada je ploha zadana implicitno. U tom slučaju, kada je jednadžba glatke plohe zadana u implicitnom obliku sa

$$F(x,\ y,\ z)=0$$

gdje je F derivabilna funkcija, $F(x_0, y_0, z_0)=0$ i $\operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0)\neq 0$, pripadna jednadžba tangencijalne ravnine imat će oblik

$$F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)(X-x_0)+F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)(Y-y_0)+F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)(Z-z_0)=0, \tag{3}$$

a jednadžba normale

$$\frac{X-x_0}{F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{Y-y_0}{F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{Z-z_0}{F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)}. \tag{4}$$

Primjer 2. Napišimo jednadžbe tangencijalne ravnine i normale na plohu $3xyz-z^3=a^3$ u tački za koju je $x=0,\ y=a$.

Rješenje. Nađemo aplikatu dirališta uvrštenjem $x=0,\ y=a$ u jednadžbu plohe: $-z^3=a^3$, odakle je $z=-a$. Na taj način dobivamo da je diralište $M\ (0,\ a,\ -a)$.

Označimo sa $F\ (x, y, z)$ lijevu stranu jednadžbe, pa nađimo parcijalne derivacije i njihove vrijednosti u tački M:

$$F'_x=3yz, \qquad (F'_x)_M=-3a^2,$$

$$F'_y=3xz, \qquad (F'_y)_M=0,$$

$$F'_z=3xy-3z^2, \qquad (F'_z)_M=-3a^2.$$

Primijenivši formule (3) i (4) dobit ćemo

$$-3a^2(x-0)+0(y-a)-3a^2(z+a)=0$$

ili

$$x+z+a=0$$

kao jednadžbu tangencijalne ravnine, a

$$\frac{x-0}{-3a^2}=\frac{y-a}{0}=\frac{z+a}{-3a^2}$$

ili

$$\frac{x}{1}=\frac{y-a}{0}=\frac{z+a}{1}$$

kao jednadžbu normale.

1981. Napišite jednadžbu tangencijalne ravnine i jednadžbe normale na ove plohe u navedenim tačkama:

a) na rotacioni paraboloid $z=x^2+y^2$ u tački $(1;\ -2;\ 5)$;

b) na stožac $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{8}=0$ u tački $(4;\ 3;\ 4)$;

c) na kuglu $x^2+y^2+z^2=2Rz$ u tački $(R\cos\alpha;\ R\sin\alpha;\ R)$.

1982. U kojim tačkama elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

normala na elipsoid tvori jednake kutove s koordinatnim osima?

1983. Tačkom $M(3;\ 4;\ 12)$ kugle $x^2+y^2+z^2=169$ položene su ravnine okomite na osi OX i OY. Napišite jednadžbu ravnine koja prolazi tangentama na dobivene presječnice u njihovoj zajedničkoj tački M.

1984. Pokažite da jednadžba tangencijalne ravnine centralne plohe drugoga reda

$$ax^2+by^2+cz^2=k\ (|a|+|b|+|c|\neq 0)$$

u njenoj tački $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ ima oblik

$$ax_0x+by_0y+cz_0z=k.$$

1985. Na plohu $x^2+2y^2+3z^2=21$ položite tangencijalne ravnine paralelne s ravninom $x+4y+6z=0$.

1986. Na elipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ položite tangencijalne ravnine koje na koordinatnim osima odsijecaju jednake odsječke.

1987. Na plohi $x^2+y^2-z^2-2x=0$ nađite tačke u kojima su tangencijalne ravnine paralelne s koordinatnim ravninama.

1988. Dokažite da tangencijalne ravnine plohe $xyz=m^3$ tvore s koordinatnim ravninama tetraedar konstantnog volumena.

1989. Pokažite da tangencijalne ravnine plohe $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ odsijecaju na koordinatnim osima odsječke kojima je suma konstantna.

1990. Pokažite da se stožac $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ i kugla

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{b^2+c^2}{c}\right)^2=\frac{b^2}{c^2}(b^2+c^2)$$

diraju u tačkama $(0,\ \pm b,\ c)$.

1991. *Kutom između dviju ploha* u tački njihova presijecanja nazivamo kut među tangencijalnim ravninama položenim na zadane plohe u razmatranoj tački.

Pod kakvim kutom se sijeku valjak $x^2+y^2=R^2$ i kugla

$$(x-R)^2+y^2+z^2=R^2 \quad \text{u tački} \quad M\left(\frac{R}{2},\ \frac{R\sqrt{3}}{2},\ 0\right)?$$

1992. Plohe nazivamo *ortogonalnim* ako se one sijeku pod pravim kutom u svakoj tački njihove presječnice.

Pokažite da su plohe $x^2+y^2+z^2=r^2$ (kugla), $y=x\operatorname{tg}\varphi$ (ravnina) i $z^2=(x^2+y^2)\operatorname{tg}^2\psi$ (stožac), koje su koordinatne plohe sfernih koordinata $r,\ \varphi,\ \psi$, međusobno ortogonalne.

1993. Pokažite da sve ravnine tangencijalne na plohu stošca $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ u njegovoj tački $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$, gdje je $x_0\neq 0$, prolaze ishodištem koordinatnog sistema.

1994*. Nađite projekcije elipsoida

$$x^2+y^2+z^2-xy-1=0$$

na koordinatne ravnine.

1995. Dokažite da normala u po volji odabranoj tački rotacione plohe $z=f\sqrt{(x^2+y^2)}$ ($f' \neq 0$) siječe os rotacije.

12. Taylorova formula za funkcije više varijabli

Neka funkcija $f(x, y)$ ima u okolini tačke (a, b) neprekinute derivacije svih redova do $(n+1)$-vog uključivo. Tada za razmatranu okolinu vrijedi *Taylorova formula*:

$$f(x, y)=f(a, b)+\frac{1}{1!}[f_x'(a, b)(x-a)+f_y'(a, b)(y-b)]+$$

$$+\frac{1}{2!}[f_{xx}''(a, b)(x-a)^2+2f_{xy}''(a, b)(x-a)(y-b)+f_{yy}''(a, b)(y-b)^2]+\dots$$

$$\dots+\frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a, b)+R_n(x, y), \tag{1}$$

gdje je

$$R_n(x, y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f[a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)]$$

$$(0<\theta<1).$$

Drugim oznakama:

$$f(x+h, y+k)=f(x, y)+\frac{1}{1!}[hf_x'(x, y)+kf_y'(x, y)]+$$

$$+\frac{1}{2!}[h^2f_{xx}''(x, y)+2hkf_{xy}''(x, y)+k^2f_{yy}''(x, y)]+\dots$$

$$\dots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y)+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x+\theta h; y+\theta k), \tag{2}$$

$h=\Delta x$ i $k=\Delta y$; ili

$$\Delta f(x, y)=\mathrm{d}f(x, y)+\frac{1}{2!}\mathrm{d}^2f(x, y)+\dots$$

$$\dots+\frac{1}{n!}\mathrm{d}^nf(x, y)+\frac{1}{(n+1)!}\mathrm{d}^{n+1}f(x+\theta h; y+\theta k). \tag{3}$$

Specijalni slučaj formule (1) za $a=b=0$ nazivamo *Maclaurinovom formulom*. Analogne formule vrijede za funkcije sa tri i više varijabli.

Primjer. Nađimo prirast funkcije $f(x, y)=x^3-2y^3+3xy$ pri prijelazu od vrijednosti $x=1$, $y=2$ na vrijednosti $x_1=1+h$, $y_1=2+k$.

Rješenje. Traženi izraz možemo naći primjenom formule (2). Prethodno izračunajmo uzastopne parcijalne derivacije i njihove vrijednosti u zadanoj tački (1, 2):

$$\begin{aligned}
f'_x(x, y) &= 3x^2 + 3y, & f'_x(1; 2) &= 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9,\\
f'_y(x, y) &= -6y^2 + 3x, & f'_y(1; 2) &= -6\cdot 4 + 3\cdot 1 = -21,\\
f''_{xx}(x, y) &= 6x, & f''_{xx}(1; 2) &= 6\cdot 1 = 6,\\
f''_{xy}(x, y) &= 3, & f''_{xy}(1; 2) &= 3,\\
f''_{yy}(x, y) &= -12y, & f''_{yy}(1; 2) &= -12\cdot 2 = -24,\\
f'''_{xxx}(x, y) &= 6, & f'''_{xxx}(1; 2) &= 6,\\
f'''_{xxy}(x, y) &= 0, & f'''_{xxy}(1; 2) &= 0,\\
f'''_{xyy}(x, y) &= 0, & f'''_{xyy}(1; 2) &= 0,\\
f'''_{yyy}(x, y) &= -12, & f'''_{yyy}(1; 2) &= -12.
\end{aligned}$$

Sve daljnje derivacije identički su jednake nuli. Uvrštenjem zadanih rezultata u formulu (2) dobivamo:

$$\begin{aligned}
\Delta f(x, y) &= f(1 + h, 2 + k) - f(1, 2) = h\cdot 9 + k(-21) +\\
&+ \frac{1}{2!}[h^2\cdot 6 + 2hk\cdot 3 + k^2(-24)] + \frac{1}{3!}[h^3\cdot 6 + 3h^2k\cdot 0 + 3hk^2\cdot 0 + k^3(-12)] =\\
&= 9h - 21k + 3h^2 + 3hk - 12k^2 + h^3 - 2k^3.
\end{aligned}$$

1996. Razvijte $f(x + h, y + k)$ po cijelim pozitivnim potencijama od h i k, ako je

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

1997. Funkciju $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ razvijte po Taylorovoj formuli u okolini tačke $(-2; 1)$

1998. Nađite prirast koji dobiva funkcija $f(x, y) = x^2y$ pri prijelazu od vrijednosti $x = 1$, $y = 1$ na vrijednosti

$$x_1 = 1 + h, \quad y_1 = 1 + k.$$

1999. Funkciju $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$ razvijte po Taylorovoj formuli u okolini tačke $(1; 1; 1)$.

2000. Razvijte $f(x + h, y + k, z + l)$ po cijelim pozitivnim potencijama od h, k i l, ako je

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$$

2001. Razvijte po Maclaurinovoj formuli do uključivo članova 3. reda funkciju

$$f(x, y) = e^x \sin y.$$

2002. Razvijte po Maclaurinovoj formuli do uključivo članova 4. reda funkciju

$$f(x, y) = \cos x \cos y.$$

2003. Razvijte po Taylorovoj formuli u okolini tačke $(1; 1)$ do uključivo članova drugog reda funkciju

$$f(x, y) = y^x.$$

2004. Razvijte po Taylorovoj formuli u okolini tačke $(1; -1)$ do uključivo članova trećeg reda funkciju

$$f(x, y) = e^{x+y}.$$

2005. Izvedite približne formule s tačnosti do članova drugog reda s obzirom na veličine α i β za izraze

a) $\operatorname{arctg}\dfrac{1+\alpha}{1-\beta}$; b) $\sqrt{\dfrac{(1+\alpha)^m+(1+\beta)^n}{2}}$,

ako su $|\alpha|$ i $|\beta|$ maleni prema 1.

2006*. Primjenom Taylorove formule do članova drugog reda izračunajte približno

a) $\sqrt{1{,}03}$, $\sqrt[3]{0{,}98}$; b) $(0{,}95)^{2{,}01}$.

2007. Neka je z ona implicitna funkcija od x i y određena jednadžbom $z^3-2xz+y=0$, koja dobiva vrijednost $z=1$ za $x=1$ i $y=1$. Napišite nekoliko članova razvoja funkcije z po uzlaznim potencijama razlika $x-1$ i $y-1$.

13. Ekstremi funkcija više varijabli

1°. Definicija ekstrema funkcije. Kažemo da funkcija $f(x,y)$ ima *maksimum* (*minimum*) $f(a,b)$ u tački $P(a,b)$ ako je za sve tačke $P'(x;y)$ različite od P u nekoj okolini tačke P ispunjena nejednadžba $f(a,b)>f(x,y)$ (odnosno $f(a,b)<f(x,y)$). Maksimum ili minimum funkcije nazivamo njenim *ekstremom*. Analogno se određuje ekstrem funkcije sa tri ili više varijabli.

2°. Nužni uvjeti ekstrema. Tačke u kojima diferencijabilna funkcija $f(x,y)$ može dostići ekstrem (tzv. *stacionarne tačke*) nalazimo se rješavanjem sistema jednadžbi

$$f'_x(x,y)=0,\quad f'_y(x,y)=0 \tag{1}$$

(nužni uvjeti ekstrema). Sistem (1) ekvivalentan je jednoj jednadžbi a $df(x,y)=0$ za sve dx i dy. U općem slučaju u tački ekstrema $P(a,b)$ funkcije $f(x,y)$ ili je $df(a,b)=0$ ili $df(a,b)=0$ ili $df(a,b)$ ne postoji.

3°. Dovoljni uvjeti ekstrema. Neka je $P(a,b)$ stacionarna tačka funkcije $f(x,y)$ tj. $df(a,b)=0$. Tada:

a) ako je $d^2f(a,b)<0$ za $dx^2+dy^2>0$, onda je $f(a,b)$ *maksimum* funkcije $f(x,y)$;
b) ako je $d^2f(a,b)>0$ za $dx^2+dy^2>0$, onda je $f(a,b)$ *minimum* funkcije $f(x,y)$;
c) ako $d^2f(a,b)$ mijenja predznak, onda $f(a,b)$ nije ekstrem funkcije $f(x,y)$.

Navedeni uvjeti ekvivalentni su ovima: neka je $f'_x(a,b)=f'_y=(a,b)=0$ i $A=f''_{xx}(a,b)$, $B=f''_{xy}(a,b)$, $C=f''_{yy}(a,b)$. Tvorimo *diskriminantu*

$$\Delta=AC-B^2.$$

Tada: 1) ako je $\Delta>0$, onda funkcija ima ekstrem u tački $P(a,b)$ i to maksimum kada je $A<0$ (ili $C<0$) i minimum kada je $A>0$ (ili $C>0$); 2) ako je $\Delta<0$ onda nema ekstrema u tački $P(a,b)$; 3) ako je $\Delta=0$, onda pitanje postojanja ekstrema funkcije u tački $P(a,b)$ ostaje otvoreno (potrebna su daljnja ispitivanja).

4°. Slučaj funkcija više varijabli. Za funkciju od tri i više varijabli nužni uvjeti postojanja ekstrema analogni su uvjetima 1°, (1), a dovoljni uvjeti analogni su uvjetima 3°, a), b), c).

Primjer 1. Ispitajmo da li funkcija $z=x^3+3x^2y-15x-12y$ ima ekstrem.

Rješenje. Nađimo parcijalne derivacije i tvorimo sistem jednadžbi (1):

$$\frac{\partial z}{\partial x}\equiv 3x^2+3y^2-15=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}\equiv 6xy-12=0$$

ili

$$\begin{cases} x^2+y^2-5=0,\\ xy-2=0.\end{cases}$$

Rješenjem sistema dobivamo četiri stacionarne tačke:

$$P_1(1;\ 2);\quad P_2(2;\ 1);\quad P_3(-1;\ -2);\quad P_4(-2;\ 1).$$

Nađemo derivacije drugog reda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x$$

i tvorimo diskriminantu $\Delta=AC-B^2$ za svaku stacionarnu tačku.

1) Za tačku P_1 je: $A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1}=6$, $B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_{P_1}=12$, $C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_1}=6$, $\Delta=AC-B^2=36-144<0$. Znači da u tački P_1 nema ekstrema.

2) Za tačku P_2 je: $A=12$, $B=6$, $C=12$; $\Delta=144-36>0$, $A>0$. U tački P_2 funkcija ima minimum. Taj minimum jednak je vrijednosti funkcije kada je $x=2$, $y=1$:

$$z_{\min}=8+6-30-12=-28.$$

3) Za tačku P_3 je: $A=-6$, $B=-12$, $C=-6$; $\Delta=36-144<0$. Ekstrema nema.

4) Za tačku P_4 je: $A=-12$, $B=-6$, $C=-12$; $\Delta=144-36>0$, $A<0$. U tački P_4 funkcija ima maksimum koji je jednak $z_{\max}=-8-6+30+12=28$.

5°. Uvjetni ekstrem. U jednostavnijem slučaju *uvjetnim ekstremom* funkcije $f(x,\ y)$ nazivamo maksimum ili minimum te funkcije, dostignut pod uvjetom da su argumenti funkcije povezani jednadžbom $\varphi(x,y)=0$ (*jednadžba veze*). Da bi našli uvjetni ekstrem derivabilne funkcije $f(x,y)$ uz postojanje derivabilnog odnosa $\varphi(x,y)=0$ tvorimo tzv. *Lagrangeovu funkciju*

$$F(x,\ y)=f(x,\ y)+\lambda\cdot\varphi(x,\ y),$$

gdje je λ neodređen konstantan faktor, i tražimo običan ekstrem te pomoćne funkcije. Nužni uvjeti ekstrema svode se na sistem od tri jednadžbe

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\\[2ex] \varphi(x,\ y)=0\end{cases}\tag{2}$$

sa tri nepoznanice x, y, λ iz kojih je općenito moguće odrediti te nepoznanice.

Pitanje o postojanju i karakteru uvjetnog ekstrema rješavamo na osnovu izučavanja predznaka drugog diferencijala Lagrangeove funkcije

$$\mathrm{d}^2F(x,\ y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2$$

za ispitivani sistem vrijednosti x, y, λ dobiven iz (2), pod uvjetom da su $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$ vezani jednadžbom

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y=0\quad(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\neq 0).$$

To znači da funkcija $f(x,\ y)$ ima uvjetni maksimum ako je $\mathrm{d}^2F<0$, i uvjetni minimum, ako je $\mathrm{d}^2F>0$. Napose, ako je diskriminanta Δ za funkciju $F(x,\ y)$ u stacionarnoj tački pozitivna, onda je u toj tački uvjetni maksimum funkcije $f(x,\ y)$ kada je $A<0$ (ili $C<0$) i uvjetni minimum kada je $A>0$ (ili $C>0$).

Analogno ćemo naći uvjetni ekstrem funkcije sa tri ili više varijabli kada postoji jedna ili više jednadžbi veze (broj jednadžbi veze mora biti manji od broja varijabli). U tome slučaju uvodimo toliko neodređenih faktora u Lagrangeovu funkciju, koliko ima jednadžbi veze.

Primjer 2. Nađimo ekstreme funkcije

$$z=6-4x-3y$$

pod uvjetom da varijable x i y zadovoljavaju jednadžbu

$$x^2+y^2=1$$

Rješenje. Geometrijski se zadatak svodi na traženje najveće i najmanje vrijednosti aplikate z ravnine $z=6-4x-3y$ za tačke u kojima ravnina siječe valjak $x^2+y^2=1$.

Tvorimo Lagrangeovu funkciju

$$F(x, y)=6-4x-3y+\lambda(x^2+y^2-1).$$

Imamo $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-4+2\lambda x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=-3+2\lambda y$. Nužni uvjeti daju sistem jednadžbi

$$\begin{cases} -4+2\lambda x=0, \\ -3+2\lambda y=0, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Kada riješimo taj sistem, nalazimo da je

$$\lambda_1=\frac{5}{2}, \qquad x_1=\frac{4}{5}, \qquad y_1=\frac{3}{5}$$

i

$$\lambda_2=-\frac{5}{2}, \qquad x_2=-\frac{4}{5}, \qquad y_2=-\frac{3}{5}.$$

Kako je

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=2\lambda, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=2\lambda,$$

to je

$$d^2F=2\lambda(dx^2+dy^2).$$

Kada je $\lambda=\dfrac{5}{2}$, $x=\dfrac{4}{5}$ i $y=\dfrac{3}{5}$, tada je $d^2F>0$, pa prema tome u toj tački funkcija ima uvjetni minimum. Kada je $\lambda=-\dfrac{5}{2}$, $x=-\dfrac{4}{5}$ i $y=-\dfrac{3}{5}$, tada je $d^2F<0$, pa prema tome u toj tački funkcija ima uvjetni maksimum.

Na taj način je

$$z_{\max}=6+\frac{16}{5}+\frac{9}{5}=11,$$

$$z_{\min}=6-\frac{16}{5}-\frac{9}{5}=1.$$

6°. Najveća i najmanja vrijednost funkcije. Funkcija, diferencijabilna u ograđenom zatvorenom području poprima svoju najveću (najmanju) vrijednost ili u stacionarnoj tački ili u graničnoj tački područja.

Primjer 3. Odredimo najveću i najmanju vrijednost funkcije

$$z=x^2+y^2-xy+x+y$$

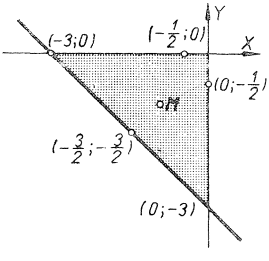
u području

$$x \leqslant 0, \quad y \leqslant 0, \quad x+y \geqslant -3.$$

Rješenje. Navedeno područje je trokut (sl. 70).

1) Tražimo stacionarne tačke:

$$\begin{cases} z'_x \equiv 2x-y+1=0, \\ z'_y \equiv 2y-x+1=0; \end{cases}$$



Slika 70.

odatle je $x=-1$, $y=-1$; dobivamo tačku $M(-1;-1)$.

U tački M je vrijednost funkcije $z_M=-1$. Ispitivanje ekstrema nije potrebno.

2) Istražimo funkciju na rubu područja.

Kada je $x=0$ imamo $z=y^2+y$ i zadatak se svodi na traženje najveće i najmanje vrijednosti te funkcije jednog argumenta na dijelu $-3 \leqslant y \leqslant 0$. Ispitivanjem ćemo naći da je $(z_{\text{najv}})_{x=0}=6$ u tački $(0;\ -3)$; $(z_{\text{najm}})_{x=0}=-\frac{1}{4}$ u tački $\left(0;\ -\frac{1}{2}\right)$.

Za $y=0$ dobivamo $z=x^2+x$. Analogno nalazimo da je $(z_{\text{najv}})_{y=0}=6$ u tački $(-3;\ 0)$; $(z_{\text{najm}})_{y=0}=-\frac{1}{4}$ u tački $\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$.

Za $x+y=-3$ ili $y=-3-x$ imat ćemo $z=3x^2+9x+6$. Na isti način naći ćemo da je $(z_{\text{najm}})_{x+y=-3}=-\frac{3}{4}$ u tački $\left(-\frac{3}{2};\ -\frac{3}{2}\right)$; $(z_{\text{najv}})_{x+y=-3}=6$ poklapa se sa $(z_{\text{najv}})_{x=0}$ i $(z_{\text{najv}})_{y=0}$.

Na pravcu $x+y=-3$ mogli bismo ispitati funkciju na uvjetni ekstrem ne svodeći je na funkciju jednog argumenta.

3) Usporedbom svih dobivenih vrijednosti funkcije z ustanovljujemo da je $z_{\text{najv}}=6$ u u tačkama $(0;\ -3)$ i $(-3;\ 0)$; $z_{\text{najm}}=-1$ u stacionarnoj tački M.

Ispitajte na ekstrem ove funkcije dviju varijabli:

2008. $z=(x-1)^2+2y^2$.

2009. $z=(x-1)^2-2y^2$.

2010. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

2011. $z=x^3y^2(6-x-y)\quad (x>0,\ y>0)$.

2012. $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

2013. $z=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$.

2014. $z=1-(x^2+y^2)^{2/3}$.

2015. $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

2016. $z=\frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

2016.1. $z=\frac{8}{x}+\frac{x}{y}+y\quad (x>0,\ y>0)$.

2016.2. $z=e^{x-y}(x^2-2y^2)$.

Nađite ekstreme funkcija sa tri varijable:

2017. $u=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$.

2018. $u=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}\quad (x>0,\ y>0,\ z>0)$.

Nađite ekstreme funkcija z, zadanih implicitno:

2019*. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$.

2020. $x^3-y^2-3x+4y+z^2+z-8=0$.

Odredite uvjetne ekstreme funkcija:

2021. $z=xy$ za $x+y=1$.

2022. $z=x+2y$ za $x^2+y^2=5$.

2023. $z=x^2+y^2$ za $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.

2024. $z=\cos^2 x+\cos^2 y$ za $y-x=\frac{\pi}{4}$.

2025. $u = x - 2y + 2z$ za $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

2026. $u = x^2 + y^2 + z^2$ za $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > b > c > 0)$.

2027. $u = xy^2z^3$ za $x + y + z = 12$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

2028. $u = xyz$ uz uvjete: $x + y + z = 5$, $xy + yz + zx = 8$.

2029. Dokažite nejednadžbu

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz},$$

ako je $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

Uputa: Tražite maksimum funkcije $u = xyz$ pod uvjetom $x + y + z = S$.

2030. Odredite najveću vrijednost funkcije $z = 1 + x + 2y$ u područjima:

a) $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$;
b) $x \geqslant 0$ $y \leqslant 0$, $x - y \leqslant 1$.

2031. Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije
a) $z = x^2y$ i b) $z = x^2 - y^2$ u području $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

2032. Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije

$$z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$$

u području $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

2033. Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije $z = x^3 + y^3 - 3xy$ u području $0 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant y \leqslant 2$.

14. Zadaci za određivanje najvećih i najmanjih vrijednosti funkcija

Primjer 1. Pozitivni broj a treba razdijeliti na tri pozitivna sumanda tako da njihov produkt bude najveći.

Rješenje. Neka traženi sumandi budu x, y, $a - x - y$. Tražimo maksimum funkcije

$$f(x, y) = xy(a - x - y).$$

Po smislu zadatka funkciju $f(x, y)$ razmatramo unutar zatvorenog trokuta $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant a$ (sl. 71).
Riješimo sistem

$$\begin{cases} f'_x(x, y) \equiv y(a - 2x - y) = 0, \\ f'_y(x, y) \equiv x(a - x - 2y) = 0, \end{cases}$$

pa dobijemo za unutrašnjost trokuta jednu stacionarnu tačku $\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$. Za nju provjerimo da li ispunjava dovoljne uvjete.

Imamo: $f''_{xx}(x, y) = -2y$, $f''_{xy}(x, y) = a - 2x - 2y$, $f''_{yy}(x, y) = -2x$.

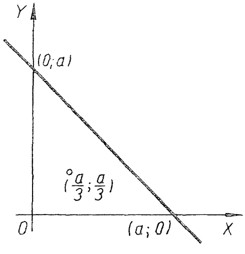
Prema tome je

$$A = f''_{xx}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = -\frac{2}{3}a,$$

$$B = f''_{xy}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = -\frac{1}{3}a,$$

$$C = f''_{yy}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = -\frac{2}{3}a \quad \text{i}$$

$$\Delta = AC - B^2 > 0, \quad A < 0.$$



Slika 71.

Dakle, u tački $\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$ funkcija ima maksimum. Kako je na rubu trokuta funkcija $f(x, y) = 0$, taj maksimum bit će i najveća vrijednost funkcije, tj. produkt će biti najveći, ako je $x = y = a - x - y = \frac{a}{3}$; pri tome je najveća vrijednost produkta $\frac{a^3}{27}$.

Napomena. Zadatak smo mogli riješiti metodom uvjetnog ekstrema traženjem maksimuma funkcije $u = xyz$ uz uvjet da je $x + y + z = a$.

2034. Od svih pravokutnih paralelepipeda s jednakim volumenima V nađite onaj kojemu je oplošje najmanje.

2035. Uz koje dimenzije otvorena pravokutna kada zadane zapremine V ima najmanju površinu?

2036. Od svih trokuta zadanog opsega $2p$ nađite onaj koji ima najveću površinu.

2037. Nađite takav pravokutni paralelepiped koji uz zadano oplošje S ima najveći volumen.

2038. Predočite pozitivni broj a u obliku produkta od četiri pozitivna faktora tako da njihov zbroj bude najmanji.

2039. U ravnini XOY nađite tačku $M(x, y)$ tako da zbroj kvadrata udaljenosti od tri pravca: $x = 0$, $y = 0$, $x - y + 1 = 0$ bude najmanji.

2040. Nađite trokut zadanog opsega $2p$ koji pri rotaciji oko jedne svoje stranice tvori tijelo najvećeg volumena.

2041. U ravnini su zadane tri materijalne tačke $P_1(x_1 y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ s masama m_1, m_2, m_3. Za koji će položaj tačke $P(x, y)$ moment tromosti zadanog sistema tačaka s obzirom na tačku P (tj. suma $m_1\overline{P_1P}^2 + m_2\overline{P_2P}^2 + m_3\overline{P_3P}^2$) biti najmanji?

2042. Tačkom $M(a, b, c)$ položite ravninu koja s koordinatnim ravninama tvori tetraedar najmanjeg volumena.

2043. U elipsoid upišite pravokutan paralelepiped najvećeg volumena.

2044. Odredite vanjske dimenzije otvorenog pravokutnog sanduka sa zadanom debljinom stijena δ i unutrašnjom zapreminom V tako da bi za njegovu izradu trebalo utrošiti najmanje materijala.

2045. U kojoj tački elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

tangenta na elipsu zatvara s koordinatnim osima trokut najmanje površine?

2046* Nađite osi elipse

$$5x^2+8xy+5y^2=9.$$

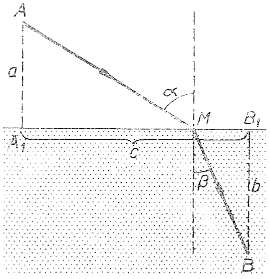
2047. U zadanu kuglu upišite valjak s najvećim oplošjem.

2048. Korita dviju rijeka (u granicama nekog područja) približno predstavljaju parabolu $y=x^2$ i pravac $x-y-2=0$. Treba spojiti obje rijeke ravnim kanalom najmanje duljine. Kojim tačkama treba provesti kanal?

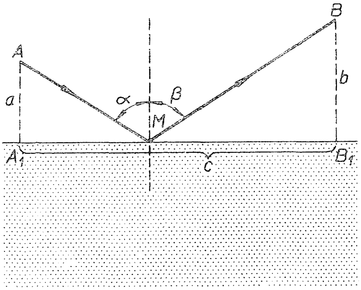
2049. Nađite najkraću udaljenost tačke M (1, 2, 3) od pravca

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{2}.$$

2050*. Tačke A i B nalaze se u različitim optičkim sredinama odijeljenim međusobno pravcem (sl. 72). Brzina širenja svjetlosti u prvoj sredini je v_1, a u drugoj v_2. Poslužite se »Fermatovim principom« prema kome se zraka svjetlosti širi po onoj liniji AMB, za koju je potreban minimum vremena, te izvedite zakon loma zrake svjetlosti.



Slika 72.



Slika 73.

2051. Koristeći se »Fermatovim principom« izvedite zakon refleksije svjetlosne zrake od ravnine u homogenoj sredini (sl. 73).

2052*. Ako električnim strujnim krugom otpora R teče struja I, onda će količina topline proizvedene u jedinici vremena biti proporcionalna sa I^2R. Odredite kako treba razgranati struju I na struje I_1, I_2, I_3 pomoću tri vodiča s pojedinačnim otporima R_1, R_2, R_3 da oslobođena toplina bude najmanja?

15. Singularne tačke ravninskih krivulja

1°. Definicija singularne tačke. Tačku $M(x_0,y_0)$ ravninske krivulje $f(x,y)=0$, gdje je f derivabilna, nazivamo *singularnom tačkom* ako njene koordinate istovremeno zadovoljavaju tri jednadžbe

$$f(x_0,\ y_0)=0, \qquad f'_x(x_0,\ y_0)=0, \qquad f'_y(x_0,\ y_0)=0.$$

2°. Osnovni tipovi singularnih tačaka. Neka u izoliranoj singularnoj tački $M(x_0, y_0)$ derivacije drugog reda

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0),$$

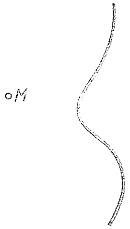
$$B = f''_{xy}(x_0, y_0),$$

$$C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

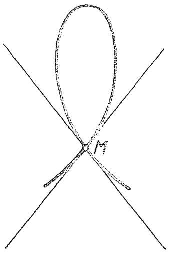
nisu sve jednake nuli i neka je

$$\Delta = AC - B^2,$$

onda:



Slika 74.



Slika 75.

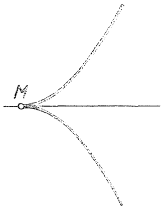
a) kada je $\Delta > 0$, tada je M *izolirana tačka* (sl. 74);

b) kada je $\Delta < 0$, tada je M *čvor* (*dvostruka tačka*) (sl. 75);

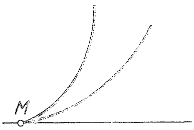
c) kada je $\Delta = 0$, tada je M ili *šiljak* prve vrste (sl. 76) ili druge vrste (sl. 77) ili *izolirana tačka*, ili *tačka samotangiranja* (sl. 78).

Prilikom rješavanja ovih zadataka pretpostavlja se obavezna konstrukcija krivulja.

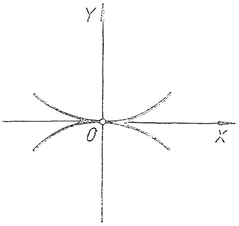
Primjer 1. Pokažimo da krivulja $y^2 = ax^2 + x^3$ ima: čvor, ako je $a > 0$; izoliranu tačku, ako je $a < 0$; šiljak prve vrste, ako je $a = 0$.



Slika 76.



Slika 77.



Slika 78.

Rješenje. Ovdje je $f(x, y) = ax^2 + x^3 - y^2$. Odredimo parcijalne derivacije i izjednačimo ih s nulom:

$$f'_x(x, y) \equiv 2ax + 3x^2 = 0,$$

$$f'_y(x, y) \equiv -2y = 0.$$

Taj sistem ima dva rješenja: $O(0; 0)$ i $N\left(-\frac{2}{3}a; 0\right)$, ali koordinate tačke N ne zadovoljavaju jednadžbu zadane krivulje. Znači da postoji jedina singularna tačka $O(0; 0)$.

Nađimo druge derivacije i njihove vrijednosti u tački O:

$$f''_{xx}(x\ y) = 2a + 6x, \quad A = 2a,$$

$$f''_{xy}(x, y) = 0, \quad B = 0,$$

$$f''_{yy}(x, y) = -2, \quad C = -2,$$

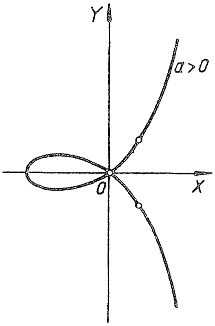
$$\Delta = AC - B^2 = -4a,$$

Iz toga slijedi:

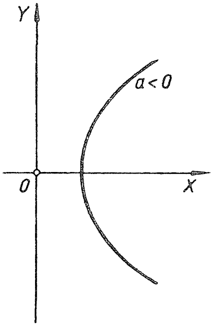
kada je $a>0$, tada je $\Delta<0$ i tačka O je čvor (sl. 79);

kada je $a<0$, tada je $\Delta>0$ i tačka O je izolirana tačka (sl. 80);

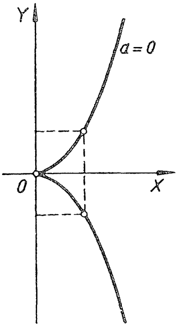
kada je $a=0$, tada je $\Delta=0$. Jednadžba krivulje će u tom slučaju biti $y^2=x^3$ ili $y=\pm\sqrt{x^3}$, gdje je $x\geqslant 0$; krivulja je simetrična s obzirom na os OX koja je tangenta. Prema tome je tačka M šiljak prve vrste (sl. 81).



Slika 79.



Slika 80.



Slika 81.

Istražite karakter singularnih tačaka ovih krivulja:

2053. $y^2=-x^2+x^4$.

2054. $(y-x^2)^2=x^5$.

2055. $a^4y^2=a^2x^4-x^6$.

2056. $x^2y^2-x^2-y^2=0$.

2057. $x^3+y^3-3axy=0$ (*Descartesov list*).

2058. $y^2(a-x)=x^3$ (*cisoida*).

2059. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ (*lemniskata*).

2060. $(a+x)y^2=(a-x)x^2$ (*strofoida*).

2061. $(x^2+y^2)(x-a)^2=b^2x^2$ $(a>0,\ b>0)$ (*konhoida*).

Razmotrite ova tri slušaja:

$$1)\ a>b, \qquad 2)\ a=b, \qquad 3)\ a<b.$$

2062. Istražite promjenu karaktera singularne tačke krivulje

$$y^2=(x-a)(x-b)(x-c)$$

u zavisnosti od vrijednosti a, b, c ($a\leqslant b\leqslant c$ realni).

16. Ovojnica

1°. Definicija ovojnice. *Ovojnicom porodice glatkih ravninskih krivulja* nazivamo krivulju (ili skup više krivulja) koja tangira sve krivulje zadane porodice, pri čemu u svakoj tački tangira neku liniju razmotrene porodice.

2°. Jednadžba ovojnice. Ako porodica krivulja

$$f(x,\ y,\ \alpha) = 0$$

gje je f derivabilna, ovisna o jednom promjenljvom parametru α ima ovojnicu, onda se parametarske jednadžbe ovojnice određuju iz sistema jednadžbi

$$\begin{cases} f(x,\ y,\ \alpha) = 0, \\ f'_\alpha(x,\ y,\ \alpha) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Eliminiramo li iz sistema (1) parametar α, dobivamo jednadžbu oblika

$$D(x,\ y) = 0. \tag{2}$$

Treba napomenuti, da formalno dobivena krivulja (2) (tzv. „*diskriminantna krivulja*") osim ovojnice, ako ona postoji, može sadržavati geometrijsko mjesto singularnih tačaka zadane porodice koje ne ulaze u sastav ovojnice te porodice.

Prilikom rješavanja ovakvih zadataka preporuča se skiciranje crteža.

Primjer. Nađimo ovojnicu porodice pravaca

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \quad (p = \text{const}, p > 0).$$

Rješenje. Zadana porodica pravaca ovisi o parametru α. Tvorimo sistem jednadžbi (1)

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0, \end{cases}$$

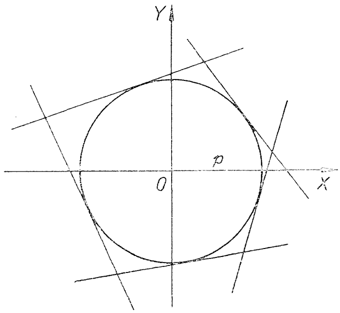
Kada sistem riješimo u odnosu na x i y, dobijemo parametarske jednadžbe ovojnice

$$x = p\cos\alpha, \qquad y = p\sin\alpha.$$

Kvadriramo obje jednadžbe pa ih zatim zbrojimo, čime je eliminiran parametar α:

$$x^2 + y^2 = p^2.$$

Tako dobivamo da je ovojnica zadane porodice pravaca kružnica polumjera p sa središtem u ishodištu koordinatnog sistema. Zadana porodica pravaca je porodica tangenata na tu kružnicu (sl. 82).



Slika 82.

2063. Nađite ovojnicu porodice kružnica

$$(x-a)^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}.$$

2064. Nađite ovojnicu porodice pravaca

$$y = kx + \frac{p}{2k}$$

(k je parametar, a p = const).

2065. Nađite ovojnicu porodice kružnica jednakih polumjera R, kojima se središta nalaze na osi OX.

2066. Nađite krivulju koju ovija odsječak duljine l, kada njegovi krajevi kližu po koordinatnim osima.

2067. Nađite ovojnicu porodice pravaca koji s koordinatnim osima tvore trokut konstantne površine S.

2068. Nađite ovojnicu elipsâ konstantne površine S kojima se osi simetrije poklapaju.

2069. Ispitajte karakter »diskriminantnih krivulja« ovih porodica krivulja (C je parametar):

a) kubnih parabola $y = (x - C)^3$;

b) semikubnih parabola $y^2 = (x - C)^3$;

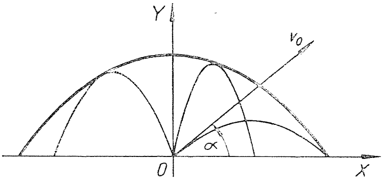
c) Neilovih parabola $y^3 = (x - C)^2$;

d) strofoida $(a + x)(y - C)^2 = x^2 (a - x)$.

2070. Jednadžba trajektorije gibanja taneta izbačenog iz tačke O s početnom brzinom v_0 pod kutom α prema horizontu (uz zanemaren otpor uzduha) glasi

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

gdje je g ubrzanje sile teže, uzimajući kut α kao parametar, nađite ovojnicu svih trajektorija taneta koje se nalaze u istoj vertikalnoj ravnini (»*parabola sigurnosti*« (sl. 83)).



Slika 83.

17. Duljina luka prostorne krivulje

Diferencijal luka prostorne krivulje u pravokutnim Descartesovim koordinatama jednak je

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

gdje su x, y, z koordinate pomične tačke krivulje.

Ako su

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

parametarske jednadžbe prostorne krivulje, onda duljina luka njenog dijela od $t = t_1$ do $t = t_2$ $(t_1 < t_2)$ iznosi

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \, dt.$$

U zadacima 2071 do 2076 nađite duljinu luka krivulje:

2071. $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2t^3}{3}$ od $t = 0$ do $t = 2$.

2072. $x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad z = \frac{3}{\pi} t$ od $t = 0$ do $t = \pi$.

2073. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t$ od $t = 0$ do po volji odabranog t.

2074. $y = \frac{x^2}{2}, \quad z = \frac{x^3}{6}$ od $x = 0$ do $x = 6$.

2075. $x^2 = 3y, \quad 2xy = 9z$ od tačke $O(0;\ 0;\ 0)$ do tačke $M(3;\ 3;\ 2)$.

2076. $y = a \arcsin \frac{x}{a}, \quad z = \frac{a}{4} \ln \frac{a+x}{a-x}$ od tačke $O(0;\ 0;\ 0)$ do tačke $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

2077. Položaj tačke u bilo kojem trenutku t $(t > 0)$ određen je jednadžbama

$$x = 2t, \quad y = \ln t, \quad z = t^2.$$

Nađite srednju brzinu gibanja u razdoblju od $t_1 = 1$ do $t_2 = 10$.

18. Vektorska funkcija skalarnog argumenta

1°. Derivacija vektorske funkcije skalarnog argumenta. *Vektorska funkcija* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$ može biti određena pomoću tri skalarne funkcije $a_x(t)$, $a_y(t)$ i $a_z(t)$ koje su projekcije vektorske funkcije na koordinatne osi:

$$\boldsymbol{a} = a_x(t)\,\boldsymbol{i} + a_y(t)\,\boldsymbol{j} + a_z(t)\,\boldsymbol{k}.$$

gdje su $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ jedinični koordinatni vektori sustava $Oxyz$.

Derivacija vektorske funkcije $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$ po skalarnom argumentu t je nova vektorska funkcija određena jednadžbom

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t) - \boldsymbol{a}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}a_x(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}a_y(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}a_z(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}.$$

Modul derivacije vektorske funkcije jednak je

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}a_y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}a_z}{\mathrm{d}t}\right)^2}.$$

Šiljak varijabilnog radijvektora $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ opisuje u prostoru krivulju

$$\boldsymbol{r} = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k},$$

nazvanu *hodografom vektora* $\boldsymbol{r}$.

Derivacija $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ je vektor koji tangira hodograf u pripadnoj tački, pri čemu je

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

gdje je s duljina luka hodografa, računajući od neke početne tačke.

Napose je $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right| = 1$.

Ako je parametar t vrijeme, onda je $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}$ *vektor brzine* šiljka vektora $\boldsymbol{r}$, a $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{w}$ *vektor ubrzanja šiljka vektora* $\boldsymbol{r}$.

2°. Osnovna pravila diferenciranja vektorske funkcije skalarnog argumenta.

1) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}t};$$

2) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{a}) = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}, \qquad \text{gdje je } m \text{ konstantan skalar;}$$

3) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi\boldsymbol{a}) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{a} + \varphi\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}, \qquad \text{gdje je } \varphi(t) \text{ skalarna funkcija od } t;$$

4) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t};$$

5) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t};$$

6) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{a}[\varphi(t)] = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t};$$

7) $$\boldsymbol{a}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \text{ako je } |\boldsymbol{a}| = \text{const.}$$

Primjer 1. Radijvektor tačke u gibanju u nekom trenutku zadan je jednadžbom

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} - 4t^2\boldsymbol{j} + + 3t^2\boldsymbol{k} \tag{1}$$

Odredimo trajektorije gibanja, brzinu i ubrzanje.

Rješenje. Iz jednadžbe (1) imamo:

$$x = 1, \quad y = -4t^2, \quad z = 3t^2.$$

Eliminiravši vrijeme t nalazimo da je trajektorija gibanja pravac

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{3}.$$

Iz jednadžbe (1) deriviranjem dobivamo brzinu gibanja

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -8t\boldsymbol{j} + 6t\boldsymbol{k}$$

i ubrzanje

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -8\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}.$$

Iznos brzine je prema tome

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \sqrt{(-8t)^2 + (6t)^2} = 10|t|.$$

Primijetimo da je ubrzanje konstantno i iznosi

$$\left|\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = 10,$$

2078. Pokažite da je vektorska jednadžba $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1=(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)t$ jednadžba pravca, ako su $\boldsymbol{r}_1$ i $\boldsymbol{r}_2$ radijvektori dviju zadanih tačaka.

2079. Odredite kakve krivulje su hodografi ovih vektorskih funkcija:

$$\text{a) } \boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{c}; \qquad \text{c) } \boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\cos t+\boldsymbol{b}\sin t;$$

$$\text{b) } \boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}t^2+\boldsymbol{b}t; \qquad \text{d) } \boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\,\mathrm{ch}\,t+\boldsymbol{b}\,\mathrm{sh}\,t,$$

gdje su $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$ konstantni vektori, a vektori $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ su međusobno okomiti.

2080. Nađite derivaciju vektorske funkcije od funkcije $\boldsymbol{a}(t)=a(t)\,\boldsymbol{a}^0(t)$, gdje je $a(t)$ skalarna funkcija, a $\boldsymbol{a}^0(t)$ jedinični vektor, u slučajevima kada se vektor $\boldsymbol{a}(t)$ mijenja: 1) samo po duljini, 2) samo po smjeru, 3) po duljini i po smjeru (opći slučaj). Objasnite geometrijski smisao dobivenih rezultata.

2081. Pomoću pravila za deriviranje vektorskih funkcija po skalarnom argumentu izvedite formulu za deriviranje mješovitog produkta od tri vektorske funkcije $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$.

2082. Nađite derivaciju po parametru t volumena paralelepipeda razapetog sa tri vektora

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}+t^2\boldsymbol{k};$$

$$\boldsymbol{b}=2t\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+t^3\boldsymbol{k};$$

$$\boldsymbol{c}=-t^2\boldsymbol{i}+t^3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

2083. Jednadžba gibanja je

$$\boldsymbol{r}=3\boldsymbol{i}\cos t+4\boldsymbol{j}\sin t,$$

gdje je t vrijeme. Odredite trajektoriju gibanja, brzinu i ubrzanje. Konstruirajte trajektoriju gibanja i vektore brzine i ubrzanja u trenucima $t=0$, $t=\frac{\pi}{4}$ i $t=\frac{\pi}{2}$.

2084. Jednadžba gibanja je

$$\boldsymbol{r}=2\boldsymbol{i}\cos t+2\boldsymbol{j}\sin t+3\boldsymbol{k}t.$$

Odredite trajektoriju gibanja, brzinu i ubrzanje. Kolika je brzina i ubrzanje i kakvi su im smjerovi u trenucima $t=0$ i $t=\frac{\pi}{2}$?

2085. Jednadžba gibanja je

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}\cos\alpha\cos\omega t+\boldsymbol{j}\sin\alpha\cos\omega t+\boldsymbol{k}\sin\omega t,$$

gdje su α i ω konstante, a t vrijeme. Odredite trajektoriju gibanja, veličinu i smjer brzine i ubrzanja.

2086. Jednadžba gibanja taneta (uz zanemaren otpor uzduha) glasi

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}_0t-\frac{gt^2}{2}\boldsymbol{k},$$

gdje je $\boldsymbol{v}_0\,\{v_{0x},\,v_{0y},\,v_{0z}\}$ početna brzina. Nađite brzinu i ubrzanje u po volji odabranom trenutku.

2087. Dokažite da je ubrzanje konstantno kada se tačka giba po paraboli $y = \frac{x^2}{a}$, $z = 0$ tako, da projekcija brzina na os OX ostaje konstantna $\left(\frac{dx}{dt} = \text{const}\right)$.

2088. Tačka na narezu vijka koji uvijamo u gredu opisuje zavojnicu

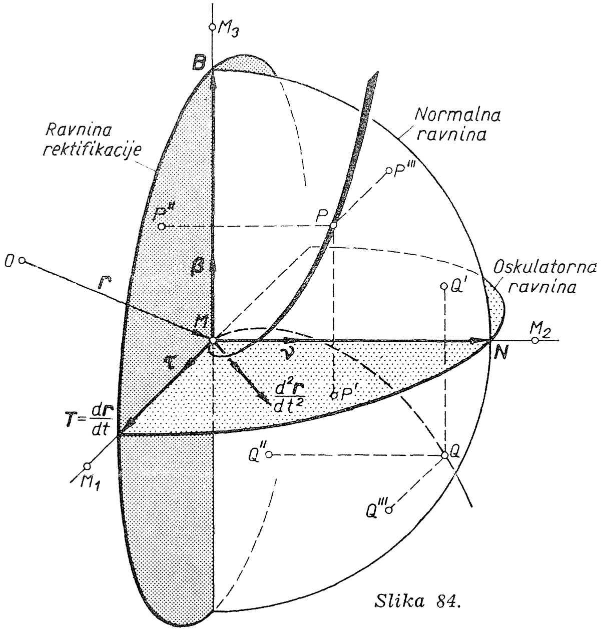
$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \quad z = h\theta,$$

gdje je θ kut zakreta, a polumjer vijka, a h visina uspona kada se vijak zakrene za jedan radijan. Odredite brzinu gibanja tačke.

2089. Nađite brzinu tačke na kružnici kotača polumjera a koji se okreće konstantnom kutnom brzinom ω tako da se pri tome njegovo središte pomiče po pravcu konstantnom brzinom v_0.

19. Popratni trobrid prostorne krivulje

U svakoj nesingularnoj tački $M(x, y, z)$ prostorne krivulje $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ možemo konstruirati *popratni trobrid* (*triedar*), sastavljen od tri međusobno okomite ravnine (sl. 84):



M_3
B
Ravnina rektifikacije
Normalna ravnina
P'''
P''
P
O
r
β
Oskulatorna ravnina
Q'
M
M_2
ν
N
τ
$\frac{d^2r}{dt^2}$
P'
$T = \frac{dr}{dt}$
Q''
Q
M_1
Q'''

Slika 84.

1) *Oskulatorne ravnine* MM_1M_2 koja sadrži vektore $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ i $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$;

2) *Normalne ravnine* MM_2M_3 okomite na vektor $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ i

3) *Ravnine rektifikacije* MM_1M_3 okomite na prve dvije ravnine.

Presječnice su tri pravca: 1) *tangenta* MM_1; 2) *glavna normala* MM_2; 3) *binormala* MM_3, a određeni su pripadnim vektorima:

$$1)\ \boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\ \textit{(vektor tangente)};$$

$$2)\ \boldsymbol{B} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\ \textit{(vektor binormale)};$$

$$3)\ \boldsymbol{N} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{T}\ \textit{(vektor glavne normale)}.$$

Pripadne jedinične vektore

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{T}}{|\boldsymbol{T}|};\quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|};\quad \boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{N}}{|\boldsymbol{N}|}$$

možemo izračunati po formulama

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s};\quad \boldsymbol{\nu} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}}{\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}\right|};\quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}.$$

Ako su X, Y, Z koordinate pomične tačke tangente, onda jednadžbe tangenata u tački $M(x, y, z)$ imaju oblik

$$\frac{X-x}{T_x} = \frac{Y-y}{T_y} = \frac{Z-z}{T_z}, \tag{1}$$

gdje je $T_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $T_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, $T_x = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$; iz uvjeta okomitosti pravca i ravnine dobivamo jednadžbu normalne ravnine

$$T_x(X-x) + T_y(Y-y) + T_z(Z-z) = 0. \tag{2}$$

Zamijenimo li u jednadžbama (1) i (2) T_x, T_y, T_z sa B_x, B_y, B_z i N_x, N_y N_z dobijemo jednadžbe binormale i glavne normale, a prema tome i oskulatorne ravnine i ravnine rektifikacije.

Primjer 1. Nađimo osnovne jedinične vektore $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ i $\boldsymbol{\beta}$ krivulje

$$x = t,\quad y = t^2,\quad z = t^3$$

u tački $t = 1$.

Napišimo jednadžbe tangente, glavne normale i binormale u toj tački.

Rješenje. Imamo

$$\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$$

i

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = 2\boldsymbol{j} + 6t\boldsymbol{k}.$$

Odatle za $t = 1$ dobivamo

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k};$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 6\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k};$$

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{T} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 6 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -22\boldsymbol{i} - 16\boldsymbol{j} + 18\boldsymbol{k}.$$

Iz toga slijedi

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}}{\sqrt{14}}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{19}}, \quad \boldsymbol{\nu} = \frac{-11\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} + 9\boldsymbol{k}}{\sqrt{266}}.$$

Kako za $t = 1$ imamo $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, to su

jednadžbe tangente

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3},$$

jednadžbe binormale

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1},$$

jednadžbe glavne normale

$$\frac{x-1}{-11} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{9}.$$

Ako je prostorna krivulja zadana kao presječnica dviju ploha

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0,$$

onda umjesto vektora $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ i $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ možemo uzeti vektore $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$ i $\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}\,\{\mathrm{d}^2x, \mathrm{d}^2y, \mathrm{d}^2z\}$ pri čemu jednu od varijabli x, y, z možemo smatrati nezavisnom i njen drugi diferencijal staviti jednak nuli.

Primjer 2. Napišimo jednadžbu oskulatorne ravnine kružnice

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6, \quad x + y + z = 0 \tag{3}$$

u njenoj tački $M(1;\ 1;\ -2)$.

Rješenje. Diferenciranjem sistema (3), smatrajući da je x nezavisna varijabla, dobit ćemo

$$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z = 0,$$

$$\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z = 0$$

i

$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + y\,\mathrm{d}^2y + \mathrm{d}z^2 + z\,\mathrm{d}^2z = 0,$$

$$\mathrm{d}^2y + \mathrm{d}^2z = 0.$$

Uzevši da je $x = 1$, $y = 1$, $z = -2$ dobijemo:

$$\mathrm{d}y = -\,\mathrm{d}x; \qquad \mathrm{d}z = 0;$$

$$\mathrm{d}^2y = -\frac{2}{3}\mathrm{d}x^2; \qquad \mathrm{d}^2z = \frac{2}{3}\mathrm{d}x^2.$$

Prema tome je oskulatorna ravnina određena vektorima

$$\{dx,\ -dx,\ 0\} \quad \text{i} \quad \left\{0,\ -\frac{2}{3}dx^2,\ \frac{2}{3}dx^2\right\}$$

ili

$$\{1,\ -1,\ 0\} \ \text{i} \ \{0,\ -1,\ 1\}.$$

Odatle je normalni vektor oskulatorne ravnine

$$B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -i - j - k$$

pa je prema tome jednadžba oskulatorne ravnine:

$$-1(x-1) - (y-1) - (z+2) = 0,$$

tj.

$$x + y + z = 0,$$

što i treba da bude jer se naša krivulja nalazi u toj ravnini.

2090. Nađite osnovne jedinične vektore τ, ν, β krivulje

$$x = 1 - \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

u tački $t = \frac{\pi}{2}$.

2091. Nađite jedinične vektore tangente i glavne normale konične spirale

$$r = e^t(i\cos t + j\sin t + k)$$

u po volji odabranoj tački. Odredite kutove koje zatvaraju ti pravci s osi OZ.

2092. Nađite osnovne jedinične vektore τ, ν, β krivulje

$$y = x^2, \quad z = 2x \quad \text{u tački } x = 2.$$

2093. Za zavojnicu

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt$$

napišite jednadžbe pravaca koji čine bridove popratnog trobrida u po volji odabranoj tački krivulje. Odredite kosinuse smjerova tangente i glavne normale.

2094. Napišite jednadžbe ravnina koje tvore popratni trobrid krivulje

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6, \quad x^2 - y^2 + z^2 = 4$$

u njenoj tački $M(1;\ 1;\ 2)$.

2095. Odredite jednadžbe tangente, normalne ravnine i oskulatorne ravnine krivulje

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3 \quad \text{u tački} \quad M(2;\ 4;\ 8).$$

2096. Odredite jednadžbe tangente, glavne normale i binormale u po volji odabranoj tački krivulje

$$x = \frac{t^4}{4}, \quad y = \frac{t^3}{3}, \quad z = \frac{t^2}{2}.$$

Nađite tačke u kojima je tangenta na tu krivulju paralelna s ravninom

$$x + 3y + 2z - 10 = 0.$$

2097. Odredite jednadžbe tangente, oskulatorne ravnine, glavne normale i binormale krivulje

$$x = t, \quad y = -t, \quad z = \frac{t^2}{2}$$

u tački $t = 2$. Izračunajte kosinuse smjera binormale u toj tački.

2098. Napišite jednadžbe tangente i normalne ravnine za ove krivulje:

a) $x = R\cos^2 t, \quad y = R\sin t\cos t, \quad z = R\sin t$ za $t = \frac{\pi}{4}$ $(R > 0)$;

b) $z = x^2 + y^2, \quad x = y$ u tački $(1;\ 1;\ 2)$;

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad x + z = 5$ u tački $(2;\ 2\sqrt{3};\ 3)$.

2099. Nađite jednadžbu normalne ravnine krivulje $z = x^2 - y^2$, $y = x$ u ishodištu koordinatnog sistema.

2100. Nađite jednadžbu oskulatorne ravnine krivulje

$x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = t\sqrt{2}$ u tački $t = 0$.

2101. Nađite jednadžbe oskulatornih ravnina za krivulje:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x^2 - y^2 = 3$ u tački $(2;\ 1;\ 2)$;

b) $x^2 = 4y, \quad x^3 = 24z$ u tački $(6;\ 9;\ 9)$;

c) $x^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = b^2$ u po volji odabranoj tački krivulje (x_0, y_0, z_0).

2102. Odredite jednadžbe oskulatorne ravnine, glavne normale i binormale krivulje

$$y^2 = x, \quad x^2 = z \quad \text{u tački } (1;\ 1;\ 1).$$

2103. Odredite jednadžbe oskulatorne ravnine, glavne normale i binormale za koničnu spiralu $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = bt$ u ishodištu koordinatnog sistema. Nađite jedinične vektore tangente, glavne normale i binormale u ishodištu koordinatnog sistema.

20. Zakrivljenost i torzija prostorne krivulje

1°. Zakrivljenost. Pod *zakrivljenošću* glatke krivulje u njenoj tački M razumijevamo broj

$$K = \frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{\Delta s},$$

gdje je φ kut zakreta tangente (*kut kontingencije*) na dijelu krivulje $\overset{\frown}{MN}$, a Δs duljina luka tog dijela krivulje. R nazivamo *polumjerom zakrivljenosti*. Ako je krivulja zadana jednadžbom $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, gdje je s duljina luka, onda je

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|.$$

U slučaju da je krivulja zadana općim parametarskim jednadžbama imamo:

$$\frac{1}{R}=\frac{\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|}{\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|^3}. \tag{1}$$

2°. Torzija. Pod *torzijom* (*drugom zakrivljenošću*) krivulje u tački M razumijevamo broj

$$T=\frac{1}{\rho}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\theta}{\Delta s},$$

gdje je θ kut zakreta binormale (*kut kontingencije druge vrste*) na dijelu krivulje $\overset{\frown}{MN}$. Veličinu ρ nazivamo *polumjerom torzije* ili *polumjerom druge zakrivljenosti*. Ako je $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, onda je

$$\frac{1}{\rho}=\mp\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}\,\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^3}}{\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}\right)^2},$$

gdje predznak minus odabiremo tada kada vektori $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{d}s}$ i $\boldsymbol{\nu}$ imaju jednake smjerove, a predznak plus kada su smjerovi suprotni.

Ako je $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, gdje je t po volji odaberiv parametar, tada je

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^3}}{\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}. \tag{2}$$

Primjer 1. Nađimo zakrivljenost i torziju zavojnice

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}\,a\cos t+\boldsymbol{j}\,a\sin t+\boldsymbol{k}\,bt \qquad (a>0).$$

Rješenje. Imamo.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{i}\,a\sin t+\boldsymbol{j}\,a\cos t+\boldsymbol{k}b,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=-\boldsymbol{i}\,a\cos t-\boldsymbol{j}\,a\sin t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^3}=-\boldsymbol{i}\,a\sin t-\boldsymbol{j}\,a\cos t.$$

Odatle je

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -a\sin t & a\cos t & b\\ -a\cos t & -a\sin t & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\,ab\sin t-\boldsymbol{j}\,ab\cos t+a^2\boldsymbol{k}$$

i

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^3}=\begin{vmatrix}-a\sin t & a\cos t & b\\ -a\cos t & -a\sin t & 0\\ a\sin t & -a\cos t & 0\end{vmatrix}=a^2b.$$

Prema tome, na osnovu formula (1) i (2) dobivamo:

$$\frac{1}{R}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{3/2}}=\frac{a}{a^2+b^2} \quad \text{i} \quad \frac{1}{\rho}=\frac{a^2b}{a^2(a^2+b^2)}=\frac{b}{a^2+b^2},$$

tj. za zavojnicu su zakrivljenost i torzija konstantni.

3°. Frenetove formule

$$\frac{d\tau}{ds}=\frac{\nu}{R}, \quad \frac{d\nu}{ds}=-\frac{\tau}{R}+\frac{\beta}{\rho}, \quad \frac{d\beta}{ds}=-\frac{\nu}{\rho}.$$

2104. Dokažite da je linija pravac, kada joj je zakrivljenost u svim tačkama jednaka nuli.

2105. Dokažite da je krivulja ravninska, ako je torzija u svim tačkama krivulje jednaka nuli.

2106. Pokažite da je krivulja

$$x=1+3t+2t^2, \quad y=2-2t+5t^2, \quad z=1-t^2$$

ravninska krivulja; nađite ravninu u kojoj ta krivulja leži.

2107. Izračunajte zakrivljenost krivulja:

a) $x=\cos t, \quad y=\sin t, \quad z=\operatorname{ch} t$ za $t=0$;

b) $x^2-y^2+z^2=1, \quad y^2-2x+z=0$ u tački (1; 1; 1).

2108. Izračunajte zakrivljenost i torziju u po volji odabranoj tački krivulja:

a) $x=e^t\cos t, \quad y=e^t\sin t, \quad z=e^t$;

b) $x=a\operatorname{ch} t, \quad y=a\operatorname{sh} t, \quad z=at \quad (a>0)$ (*hiperbolna zavojnica*).

2109. Nađite polumjere zakrivljenosti i torzije u po volji odabranoj tački (x, y, z) krivulja (parametri su pozitivni):

a) $x^2=2ay, \quad x^3=6a^2z$;

b) $x^3=3p^2y, \quad 2xz=p^2$.

2110. Dokažite da se tangencijalna i normalna komponenta vektora ubrzanja $\boldsymbol{w}$ računaju po formulama

$$w_\tau=\frac{dv}{dt}\tau, \quad w_\nu=\frac{v^2}{R}\nu,$$

gdje je v brzina, R polumjer zakrivljenosti trajektorije, a τ i ν jedinični vektori tangente i glavne normale na krivulju.

2111. Po zavojnici $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}\, a\cos t+\boldsymbol{j}\, a\sin t+bt\,\boldsymbol{k}$ giba se jednoliko tačka brzinom v. Izračunajte njeno ubrzanje w.

2112. Jednadžba gibanja je

$$\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+t^3\boldsymbol{k}.$$

Odredite u trenucima $t=0$ i $t=1$: 1) zakrivljenost trajektorije i 2) tangencijalnu i normalnu komponentu vektora ubrzanja.

GLAVA VII

VIŠESTRUKI I KRIVULJNI INTEGRALI

1. Dvostruki integral u pravokutnim koordinatama

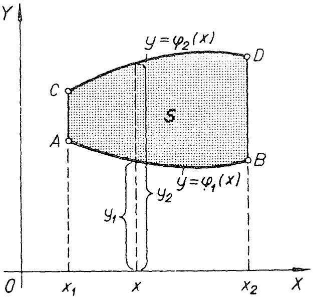
1°. Neposredno izračunavanje dvostrukih integrala. *Dvostrukim integralom* neprekinute funkcije $f(x, y)$ protegnutim preko ograđenog zatvorenog područja S ravnine XOY nazivamo limes odgovarajuće dvostruke integralne sume

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_k \to 0}} \sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\,\Delta x_i\,\Delta y_k, \tag{1}$$

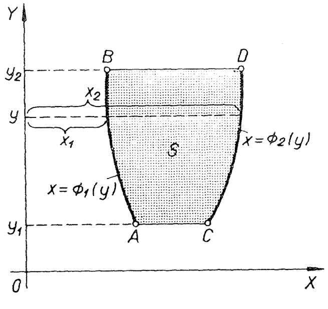
gdje je $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ i suma je protegnuta preko onih vrijednosti i i k za koje tačke $(x_i; y_k)$ pripadaju području S.

2°. Određivanje granica integriranja u dvostrukom integralu. Razlikujemo dva osnovna oblika područja integracije.

1) Područje integracije S (sl. 85) omeđeno slijeva i zdesna pravcima $x = x_1$ i $x = x_2$ $(x_2 > x_1)$, a odozdo i odozgo neprekinutim krivuljama $y = \varphi_1(x)\,(AB)$ i $y = \varphi_2(x)\,(CD)\,[\varphi_2(x) \geqslant \varphi_1(x)]$ koje sijeku vertikalu $x = X$ $(x_1 < X < x_2)$ samo u jednoj tački (vidi sl. 85). U području S varijabla x se mijenja od x_1 do x_2, a varijabla y uz konstantan x mijenja se od $y_1 = \varphi_1(x)$ do $y_2 = \varphi_2(x)$. Integral (1) možemo izračunati svođenjem na uzastopne integracije po formuli



Slika 85.



Slika 86.

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy,$$

gdje prilikom računanja integrala $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$ veličinu x smatramo konstantnom.

2) Područje integracije S omeđeno odozgo i odozdo pravcima $y = y_1$ i $y = y_2$ $(y_2 > y_1)$, a slijeva i zdesna neprekinutim krivuljama $x = \psi_1(y)$ (AB) i $x = \psi_2(y)$ (CD) $[\psi_2(y) \geqslant \psi_1(y)]$, koje horizontala $y = Y$ $(y_1 < Y < y_2)$ siječe samo u jednoj tački (sl. 86).

Analogno prethodnom imamo

$$\iint_{(S)} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x,$$

gdje prilikom računanja integrala $\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x$ veličinu y smatramo konstantnom.

Ako područje integracije ne pripada nijednom od spomenuta dva oblika, onda to područje nastojimo razdijeliti na dijelove koji odgovaraju jednom ili drugom od ta dva oblika.

Primjer 1. Izračunajmo integral

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 (x+y)\,\mathrm{d}y.$$

Rješenje:

$$I = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x}^{y=1} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x^2 + \frac{x^2}{2}\right)\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Primjer 2. Odredimo granice integracije integrala

$$\iint_{(S)} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

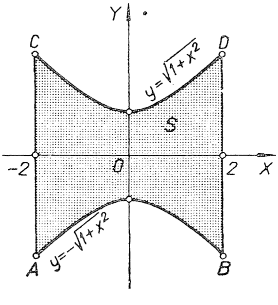
ako je područje integracije S (sl. 87) omeđeno hiperbolom $y^2 - x^2 = 1$ i sa dva pravca $x = 2$ i $x = -2$ (pri čemu imamo u vidu područje u kojem se nalazi ishodište koordinatnog sistema).

Rješenje. Područje integracije $ABDC$ (sl. 87) omeđeno je pravcima $x = -2$ i $x = 2$ i sa dvije grane hiperbole:

$$y = \sqrt{1+x^2} \quad \text{i} \quad y = -\sqrt{1+x^2},$$

tj. pripada prvom obliku. Imamo:

$$\iint_{(S)} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{2} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y.$$



Slika. 87.

Izračunajte ove višestruke integrale:

2113. $\int\limits_0^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^1 (x^2 + 2y)\,\mathrm{d}x.$

2114. $\int\limits_3^4 \mathrm{d}x \int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}y}{(x+y)^2}.$

2115. $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}y}{1+y^2}.$

2116. $\int\limits_1^2 \mathrm{d}x \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2\,\mathrm{d}y}{y^2}.$

2117. $\int\limits_{-3}^{3} \mathrm{d}y \int\limits_{y^2-4}^{5} (x+2y)\,\mathrm{d}x.$

2118. $\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{a\sin\varphi}^{a} r\,\mathrm{d}r.$

2119. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{3\cos\varphi} r^2 \sin^2\varphi\,\mathrm{d}r.$

2120. $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y.$

Napišite jednadžbe krivulja koje omeđuju područja na koja se protežu dalje navedeni dvostruki integrali i nacrtajte ta područja:

2121. $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,\ y)\,dx,$

2122. $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{x^2}^{x+9} f(x,\ y)\,dy.$

2123. $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{y}^{10-y} f(x,\ y)\,dx.$

2124. $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x,\ y)\,dy.$

2125. $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,\ y)\,dy.$

2126. $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,\ y)\,dy.$

Odredite granice integracije u jednom i drugom poređaju integriranja u dvostrukom integralu

$$\iint\limits_{(S)} f(x,\ y)\,dx\,dy$$

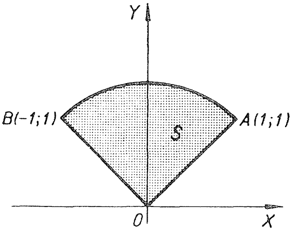
za zadano područje S.

2127. S je pravokutnik s vrhovima $O\,(0;\ 0)$, $A\,(2;\ 0)$, $B\,(2;\ 1)$, $C\,(0;\ 1)$.

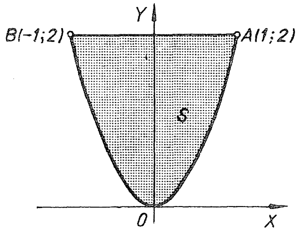
2128. S je trokut s vrhovima $O\,(0;\ 0)$, $A\,(1;\ 0)$, $B\,(1;\ 1)$.

2129. S je trapez s vrhovima $O\,(0;\ 0)$, $A\,(2;\ 0)$, $B\,(1;\ 1)$, $C\,(0;\ 1)$.

2130. S je paralelogram s vrhovima $A\,(1;\ 2)$, $B\,(2;\ 4)$, $C\,(2;\ 7)$, $D\,(1;\ 5)$.



Slika 88.



Slika 89.

2131. S je kružni isječak OAB sa središtem u tački $O\,(0;\ 0)$ kojem su krajevi luka $A\,(1;\ 1)$ i $B\,(-1;\ 1)$ (sl. 88).

2132. S je odsječak parabole AOB omeđen parabolom BOA i dijelom pravca BA koji spaja tačke $B\,(-1;\ 2)$ i $A\,(1;\ 2)$ (sl. 89).

2133. S je kružni prsten omeđen kružnicama polumjera $r=1$ i $R=2$ sa zajedničkim središtem $O\,(0;\ 0)$.

2134. S je omeđeno hiperbolom $y^2-x^2=1$ i kružnicom $x^2+y^2=9$ (ima se u vidu područje u kojem se nalazi ishodište koordinatnog sistema).

2135. Odredite granice integracije u dvostrukom integralu

$$\iint\limits_{(S)} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

ako je područje S određeno nejednadžbama

a) $x \geqslant 0;\quad y \geqslant 0;\quad x+y \leqslant 1;$

b) $x^2+y^2 \leqslant a^2;$

c) $x^2+y^2 \leqslant x;$

d) $y \geqslant x;\quad x \geqslant -1;\quad y \leqslant 1;$

e) $y \leqslant x \leqslant y+2a;$
$0 \leqslant y \leqslant a.$

Promijenite poredaj integriranja u ovim dvostrukim integralima:

2136. $\displaystyle\int_0^4 \mathrm{d}x \int_{3x^2}^{12x} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y.$

2137. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{2x}^{3x} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y.$

2138. $\displaystyle\int_0^a \mathrm{d}x \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y.$

2139. $\displaystyle\int_{\frac{a}{2}}^{a} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y.$

2140. $\displaystyle\int_0^{2a} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y.$

2141. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x.$

2142. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x.$

2143. $\displaystyle\int_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x \int_0^{x} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^{R} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y.$

2144. $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\sin x} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y.$

Izračunajte ove dvostruke integrale:

2145. $\displaystyle\iint\limits_{(S)} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, gdje je S trokut s vrhovima $O\,(0;\ 0)$, $A\,(1;\ 1)$ i $B\,(0;\ 1)$.

2146. $\displaystyle\iint\limits_{(S)} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, gdje je područje integracije S omeđeno pravcem koji prolazi tačkama $A\,(2;\ 0)$, $B\,(0;\ 2)$, i lukom kružnice polumjera 1 sa središtem u tački $C\,(0;\ 1)$ (sl. 90).

2147. $\displaystyle\iint\limits_{(s)} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}};$

gdje je S dio kruga polumjera a sa središtem u tački $O\,(0;\ 0)$ koji leži u prvom kvadrantu.

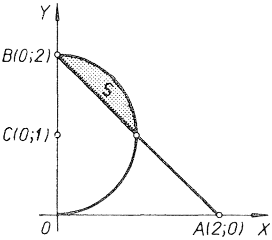
2148. $\iint\limits_{(S)} \sqrt{x^2-y^2}\,dx\,dy$, gdje je S trokut sa vrhovima

$O(0;\ 0)$, $A(1;\ -1)$ i $B(1;\ 1)$.

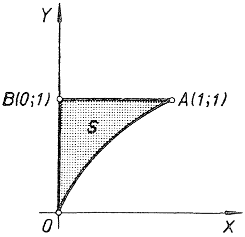
2149. $\iint\limits_{(S)} \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy$, gdje je S trokut sa vrhovima

$O(0;\ 0)$, $A(10;\ 1)$ i $B(1;\ 1)$.

2150. $\iint\limits_{(S)} e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy$, gdje je S krivocrtni trokut OAB omeđen parabolom $y^2=x$ i pravcima $x=0$, $y=1$ (sl. 91).



Slika 90.



Slika 91.

2151. $\iint\limits_{(S)} \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, gdje je S odsječak parabole omeđen parabolom $y=\frac{x^2}{2}$ i pravcem $y=x$.

2152. Izračunajte integrale i nacrtajte područja integracije:

$$\text{a)}\ \int_0^{\pi} dx \int_0^{1+\cos x} y^2 \sin x\,dy; \qquad \text{b)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\cos x}^{1} y^4\,dy; \quad \text{c)}\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{3\cos y} x^2 \sin^2 y\,dx.$$

Prilikom rješavanja zadataka 2153 do 2157 preporuča se prethodno napraviti crtež.

2153. Izračunajte dvostruki integral

$$\iint\limits_{(S)} xy^2\,dx\,dy,$$

ako je S područje omeđeno parabolom $y^2=2px$ i pravcem $x=p$.

2154.* Izračunajte dvostruki integral

$$\iint\limits_{(S)} xy\,dx\,dy,$$

protegnut preko područja S omeđenog s osi OX i gornjom polukružnicom $(x-2)^2+y^2=1$,

2155. Izračunajte dvostruki integral

$$\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{2a-x}},$$

gdje je S krug polumjera a, koji dira koordinatne osi i leži u prvom kvadrantu.

2156*. Izračunajte dvostruki integral

$$\iint\limits_{(S)} y\,dx\,dy,$$

gdje je područje S omeđeno s osi apscisa i svodom cikloide

$$\begin{cases} x = R(t-\sin t), \\ y = R(1-\cos t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi). \end{cases}$$

2157. Izračunajte dvostruki integral

$$\iint\limits_{(S)} xy\,dx\,dy,$$

u kome je područje integracije omeđeno koordinatnim osima i lukom astroide

$$x = R\cos^3 t, \quad y = R\sin^3 t\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

2158. Nađite srednju vrijednost funkcije $f(x, y) = xy^2$ u području $S\{0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Uputa. Srednjom vrijednošću funkcije $f(x, y)$ u području S nazivamo broj

$$\bar{f} = \frac{1}{\underset{\text{površina}}{S}} \iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

2159. Nađite srednju vrijednost kvadrata udaljenosti tačke $M(x, y)$ kruga $(x-a)^2+y^2 \leqslant R^2$ od ishodišta koordinatnog sistema.

2. Zamjena varijabli u dvostrukom integralu

1°. Dvostruki integral u polarnim koordinatama. Za prijelaz u dvostrukom integralu od pravokutnih koordinata x, y na polarne r, φ, koje su s pravokutnim koordinatama vezane odnosima

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

vrijedi formula

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(S)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \tag{1}$$

Ako je područje integracije S omeđeno zrakama $r = \alpha$ i $r = \beta$ $(\alpha < \beta)$ i krivuljama $r = r_1(\varphi)$ i $r = r_2(\varphi)$, gdje su $r_1(\varphi)$ i $r_2(\varphi)$ $(r_1(\varphi) \leqslant r_2(\varphi))$ jednoznačne derivabilne funkcije u intervalu $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, onda dvostruki integral možemo izračunati po formuli

$$\iint\limits_{(s)} F(\varphi, r)\,r\,dr\,d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(\varphi, r)\,r\,dr,$$

gdje je $F(\varphi, r) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Prilikom računanja integrala $\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(\varphi, r)\,r\,dr$ smatramo da je φ konstantan.

Ako područje integracije nema razmotreni oblik, onda to područje dijelimo na dijelove koji su područja takvog oblika.

2°. Dvostruki integral u krivocrtnim koordinatama. U općenitijem slučaju, ako u dvostrukom integralu

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy$$

treba od varijabli x, y prijeći na varijable u, v vezanim sa x, y neprekinutim i diferencijabilnim odnosima

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v),$$

koji daju uzajamno jednoznačno i u oba smjera neprekinuto pridruženje medu tačkama područja S ravnine XOY i tačkama nekog područja S' ravnine $UO'V$, a pri tome *jakobijana*

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

zadržava stalan predznak u području S, onda je primjenljiva formula

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(S')} f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]\,|I|\,du\,dv.$$

Granice novog integrala određuju se po općim pravilima na osnovu oblika područja S'.

Primjer 1. Prijelazom na polarne koordinate izračunajmo:

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

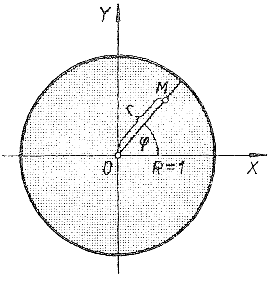
gdje je područje S krug polumjera $R = 1$ sa središtem u ishodištu koordinatnog sistema (sl. 92).

Rješenje. Stavimo $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Dobivamo

$$\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2} = \sqrt{1-r^2}.$$

Kako se u području S koordinata r za po volji odabrani φ mijenja od 0 do 1, a φ se mijenja od 0 do 2π, to je

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr = \frac{2}{3}\pi.$$



Slika 92.

Prijeđite na polarne koordinate r, φ i odredite granice integracije po novim varijablama u ovim integralima (f je neprekinuta funkcija);

2160. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\,dy.$ **2161.** $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^x f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy.$

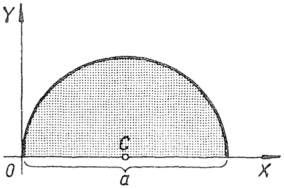
2162. $\displaystyle\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy,$

gdje je S trokut omeđen pravcima $y = x$, $y = -x$, $y = 1$.

2163. $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} f\left(\frac{y}{x}\right) dy.$

2164. $$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
gdje je područje S omeđeno lemniskatom
$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

2165. Prijelazom na polarne koordinate izračunajte dvostruki integral
$$\iint\limits_{(S)} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
gdje je S polukrug promjera a sa središtem u tački $C(a/2;\ 0)$ (sl. 93).



Slika 93.

2166. Prijelazom na polarne koordinate izračunajte dvostruki integral
$$\iint\limits_{(S)} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
protegnut preko područja omeđenog kružnicom $x^2+y^2=2ax$.

2167. Prijelazom na polarne koordinate izračunajte dvostruki integral
$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
gdje je područje integracije S gornji polukrug polumjera a sa središtem u ishodištu koordinatnog sistema.

2168. Izračunajte dvostruki integral funkcije $f(r,\ \varphi)=r$ u području omeđenom kardioidom $r=a(1+\cos\varphi)$ i kružnicom $r=a$. (Imajte u vidu područje koje ne sadržava pol).

2169. Prijelazom na polarne koordinate, izračunajte
$$\int\limits_0^a \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

2170. Prijelazom na polarne koordinate, izračunajte
$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
gdje je područje S omeđeno laticom lemniskate
$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)\ \ (x \geq 0).$$

2171*. Izračunajte dvostruki integral
$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
za područje S omeđeno elipsom $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, prijelazom na *uopćene polarne koordinate* r i φ po formulama:
$$\frac{x}{a}=r\cos\varphi,\quad \frac{y}{b}=r\sin\varphi.$$

2172.** Transformirajte

$$\int_0^c \mathrm{d}x \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y$$

($0<\alpha<\beta$ i $c>0$) uvođenjem novih varijabla $u=x+y$, $uv=y$.

2173*. Provedite zamjenu varijabli $u=x+y$, $v=x-y$ u integralu

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,\ y)\,\mathrm{d}y.$$

2174.** Izračunajte dvostruki integral

$$\iint_{(S)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdje je S područje omeđeno krivuljom

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}.$$

Uputa: Provedite zamjenu varijabli $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$.

3. Izračunavanje površina likova

1°. **Površina u pravokutnim koordinatama.** *Površina ravninskog područja* S iznos

$$\text{pov. } S=\iint_{(S)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Ako je područje S definirano nejednadžbom $a\leqslant x\leqslant b$, $\varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)$, gdje su φ i ψ neprekinute, onda je

$$\text{pov. } S=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \mathrm{d}y.$$

2°. **Površina u polarnim koordinatama.** Ako je područje S u polarnim koordinatama r i φ definirano nejednadžbama $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$, $0\leqslant f(\varphi)\leqslant r\leqslant F(\varphi)$, gdje su f i F neprekinute, onda je

$$\text{pov. } S=\iint_{(S)} r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\varphi\int_{f(\varphi)}^{F(\varphi)} r\,\mathrm{d}r.$$

2175. Konstruirajte područja kojima su površine izražene integralima:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x+2} \mathrm{d}y$; b) $\displaystyle\int_0^a \mathrm{d}y\int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} \mathrm{d}x.$

Izračunajte te površine i izmijenite poredaj integriranja.

2176. Konstruirajte područja kojima su površine izražene integralima:

a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} \mathrm{d}\varphi\int_0^{3\sec\varphi} r\,\mathrm{d}r$; b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi\int_a^{a(1+\cos\varphi)} r\,\mathrm{d}r.$

Izračunajte te površine.

2177. Izračunajte površinu omeđenu pravcima $x=y$, $x=2y$, $x+y=a$, $x+3y=a$ $(a>0)$.

2178. Izračunajte površinu koja leži iznad osi OX i omeđena je tom osi, parabolom $y^2=4ax$ i pravcem $x+y=3a$.

2179*. Izračunajte površinu omeđenu elipsom

$$(y-x)^2+x^2=1.$$

2180. Nađite površinu omeđenu parabolama

$$y^2=10x+25 \quad \text{i} \quad y^2=-6x+9.$$

2181. Prijelazom na polarne koordinate nađite površinu omeđenu krivuljama

$$x^2+y^2=2x, \quad x^2+y^2=4x, \quad y=x, \quad y=0.$$

2182. Nađite površinu omeđenu pravcem $r\cos\varphi=1$ i kružnicom $r=2$. (Imajte u vidu područje u kojemu se ne nalazi pol).

2183. Nađite površinu omeđenu krivuljama

$$r=a(1+\cos\varphi) \quad \text{i} \quad r=a\cos\varphi \quad (a>0).$$

2184. Nađite površinu omeđenu krivuljom

$$\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}.$$

2185*. Nađite površinu omeđenu elipsom

$$(x-2y+3)^2+(3x+4y-1)^2=100.$$

2186. Nađite površinu krivocrtnog četverokuta omeđenog lukovima parabola $x^2=ay$, $x^2=by$, $y^2=\alpha x$, $y^2=\beta x$ $(0<a<b,\ 0<\alpha<\beta)$.

Uputa. Uvedite nove varijable u i v, stavivši $x^2=uy$, $y^2=vx$.

2187. Nađite površinu krivocrtnog četverokuta omeđenog lukovima krivulja $y^2=ax$, $y^2=bx$, $xy=\alpha$, $xy=\beta$ $(0<a<b,\ 0<\alpha<\beta)$.

Uputa. Uvedite nove varijable u i v, stavivši $xy=u$, $y^2=vx$.

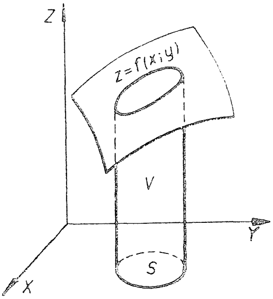
4. Izračunavanje volumena tijela

Volumen V cilindroida omeđenog odozgo neprekinutom plohom $z=f(x,y)$, odozdo ravninom $x=0$ a postrance valjkastom plohom koja na ravnini XOY izrezuje omeđeno zatvoreno područje S (sl. 94), iznosi

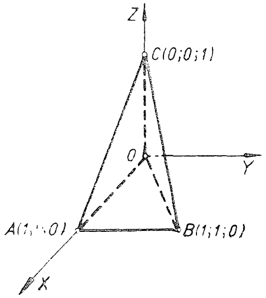
$$V=\iint\limits_{(S)} f(x,\,y)\,dx\,dy.$$

2188. Izrazite pomoću dvostrukog integrala volumen piramide s vrhovima

$O(0;\,0;\,0)$, $A(1;\,0;\,0)$, $B(1;\,1;\,0)$ i $C(0;\,0;\,1)$ (sl. 95). Odredite granice integracije.



Slika 94.



Slika 95.

U zadacima 2189 do 2192 nacrtajte tijela kojima su volumeni izraženi dvostrukim integralima:

2189. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)\,dy.$

2190. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} (4-x-y)\,dy.$

2191. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x)\,dy.$

2192. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2-x}^{2} (4-x-y)\,dy.$

2193. Nacrtajte tijelo kojem je volumen izražen integralom $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy$, i geometrijskim rasuđivanjem nađite vrijednost tog integrala.

2194. Nađite volumen tijela, omeđenog eliptičkim paraboloidom $z=2x^2+y^2+1$, ravninom $x+y=1$ i koordinatnim ravninama.

2195. Tijelo je omeđeno hiperbolnim paraboloidom $z=x^2-y^2$ i ravninama $y=0$, $z=0$, $x=1$. Izračunajte njegov volumen.

2196. Tijelo je omeđeno valjkom $x^2+z^2=a^2$ i ravninama $y=0$, $z=0$, $y=x$. Izračunajte volumen tog tijela.

Nađite volumene tijela omeđenih ovim plohama (parametri su pozitivni).

2197. $az=y^2$, $x^2+y^2=r^2$, $z=0$.

2198. $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x+z=6$, $z=0$.

2199. $z = x^2 + y^2, \quad y = x^2, \quad y = 1, \quad z = 0.$

2200. $x + y + z = a, \quad 3x + y = a, \quad \frac{3}{2} x + y = a, \quad y = 0, \quad z = 0.$

2201. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y = \frac{b}{a} x, \quad y = 0, \quad z = 0.$

2202. $x^2 + y^2 = 2ax, \quad z = \alpha x, \quad z = \beta x \quad (\alpha > \beta).$

U zadacima 2203 do 2211 koristite se polarnim i uopćenim polarnim koordinatama.

2203. Nađite ukupan volumen unutar valjka $x^2 + y^2 = a^2$ i hiperboloida $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$.

2204. Nađite ukupan volumen unutar čunja $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$ i hiperboloida $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$.

2205. Nađite volumen omeđen plohama $2az = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, $z = 0$.

2206. Odredite volumen elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2207. Nađite volumen tijela omeđenog paraboloidom $2az = x^2 + y^2$ i kuglom $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$. (Misli se na volumen unutar paraboloida).

2208. Izračunajte volumen tijela omeđenog ravninom XOY, valjkom $x^2 + y^2 = 2ax$ i čunjem $x^2 + y^2 = z^2$.

2209. Izračunajte volumen tijela omeđenog ravninom XOY, plohom $z = ae^{-(x^2+y^2)}$ i valjkom $x^2 + y^2 = R^2$.

2210. Izračunajte volumen tijela omeđenog ravninom XOY, paraboloidom $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ i valjkom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{x}{a}$.

2211. U kakvom omjeru hiperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ dijeli volumen kugle $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3a^2$?

2212*. Nađite volumen tijela omeđenog plohama $z = x + y$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$, $z = 0$ $(x > 0, \ y > 0)$.

5. Izračunavanje površina ploha

Površina σ glatke jednoznačne plohe $z = f(x, y)$ koja svojom projekcijom na ravnini XOY čini područje S, iznosi

$$\sigma = \iint\limits_{(S)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

2213. Nađite površinu dijela ravnine $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ zatvorenog među koordinatnim ravninama.

2214. Nađite površinu dijela plohe valjka $x^2+y^2=R^2$ $(z \geqslant 0)$, koji se nalazi među ravninama $z=mx$ i $z=nx$ $(m>n>0)$.

2215*. Izračunajte površinu plohe čunja $x^2-y^2=z^2$, smještene u prvom oktantu i omeđene ravninom $y+z=a$.

2216. Izračunajte površinu plohe valjka $x^2+y^2=ax$ koju iz njega izrezuje kugla $x^2+y^2+z^2=a^2$.

2217. Izračunajte površinu plohe kugle $x^2+y^2+z^2=a^2$, izrezane plohom

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad (0<b<a),$$

2218. Izračunajte površinu plohe paraboloida $y^2+z^2=2ax$ koja se nalazi između valjka $y^2=ax$ i ravnine $x=a$.

2219. Izračunajte površinu plohe valjka $x^2+y^2=2ax$ koja se nalazi između ravnine XOY i čunja $x^2+y^2=z^2$.

2220*. Izračunajte površinu plohe čunja $x^2-y^2=z^2$ koja leži unutar valjka

$$x^2+y^2=2ax.$$

2220.1*. Nađite površinu plohe valjka $y^2=4x$ izrezane kuglom $x^2+y^2+z^2=5x$.

2220.2. Nađite površinu plohe čunja $z=\sqrt{x^2+y^2}$ izrezane valjkom

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

2221*. Dokažite da su površine dijelova ploha paraboloida

$$x^2+y^2=2az \quad \text{i} \quad x^2-y^2=2az,$$

izrezanih valjkom $x^2+y^2=R^2$, jednake.

2222*. Kugla polumjera a prorezana je sa dva kružna valjka kojima su promjeri jednaki polumjeru kugle i međusobno se dodiruju duž jednog promjera kugle. Nađite volumen i površinu plohe preostalog dijela kugle.

2223*. U kugli polumjera a izrezan je otvor s kvadratnom bazom kojoj je stranica a. Os otvora poklapa se s promjerom kugle. Nađite površinu preostale kugline plohe.

2224*. Izračunajte površinu dijela zavojne plohe $z=c \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ koji leži u prvom oktantu i nalazi se među valjcima $x^2+y^2=a^2$ i $x^2+y^2=b^2$ $(0<a<b)$.

6. Primjene dvostrukog integrala u mehanici

1°. Masa i statički momenti ploče. Ako je S područje ravnine XOY koju zauzima ploča, a $\rho(x, y)$ je plošna gustoća ploče u tački (x, y), onda se masa M ploče i njeni statički momenti M_X i M_Y s obzirom na osi OX i OY izražavaju dvostrukim integralima

$$M=\iint_{(S)} \rho(x, y)\,dx\,dy, \quad M_X=\iint_{(S)} y\rho(x, y)\,dx\,dy,$$

$$M_Y=\iint_{(S)} x\rho(x, y)\,dx\,dy. \tag{1}$$

Ako je ploča homogena, onda je $\rho(x, y)=\text{const}$.

2°. **Koordinate težišta ploče.** Ako je $C(\bar{x}, \bar{y})$ težište ploče, onda je

$$\bar{x} = \frac{M_Y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_X}{M},$$

gdje je M masa ploče, a M_X, M_Y su statički momenti ploče s obzirom na koordinatne osi (vidi 1°). Ako je ploča homogena, onda u formulama (1) možemo uvrstiti $\rho = 1$.

3°. **Momenti tromosti ploče.** Momenti tromosti ploče s obzirom na osi OX i OY iznose

$$I_X = \iint_{(S)} y^2 \rho(x, y)\,dx\,dy, \quad I_Y = \iint_{(S)} x^2 \rho(x, y)\,dx\,dy. \tag{2}$$

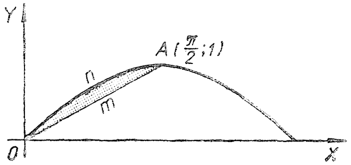
Moment tromosti ploče s obzirom na ishodište koordinatnog sistema je

$$I_0 = \iint_{(S)} (x^2 + y^2)\rho(x, y)\,dx\,dy = I_X + I_Y. \tag{3}$$

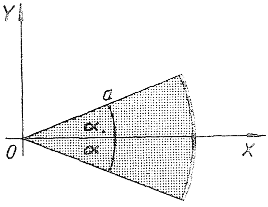
Uvrštenjem $\rho(x, y) = 1$ u formule (2) i (3) dobivamo geometrijske momente tromost ravninskog lika.

2225. Nađite masu kružne plohe polumjera R, ako je njezina gustoća proporcionalna udaljenosti tačke od središta i iznosi δ na rubu ploče.

2226. Ploča ima oblik pravokutnog trokuta s katetama $OB = a$ i $OA = b$. Gustoća ploče u bilo kojoj tački jednaka je udaljenosti tačke od katete OA. Nađite statičke momente ploče s obzirom na katete OA i OB.



Slika 96.



Slika 97.

2227. Izračunajte koordinate težišta lika $OmAnO$ (sl. 96) omeđenog krivuljom $y = \sin x$ i pravcem OA koji prolazi ishodištem koordinatnog sistema i tjemenom $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ sinusoide.

2228. Nađite koordinate težišta lika omeđenog kardioidom $r = a(1 + \cos\varphi)$.

2229. Nađite koordinate težišta kružnog isječka polumjera a sa središnjim kutom 2α (sl. 97).

2230. Izračunajte koordinate težišta lika omeđenog parabolama $y^2 = 4x + 4$ i $y^2 = -2x + 4$.

2231. Izračunajte moment tromosti trokuta omeđenog pravcima $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$ s obzirom na os OX.

2232. Nađite moment tromosti kružnog prstena s promjerima d i D $(d < D)$: a) s obzirom na središte prstena i b) s obzirom na promjer prstena.

2233. Izračunajte moment tromosti kvadrata sa stranicom a s obzirom na os koja prolazi njegovim vrhom okomito na ravninu kvadrata.

2234*. Izračunajte moment tromosti odsječka koji na paraboli $y^2 = ax$ odsijeca pravac $x = a$, s obzirom na pravac $y = -a$.

2235*. Izračunajte moment tromosti površine omeđene hiperbolom $xy=4$ i pravcem $x+y=5$, s obzirom na pravac $x=y$.

2236*. Kvadratna ploča stranice a ima gustoću proporcionalnu udaljenosti od jednog njenog vrha. Izračunajte moment tromosti ploče s obzirom na stranice koje prolaze tim vrhom.

2237. Nađite moment tromosti kardioide $r=a(1+\cos\varphi)$ s obzirom na pol.

2238. Izračunajte moment tromosti površine lemniskate $r^2=2a^2\cos 2\varphi$ s obzirom na os kroz pol, okomitu na ravninu lemniskate.

2239*. Izračunajte moment tromosti homogene ploče omeđene jednim lukom (svodom) cikloide $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ i osi OX, s obzirom na os OX.

7. Trostruki integrali

1°. Trostruki integral u pravokutnim koordinatama. Trostrukim integralom neprekinute funkcije $f(x,y,z)$ protegnutim preko omeđenog zatvorenog područja V, nazivamo limes pripadne trostruke sume:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=\lim_{\substack{\max\Delta x_i\to 0\\ \max\Delta y_j\to 0\\ \max\Delta z_k\to 0}}\sum_i\sum_j\sum_k f(x_i,\ y_j,\ z_k)\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k.$$

Izračunavanje trostrukog integrala svodimo na uzastopno računanje triju običnih (jednostrukih) integrala ili na računanje jednog dvostrukog integrala i jednog jednostrukog.

Primjer 1. Izračunajmo

$$I=\iiint\limits_{(V)} x^3y^2z\,dx\,dy\,dz,$$

gdje je područje V određeno nejednadžbama

$$0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant x,\quad 0\leqslant z\leqslant xy.$$

Rješenje. Imamo:

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy} x^3y^2z\,dz=\int_0^1 dx\int_0^x x^3y^2\frac{z^2}{2}\Big|_0^{xy}dy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x\frac{x^5y^4}{2}\,dy=\int_0^1\frac{x^5}{2}\,\frac{y^5}{5}\Big|_0^x dx=\int_0^1\frac{x^{10}}{10}\,dx=\frac{1}{110}.$$

Primjer 2. Izračunajmo

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz,$$

protegnut na unutrašnjost elipsoida $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Rješenje.

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz=\int_{-a}^{a}x^2\,dx\iint\limits_{(S_{yz})}dy\,dz=\int_{-a}^{a}x^2\,S_{yz}\,dx,$$

gdje je S_{yz} površina elipse $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{x^2}{a^2}$, $x=\text{const}$, koja iznosi

$$S_{yz}=\pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Prema tome konačno imamo:

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz=\pi bc\int\limits_{-a}^{a}x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{15}\pi a^3bc.$$

2°. **Zamjena varijabli u trostrukom integralu.** U trostrukom integralu

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz$$

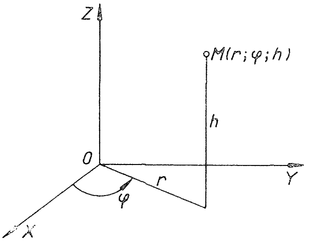
treba prijeći od varijabli x, y, z na varijable u, v, w, koje su sa x, y, z povezane odnosima $x=\varphi(u,\ v,\ w)$, $y=\psi(u,\ v,\ w)$, $z=\chi(u,\ v,\ w)$, gdje funkcije φ, ψ, χ imaju ova svojstva:

1) neprekinute su zajedno sa svojim parcijalnim derivacijama prvog reda;
2) uspostavljaju međusobno jednoznačno i obostrano neprekinuto pridruženje tačaka područja integracije V prostora $OXYZ$ tačkama nekog područja V' prostora $O'UVW$;
3) funkcionalna determinanta (jakobijana) tih funkcija

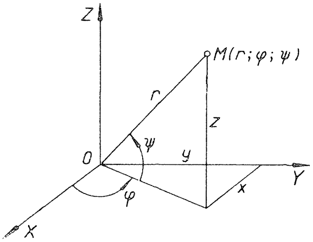
$$I=\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(u,\ v,\ w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

zadržava u području V' stalan predznak, onda vrijedi formula

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{(V')} f[\varphi(u,\ v,\ w),\ \psi(u,\ v,\ w),\ \chi(u,\ v,\ w)]\,|I|\,du\,dv\,dw.$$



Slika 98.



Slika 99.

Napose

1) za cilindarske koordinate r, φ, h (sl. 98) gdje je

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=h,$$

dobivamo da je $I=r$;

2) za sferne koordinate φ, ψ, r (φ je duljina, ψ je širina, r je radijvektor) (sl. 99) gdje su

$$x=r\cos\psi\cos\varphi,\quad y=r\cos\psi\sin\varphi,\quad z=r\sin\psi,$$

imamo $I=r^2\cos\psi.$

Primjer 3. Prijelazom na sferne koordinate izračunajmo

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz,$$

gdje je V kugla polumjera R.

Rješenje. Za kuglu bit će granice varijabilnosti sfernih koordinata φ (duljine), ψ (širine) i r (radij-vektora):

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant r \leqslant R.$$

Imat ćemo prema tome

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R r\,r^2 \cos\psi\,dr = \pi R^4.$$

3°. Primjena trostrukih integrala.

Volumen područja trodimenzionalnog prostora $OXYZ$ iznosi

$$V = \iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz.$$

Masa tijela koje zauzima područje V jest

$$M = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz,$$

gdje je $\gamma(x, y, z)$ gustoća tijela u tački (x, y, z).

Statički momenti tijela s obzirom na koordinatne ravnine jesu

$$M_{XY} = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x,\ y,\ z)\,z\,dx\,dy\,dz;$$

$$M_{YZ} = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x,\ y,\ z)\,x\,dx\,dy\,dz;$$

$$M_{ZX} = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x,\ y,\ z)\,y\,dx\,dy\,dz.$$

Koordinate težišta su:

$$\bar{x} = \frac{M_{YZ}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{ZX}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{XY}}{M}.$$

Ako je tijelo homogeno, onda u formule za koordinate težišta možemo uvrstiti $\gamma(x, y, z) = 1$.

Momenti tromosti s obzirom na koordinatne osi glase

$$I_X = \iiint\limits_{(V)} (y^2 + z^2)\,\gamma(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz;$$

$$I_Y = \iiint\limits_{(V)} (z^2 + x^2)\,\gamma(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz;$$

$$Iz = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2)\,\gamma(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz.$$

Stavimo li u tim formulama $\gamma(x, y, z) = 1$, dobijemo geometrijske momente tromosti tijela.

A. *Izračunavanje trostrukih integrala*

Odredi granice integracije u trostrukim integralima

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

za navedena područja V.

2240. V je tetraedar omeđen ravninama

$$x+y+z=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

2241. V je valjak omeđen plohama

$$x^2+y^2=R^2, \quad z=0, \quad z=H.$$

2242. V je čunj omeđen plohama

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}, \quad z=c.$$

2243. V je volumen omeđen plohama

$$z=1-x^2-y^2, \quad z=0.$$

Izračunajte ove integrale:

2244. $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{x+y+z+1}}$.

2245. $\int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^{2\sqrt{x}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} x\,\mathrm{d}z$.

2246. $\int\limits_0^a \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$.

2247. $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{1-x} \mathrm{d}y \int\limits_0^{1-x-y} xyz\,\mathrm{d}z$.

2248. Izračunajte

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(x+y+z+1)^3},$$

gdje je V područje integracije omeđeno koordinatnim ravninama i ravninom $x+y+z=1$.

2249. Izračunajte

$$\iiint\limits_{(V)} (x+y+z)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

gdje je V zajednički dio paraboloida $2az \geqslant x^2+y^2$ i kugle $x^2+y^2+z^2 \leqslant 3a^2$.

2250. Izračunajte

$$\iiint\limits_{(V)} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

gdje je V zajednički dio kugala $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ i $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$.

2251. Izračunajte

$$\iiint\limits_{(V)} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

gdje je V volumen omeđen ravninom $z=0$ i gornjom polovinom elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

2252. Izračunajte

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

gdje je V unutrašnjost elipsoida $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

2253. Izračunajte

$$\iiint\limits_{(V)} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

gdje je V područje omeđeno čunjom $z^2=\dfrac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ i ravninom $z=h$.

2254. Prijelazom na cilindarske koordinate izračunajte

$$\iiint\limits_{(V)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

gdje je V područje omeđeno plohama $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $x^2+y^2=z^2$ a u području je tačka $(0, 0, R)$.

2255. Izračunajte

$$\int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} \mathrm{d}y \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}z,$$

transformiravši ga prethodno na cilindarske koordinate.

2256. Izračunajte

$$\int\limits_0^{2r} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}z,$$

transformiravši ga prethodno na cilindarske koordinate.

2257. Izračunajte

$$\int\limits_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z,$$

transformiravši ga prethodno na sferne koordinate.

2258. Prijelazom na sferne koordinate izračunajte integral

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz,$$

gdje je V unutrašnjost kugle $x^2+y^2+z^2 \leqslant x$.

B. *Izračunavanje volumena pomoću trostrukih integrala*

2259. Izračunajte pomoću trostrukog integrala volumen tijela, omeđenog plohama

$$y^2 = 4a^2 - 3ax, \quad y^2 = ax, \quad z = \pm h.$$

2260.** Izračunajte volumen dijela valjka $x^2+y^2 = 2ax$ unutar paraboloida $x^2+y^2 = 2az$ i ravnine XOY.

2261*. Izračunajte volumen tijela omeđenog kuglom $x^2+y^2+z^2=a^2$ i stošcem $z^2=x^2+y^2$ (vanjskog s obzirom na stožac).

2262*. Izračunajte volumen tijela omeđenog kuglom $x^2+y^2+z^2=4$ i paraboloidom $x^2+y^2=3z$ (unutrašnjeg s obzirom na paraboloid).

2263. Izračunajte volumen tijela omeđenog ravninom XOY, valjkom $x^2+y^2=ax$ i kuglom $x^2+y^2+z^2=a^2$ (unutrašnjeg s obzirom na valjak).

2264. Izračunajte volumen tijela omeđenog paraboloidom $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2\frac{x}{a}$ i ravninom $x=a$.

2264.1. Nađite volumen tijela, omeđenog plohom

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}.$$

2264.2. Nađite volumen tijela omeđenog plohama

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2, \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad (z \geqslant 0).$$

C. *Primjena trostrukih integrala u mehanici i fizici*

2265. Nađite masu M pravokutnog paralelepipeda $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$, ako je $\rho(x, y, z) = x+y+z$ gustoća u tački (x, y, z).

2266. Iz oktanta kugle $x^2+y^2+z^2 \leqslant c^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ izrezano je tijelo $OABC$ omeđeno koordinatnim ravninama i ravninom $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(a \leqslant c,\ b \leqslant c)$ (sl. 100). Nađite masu tog tijela ako je gustoća u svakoj tački (x, y, z) tog tijela jednaka aplikati te tačke.

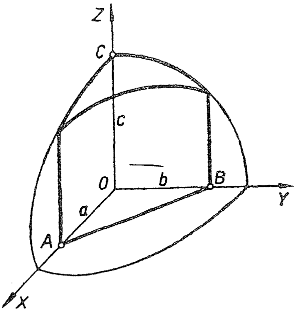
2267* U tijelu oblika polukugle $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$, $z \geqslant 0$, gustoća se mijenja proporcionalno udaljenosti tačke od središta. Nađite težište tog tijela.

2268. Nađite težište tijela omeđenog paraboloidom $y^2+2z^2=4x$ i ravninom $x=2$.

2269*. Nađite moment tromosti kružnog valjka visine h i polumjera baze a, s obzirom na os koja je ujedno promjer baze valjka.

2270*. Nađite moment tromosti kružnog čunja visine h, polumjera baze a i gustoće ρ, s obzirom na promjer baze.

2271.** Nađite privlačnu silu kojom homogeni stožac visine h, vršnog kuta α (u osnom presjeku), privlači materijalnu tačku s jedinicom mase postavljenu na vrh stošca.



Slika 100.

2272.** Pokažite da se privlačna sila kojom homogena kugla djeluje na vanjsku materijalnu tačku ne mijenja ako se čitava masa kugle koncentrira u njenom središtu.

8. Nepravi integrali ovisni o parametru
Nepravi višestruki integrali

1°. Deriviranje po parametru. Uz neka ograničenja za funkcije $f(x, \alpha)$, $f'_\alpha(x, \alpha)$ i pripadne neprave integrale vrijedi *Leibnizovo pravilo*

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^\infty f(x, \alpha)\,dx = \int_a^\infty f'_\alpha(x, \alpha)\,dx.$$

Primjer 1. Pomoću deriviranja po parametru izračunajte

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

Rješenje. Neka je

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx = F(\alpha, \beta).$$

Tada je

$$\frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = -\int_0^\infty x e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{2\alpha}.$$

Odatle je $F(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \ln \alpha + C(\beta)$. Da bi našli $C(\beta)$ stavimo u posljednjoj jednadžbi $\alpha = \beta$. Imamo $0 = -\frac{1}{2} \ln \beta + C(\beta)$.

Odatle je $C(\beta) = \frac{1}{2} \ln \beta$, pa slijedi da je

$$F(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \ln \alpha + \frac{1}{2} \ln \beta = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

2°. Nepravi dvostruki integrali. a) *Slučaj neizmjernog područja.* Ako je funkcija $f(x, y)$ neprekinuta u neograđenom području S, onda stavljamo

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\sigma \to S} \iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{1}$$

gdje je σ omeđeno zatvoreno područje koje u potpunosti leži u S, pri čemu $\sigma \to S$ označava da proširujemo područje σ po bilo kakvom zakonu tako da u nj uđe i u njemu ostane bilo koja tačka područja S. Ako limes na desnoj strani postoji i ne ovisi o izboru područja σ, onda pripadni nepravi integral nazivamo *konvergentnim*, a u protivnom slučaju *divergentnim*.

Ako podintegralna funkcija $f(x, y)$ nije negativna ($f(x, y) \geqslant 0$) onda je za konvergenciju nepravog integrala nužno i dovoljno da limes na desnoj strani jednadžbe (1) postoji barem za jedan sistem područja σ koja iscrpljuju područje S.

b) *Slučaj prekinute funkcije.* Ako je funkcija $f(x, y)$ neprekinuta u ograđenom zatvorenom području S svuda osim u tački $P(a; b)$, onda stavljamo

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{(S_\varepsilon)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{2}$$

gdje je S_ε područje dobiveno iz S odstranjivanjem malog područja promjera ε koje sadrži tačku P. U slučaju da limes (2) postoji i nezavisan je od oblika malih područja izdvojenih iz oblasti S, razmatrani nepravi integral nazivamo *konvergentnim* a u protivnom slučaju *divergentnim*.

Ako je $f(x, y) \geqslant 0$ tada limes na desnoj strani jednadžbe (2) ne ovisi o obliku područja koja odvajamo iz područja S; napose takva područja mogu biti krugovi polumjera $\frac{\varepsilon}{2}$ sa središtem u tački P.

Pojam nepravih dvostrukih integrala lako proširujemo na trostruke integrale.

Primjer 2. Ispitajmo konvergenciju integrala

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1 + x^2 + y^2)^p}, \tag{3}$$

gdje je S čitava ravnina XOY.

Rješenje. Neka je σ krug polumjera ρ sa središtem u ishodištu koordinatnog sistema. Prijelazom na polarne koordinate uz $p \neq 1$ imamo:

$$I(\sigma) = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1 + x^2 + y^2)^p} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\varrho} \frac{r\,\mathrm{d}r}{(1 + r^2)^p} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left.\frac{(1 + r^2)^{1-p}}{1 - p}\right|_0^{\varrho} \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{1 - p} [(1 + \varrho^2)^{1-p} - 1].$$

Ako je $p<1$, onda $\lim\limits_{\sigma\to S} I(\sigma)=\lim\limits_{\varrho\to\infty} I(\sigma)=\infty$ i integral divergira. Ako je pak $p>1$, onda $\lim\limits_{\varrho\to\infty} I(\sigma)=\frac{\pi}{p-1}$ i integral konvergira.

Uz $p=1$ imamo $I(\sigma)=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\varrho}\frac{r\,dr}{1+r^2}=\pi\ln(1+\rho^2)$; $\lim\limits_{\varrho\to\infty} I(\sigma)=\infty$, tj. integral divergira. Prema tome integral (3) konvergira za $p>1$.

2273. Nađite $f'(x)$ ako je

$$f(x)=\int\limits_x^{\infty} e^{-xy^2}dy\quad (x>0).$$

2274. Neka je funkcija $f(z)$ neprekinuta za $z\in(-\infty,+\infty)$ i $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(z)|(1+z^2)^{-1}dz$ konvergira. Dokažite da funkcija

$$u=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xf(z)}{x^2+(y-z)^2}dz$$

zadovoljava Laplaceovu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

2275. Laplaceov transformat $F(p)$ funkcije $f(t)$ definiran je formulom

$$F(p)=\int\limits_0^{\infty} e^{-pt}f(t)\,dt.$$

Nađite $F(p)$, ako je:

a) $f(t)=1$; b) $f(t)=e^{\alpha t}$; c) $f(t)=\sin\beta t$; d) $f(t)=\cos\beta t$.

2276. Pomoću formule

$$\int\limits_0^1 x^{n-1}dx=\frac{1}{n}\quad (n>0),$$

izračunajte integral

$$\int\limits_0^1 x^{n-1}\ln x\,dx.$$

2277*. Pomoću formule

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-pt}dt=\frac{1}{p}\quad (p>0),$$

izračunajte integral

$$\int\limits_0^{\infty} t^2e^{-pt}dt.$$

Primjenom deriviranja po parametru izračunajte ove intregale:

2278. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\,\mathrm{d}x \quad (\alpha>0,\ \beta>0)$.

2279. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,\mathrm{d}x \quad (\alpha>0,\ \beta>0)$.

2280. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$.

2281. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \quad (|\alpha|<1)$.

2282. $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,\mathrm{d}x \quad (\alpha\geqslant 0)$.

Izračunajte ove neprave integrale:

2283. $\int\limits_0^\infty \mathrm{d}x \int\limits_0^\infty e^{-(x+y)}\,\mathrm{d}y$.

2284. $\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x$.

2285. $\iint\limits_{(S)} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$, gdje je S područje određeno nejednadžbama $x\geqslant 1$, $y\geqslant x^2$.

2286*. $\int\limits_0^\infty \mathrm{d}x \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+a^2)^2} \quad (a>0)$.

2287. *Euler-Poissonov integral* određen formulom $I=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ možemo napisati također i u obliku $I=\int\limits_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$. Pomnožite međusobno te formule i prijeđite zatim na polarne koordinate, pa izračunajte I.

2288. Izračunajte $\int\limits_0^\infty \mathrm{d}x \int\limits_0^\infty \mathrm{d}y \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$.

Ispitajte konvergenciju nepravih dvostrukih integrala:

2289.** $\iint\limits_{(S)} \ln\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, gdje je S krug $x^2+y^2\leqslant 1$.

2290. $\iint\limits_{(S)} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^\alpha}$, gdje je S područje određeno nejednadžbom $x^2+y^2\geqslant 1$ (»vanjština« kruga).

2291*. $\iint\limits_{(S)} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}$, gdje je S kvadrat $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$.

2292. $\displaystyle\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}$, gdje je V područje određeno nejednadžbom $x^2+y^2+z^2 \geq 1$ (»vanjština« kugle).

9. Krivuljni integrali

1°. Krivuljni integrali prve vrste. Neka je $f(x,y)$ neprekinuta funkcija, a $y=\varphi(x)$ $[a \leqslant x \leqslant b]$ jednadžba neke glatke krivulje C.

Odaberimo sistem tačaka $M_i(x_i, y_i)$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$, koji krivulju C rastavlja na elementarne lukove $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i} = \Delta s_i$, i načinimo integralnu sumu $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta s_i$. Limes te sume kada $n \to \infty$ i max $\Delta s_i \to 0$ nazivamo *krivuljnim integralom prve vrste*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta s_i = \int\limits_C f(x,y)\,ds$$

(ds je diferencijal luka) i taj se integral računa po formuli

$$\int\limits_C f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x, \varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx.$$

U slučaju da je krivulja C zadana parametarski: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $[\alpha \leqslant t \leqslant \beta]$, imamo:

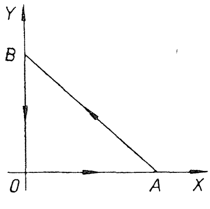
$$\int\limits_C f(x,y)\,ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

Razmatraju se također krivuljni integrali prve vrste funkcija triju varijabli $f(x, y, z)$ uzeti po prostornoj krivulji, koji se analogno računaju. Krivuljni integral prve vrste *ne ovisi o smjeru puta integracije*; ako podintegralnu funkciju f interpretiramo kao linearnu gustoću krivulje integracije C, onda je taj integral *masa krivulje* C.

Primjer 1. Izračunajmo krivuljni integral

$$\int\limits_C (x+y)\,ds,$$

gdje je C kontura trokuta ABO sa vrhovima $A(1; 0)$, $B(0; 1)$ i $O(0; 0)$ (sl. 101).



Slika 101.

Rješenje. Ovdje je: jednadžba stranice AB: $y=1-x$, jednadžba stranice OB: $x=0$, jednadžba stranice OA: $y=0$.

Imat ćemo prema tome

$$\int\limits_C (x+y)\,ds = \int\limits_{AB} (x+y)\,ds + \int\limits_{BO} (x+y)\,ds + \int\limits_{OA} (x+y)\,ds =$$

$$= \int\limits_0^1 \sqrt{2}\,dx + \int\limits_0^1 y\,dy + \int\limits_0^1 x\,dx = \sqrt{2}+1.$$

2°. Krivuljni integral druge vrste. Ako su $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ neprekinute funkcije, a $y=\varphi(x)$ glatka krivulja C, kojom se prolazi kada se x mijenja od a do b, onda pripadni krivuljni integral druge vrste izražavamo na ovaj način:

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b [P(x,\varphi(x)) + \varphi'(x)\,Q(x,\varphi(x))]\,dx.$$

U općenitijem slučaju kada je krivulja C zadana parametarski: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, gdje se t mijenja od α do β, imamo:

$$\int_C P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\,dt.$$

Analogne formule vrijede za krivuljne integrale druge vrste uzete po prostornoj krivulji.

Krivuljni integral druge vrste **mijenja predznak prilikom promjene smjera puta integracije.** Mehanički možemo taj integral interpretirati kao rad pripadne promjenljive sile $\{P(x,y)\ Q(x,y)\}$ duž krivulje integracije C.

Primjer 2. Izračunajmo krivuljni integral

$$\int_C y^2\,dx+x^2\,dy,$$

gdje je C gornja polovina elipse $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(a>0,\ b>0)$, **koja se prelazi u smislu gibanja kazaljke sata.**

Rješenje. Imamo:

$$\int_C y^2\,dx+x^2\,dy=\int_\pi^0 [b^2\sin^2 t\cdot(-a\sin t)+a^2\cos^2 t\cdot b\cos t]\,dt=$$

$$=-ab^2\int_\pi^0 \sin^3 t\,dt+a^2b\int_\pi^0 \cos^3 t\,dt=\frac{4}{3}ab^2.$$

3°. Slučaj totalnog diferencijala. Ako je podintegralni izraz krivuljnog integrala druge vrste totalni diferencijal neke jednoznačne funkcije $U=U(x,y)$, tj. $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=dU(x,y)$, onda taj krivuljni integral ne ovisi o putu integracije, i vrijedi Newton-Leibnizova formula

$$\int_{(x_1;\,y_1)}^{(x_2;\,y_2)} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=U(x_2,y_2)-U(x_1,y_1), \tag{1}$$

gdje je $(x_1;\,y_1)$ početna, a $(x_2;\,y_2)$ krajnja tačka puta. Napose, kada je krivulja integracije C zatvorena, tada je

$$\int_C P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0. \tag{2}$$

Ako je 1) krivulja integracije u potpunosti unutar nekog jednostruko suvislog područja S i 2) funkcije $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ zajedno sa svojim parcijalnim derivacijama prvog reda neprekinuta u području S, onda je nuždan i dovoljan uvjet za postojanje funkcije U da je u području S jednadžba

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \tag{3}$$

identički zadovoljena (vidi integriranje totalnih diferencijala). Ako uvjeti 1) i 2) nisu ispunjeni, postojanje uvjeta (3) ne garantira postojanje jednoznačne funkcije U, pa formule (1) i (2) mogu biti netačne (vidi zadatak 2332). Pokažimo način određivanja funkcije $U(x,y)$ iz njenog totalnog diferencijala, koji se osniva na primjeni krivuljnih integrala (tj. još jedan način integriranja totalnog diferencijala). Za krivulju integracije C uzimamo lomljenu liniju P_0P_1M (sl. 102) gdje je $P_0(x_0;\,y_0)$ fiksirana tačka, a $M(x;\,y)$ pomična tačka. Tada duž P_0P_1 imamo $y=y_0$ i $dy=0$, a duž P_1M vrijedi $dx=0$. Dobivamo:

$$U(x,y)-U(x_0,y_0)=\int_{(x_0;\,y_0)}^{(x;\,y)} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy.$$

Analogno, integrirajući po lomljenoj liniji P_0P_2M, imamo:

$$U(x,y) - U(x_0,y_0) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy + \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx.$$

Primjer 3. $(4x+2y)\,dx+(2x-6y)\,dy = dU$. Nađimo U.

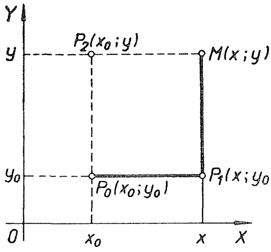
Rješenje. Ovdje je $P(x,y) = 4x+2y$ i $Q(x,y) = 2x-6y$; pri čemu je uvjet (3) očigledno ispunjen. Neka je $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Tada je

$$U(x,y) = \int_0^x 4x\,dx + \int_0^y (2x-6y)\,dy + C = 2x^2 + 2xy - 3y^2 + C$$

ili

$$U(x,y) = \int_0^y -6y\,dy + \int_0^x (4x+2y)\,dx + C = -3y^2 + 2x^2 + 2xy + C,$$

gdje je $C = U(0;0)$ po volji odaberiva konstanta.



Slika 102.

4°. **Greenova formula za ravninu.** Ako je C po dijelovima glatka granica područja S, a funkcije $P(x,y)$, $Q(x,y)$ su neprekinute zajedno sa svojim parcijalnim derivacijama prvog reda u zatvorenom području $S+C$, onda vrijedi *Greenova formula*

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

gdje obilazak krivulje C odabiremo tako da područje S ostaje s lijeve strane.

5°. **Primjena krivuljnih integrala,** 1) *Površina* omeđena jednostavno zatvorenom krivuljom C jednaka je

$$S = -\oint_C y\,dx = \oint_C x\,dy$$

(smisao obilaska krivulje odabire se suprotan smislu gibanja kazaljke sata).

Prikladnija za upotrebu je ova formula površine:

$$S = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}\oint_C x^2\,d\left(\frac{y}{x}\right).$$

2) *Rad sile* koja ima projekcije $X = X(x,y,z)$, $Y = Y(x,y,z)$, $Z = Z(x,y,z)$, (odnosno rad polja sila), duž puta C izražava se integralom

$$A = \int_C X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Ako sila ima potencijal, tj. ako postoji funkcija $U = U(x, y, z)$ (potencijalna funkcija ili funkcija sile) takva da je

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z,$$

onda rad, neovisno o obliku puta C iznosi

$$A = \int_{(x_1;\, y_1;\, z_1)}^{(x_2;\, y_2;\, z_2)} X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z = \int_{(x_1;\, y_1;\, z_1)}^{(x_2;\, y_2;\, z_2)} \mathrm{d}U = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1),$$

gdje je $(x_1;\, y_1;\, z_1)$ početna i $(x_2;\, y_2;\, z_2)$ završna tačka puta.

A. *Krivuljni integrali prve vrste*

Izračunajte ove krivuljne integrale (parametri su pozitivni):

2293. $\int\limits_C xy\,\mathrm{d}s$, gde je C opseg kvadrata $|x| + |y| = a \quad (a > 0)$.

2294. $\int\limits_C \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, gdje je C dio pravca koji spaja tačke $O(0;\, 0)$ i $A(1;\, 2)$.

2295. $\int\limits_C xy\,\mathrm{d}s$, gdje je C četvrtina elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, koja leži u prvom kvadrantu.

2296. $\int\limits_C y^2\,\mathrm{d}s$, gdje je C prvi svod cikloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

2297. $\int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}s$ gdje je C luk evolvente kružnice $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ $[0 \leqslant t \leqslant 2\pi]$.

2298. $\int\limits_C (x^2 + y^2)^2\,\mathrm{d}s$, gdje je C luk logaritamske spirale $r = ae^{m\varphi}$ $(m > 0)$ od tačke $A(0;\, a)$ do tačke $O(-\infty;\, 0)$.

2299. $\int\limits_C (x + y)\,\mathrm{d}s$, gdje je C desna latica lemniskate $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

2300. $\int\limits_C (x + z)\,\mathrm{d}s$, gdje je C luk krivulje $x = t$, $y = \frac{3t^2}{\sqrt{2}}$, $z = t^3$ $[0 \leqslant t \leqslant 1]$.

2301. $\int\limits_C \frac{\mathrm{d}s}{x^2 + y^2 + z^2}$, gdje je C prvi zavoj zavojnice $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

2302. $\int\limits_C \sqrt{2y^2 + z^2}\,\mathrm{d}s$, gdje je C kružnica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x = y$.

2303*. Nađite površinu plašta parabolnog valjka $y = \frac{3}{8}x^2$, omeđenog ravninama $z = 0$, $x = 0$, $z = x$, $y = 6$.

2304. Nađite duljinu luka čunjaste zavojnice $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$ od tačke $O(0;\, 0;\, 0)$ do tačke $A(a;\, 0;\, a)$.

2305. Odredite masu konture elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$, ako je njena linearna gustoća u svakoj tački $M(x,\, y)$ jednaka $|y|$.

2306. Nađite masu prvog zavoja zavojnice $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, ako je gustoća u svakoj tački jednaka radijvektoru te tačke.

2307. Odredite koordinate težišta polusvoda cikloide

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)\quad [0\leqslant t\leqslant \pi].$$

2308. Nađite moment tromosti, s obzirom na os OZ, prvog zavoja zavojnice $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$.

2309. Masa M raspoređena je jednolikom gustoćom na kružnici $x^2+y^2=a^2$, $z=0$. Kojom silom ta masa djeluje na masu m smještenu u tački $A\,(0;\,0;\,b)$?

B. *Krivuljni integrali druge vrste*

Izračunajte ove krivuljne integrale (parametri su pozitivni):

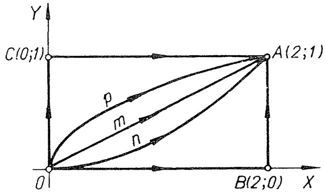
2310. $\int\limits_{AB}(x^2-2xy)\,dx+(2xy+y^2)\,dy$, gdje je AB luk parabole $y=x^2$ od tačke $A\,(1;\,1)$ do tačke $B\,(2;\,4)$.

2311. $\int\limits_{C}(2a-y)\,dx+x\,dy$, gdje je C luk prvog svoda cikloide

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),$$

prijeđen u smjeru porasta parametra t.

2312. $\int\limits_{OA}2xy\,dx-x^2dy$, uzet duž različitih putova koji počinju u ishodištu koordinatnog sistema $O\,(0;\,0)$ i završavaju u tački $A\,(2;\,1)$ (sl. 103):



Slika 103.

a) pravca OmA;
b) parabole OnA, kojoj je os simetrije os OY;
c) parabole OpA, kojoj je os simetrije os OX;
d) lomljene linije OBA;
e) lomljene linije OCA.

2313. $\int\limits_{OA}2xy\,dx+x^2\,dy$ pod istim uvjetima kao i u zadatku 2312.

2314*. $\oint\frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, uzet duž kruga $x^2+y^2=a^2$ u smislu suprotnom gibanju kazaljke sata.

2315. $\int\limits_{C} y^2\,dx + x^2\,dy$, gdje je C gornja polovina elipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, prijeđena u smislu gibanja kazaljke sata.

2316. $\int\limits_{AB} \cos y\,dx - \sin x\,dy$, uzet duž odsječka AB simetrale drugog koordinatnog kuta, ako apscisa tačke A iznosi 2, a ordinata tačke B iznosi 2.

2317. $\oint\limits_{C} \dfrac{xy(y\,dx - x\,dy)}{x^2+y^2}$, gdje je C prva latica lemniskate $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ prijeđena u smislu suprotnom gibanju kazaljke sata.

2318. Izračunajte krivuljne integrale ovih izraza koji su totalni diferencijali:

a) $\int\limits_{(-1;\ 2)}^{(2;\ 3)} x\,dy + y\,dx$, b) $\int\limits_{(0;\ 1)}^{(3;\ 4)} x\,dx + y\,dy$, c) $\int\limits_{(0;\ 0)}^{(1;\ 1)} (x+y)(dx+dy)$,

d) $\displaystyle\int\limits_{(1;\ 2)}^{(2;\ 1)} \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$ (po putu koji ne siječe os OX),

e) $\displaystyle\int\limits_{(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2})}^{(x;\ y)} \frac{dx + dy}{x+y}$ (po putu koji ne siječe pravac $x+y=0$),

f) $\int\limits_{(x_1;\ y_1)}^{(x_2;\ y_2)} \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy$ gdje su funkcije $\varphi(x)$ i $\psi(y)$ neprekinute redom na intervalima $[x_1, x_2]$ i $[y_1, y_2]$.

2319. Našavši primitivne funkcije podintegralnih izraza izračunajte integrale:

a) $\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;\ 0)} (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy$,

b) $\displaystyle\int\limits_{(0;-1)}^{(1;\ 0)} \frac{x\,dy - y\,dx}{(x-y)^2}$ (put integracije ne siječe pravac $y=x$),

c) $\displaystyle\int\limits_{(1;\ 1)}^{(3;\ 1)} \frac{(x+2y)\,dx + y\,dy}{(x+y)^2}$ (put integracije ne siječe pravac $y=-x$),

d) $\displaystyle\int\limits_{(0;\ 0)}^{(1;\ 1)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right)dy.$

2320. Izračunajte

$$I = \int \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}},$$

uzet u smislu gibanja kazaljke sata duž četvrtine elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, koja leži u prvom kvadrantu.

2321. Pokažite da je

$$\oint_C f(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)=0,$$

kada je $f(u)$ neprekinuta funkcija, a C je zatvorena po odsječcima glatka kontura.

2322. Nađite primitivnu funkciju U, ako je:

a) $du=(2x+3y)\,dx+(3x-4y)\,dy$;

b) $du=(3x^2-2xy+y^2)\,dx-(x^2-2xy+3y^2)\,dy$;

c) $du=e^{x-y}[(1+x+y)\,dx+(1-x-y)\,dy]$;

d) $du=\dfrac{dx}{x+y}+\dfrac{dy}{x+y}$.

Izračunajte krivuljne integrale uzete duž prostornih krivulja:

2323. $\int\limits_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$, gdje je C zavoj zavojnice

$$\begin{cases} x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\\ z=bt,\end{cases}$$

koji odgovara promjeni parametra t od 0 do 2π.

2324. $\oint\limits_C y\,dx+z\,dy+x\,dz$, gdje je C kružnica

$$\begin{cases} x=R\cos\alpha\cos t,\\ y=R\cos\alpha\sin t,\\ z=R\sin\alpha \quad (\alpha=\text{const}),\end{cases}$$

prijeđena u smjeru porasta parametra.

2325. $\int\limits_{OA} xy\,dx+yz\,dy+zx\,dz$, gdje je OA luk kružnice

$$x^2+y^2+z^2=2Rx,\quad z=x,$$

smješten s one strane ravnine XOZ gdje je $y>0$.

2326. Izračunajte krivuljne integrale totalnih diferencijala

a) $\displaystyle\int\limits_{(1;\,0;\,-3)}^{(6;\,4;\,8)} x\,dx+y\,dy-z\,dz,$

b) $\displaystyle\int\limits_{(1;\,1;\,1)}^{(a;\,b;\,c)} yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz,$

c) $\displaystyle\int\limits_{(0;\,0;\,0)}^{(3;\,4;\,5)} \frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$

d) $\displaystyle\int\limits_{(1;\,1;\,1)}^{\left(x;\,y;\,\frac{1}{xy}\right)} \frac{yz\,\mathrm{d}x+zx\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z}{xyz}$ (put integracije je u prvom oktantu).

C. *Greenova formula*

2327. Pomoću Greenove formule trasformirajte krivuljni integral

$$I=\oint\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\mathrm{d}y,$$

gdje kontura C omeđuje područje S.

2328. Primjenom Greenove formule izračunajte

$$I=\oint\limits_C 2(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x+(x+y)^2\,\mathrm{d}y,$$

gdje je C kontura trokuta s vrhovima u tačkama $A\,(1;\,1)$, $B\,(2;\,2)$ i $C\,(1;\,3)$ prijeđena u pozitivnom smislu. Provjerite dobiveni rezultat izračunavši integral izravno.

2329. Primjenom Greenove formule izračunajte integral

$$\oint\limits_C -x^2y\,\mathrm{d}x+xy^2\,\mathrm{d}y,$$

gdje je C kružnica $x^2+y^2=R^2$ prijeđena u smislu suprotnom gibanju kazaljke sata.

2330. Tačkama $A\,(1;\,0)$ i $B\,(2;\,3)$ položena je parabola AmB tako da joj se os poklapa sa osi OY, a tetiva joj je AnB. Nađite $\oint\limits_{AmBnA} (x+y)\,\mathrm{d}x-(x-y)\,\mathrm{d}y$ neposredno i primjenom Greenove formule.

2331. Nađite $\int\limits_{AmB} e^{xy}\left[y^2\,\mathrm{d}x+(1+xy)\,\mathrm{d}y\right]$, ako tačke A i B leže na osi OX, a površina omeđena putom integracije AmB i odsječkom AB iznosi S.

2332*. Izračunajte $\displaystyle\oint\limits_C \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$. Razmotrite dva slučaja:

a) kada je ishodište koordinatnog sistema izvan konture C,

b) kada kontura n puta okružuje ishodište koordinatnog sistema.

2333.** Pokažite da je

$$\oint\limits_C \cos(X,\ n)\,\mathrm{d}s=0,$$

gdje je s duljina luka, a n vanjska normala.

2334. Primjenom Greenove formule nađite integral

$$I=\oint\limits_{C}[x\cos(X,\ n)+y\sin(X,\ n)]\,\mathrm{d}s,$$

gdje je ds diferencijal luka i n vanjska normala na konturu C.

2335*. Izračunajte integral

$$\oint\limits_{C}\frac{\mathrm{d}x-\mathrm{d}y}{x+y},$$

uzet duž konture kvadrata s vrhovima u tačkama $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;0)$ i $D(0;-1)$ pod uvjetom da se kontura obilazi u smislu suprotnom gibanju kazaljke sata.

D. *Primjene krivuljnih integrala*

Izračunajte površine likova omeđenih ovim krivuljama:

2336. Elipsom $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

2337. Astroidom $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

2338. Kardioidom $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$.

2339*. Petljom Descartesova lista $x^3+y^3-3axy=0$ $(a>0)$.

2340. Krivuljom $(x+y)^3=axy$.

2341*. Kružnica polumjera r kotrlja se bez klizanja po vanjskoj strani nepomične kružnice polumjera R. Pretpostavite da je $\frac{R}{r}$ cio broj, pa nađite površinu omeđenu krivuljom (epicikloidom) koju opisuje po volji odabrana tačka pomične kružnice. Razmotrite i specijalni slučaj kada je $r=R$ (kardioida).

2342*. Kružnica polumjera r kotrlja se bez klizanja po unutrašnjoj strani nepomične kružnice polumjera R. Uz pretpostavku da je $\frac{R}{r}$ cio broj nađite površinu omeđenu krivuljom (hipocikloidom) koju opisuje po volji odabrana tačka pomične kružnice. Razmotrite specijalni slučaj kada je $r=\frac{R}{4}$ (astroida).

2343. Polje tvori konstantna sila F usmjerena u smjeru pozitivne poluosi OX. Nađite rad polja, kada materijalna tačka opisuje u prvom kvadrantu četvrtinu kružnice $x^2+y^2=R^2$ u smislu gibanja kazaljke sata.

2344. Nađite rad proizveden silom teže kada se materijalna tačka mase m pomakne iz položaja $A(x_1;y_1;z_1)$ u položaj $B(x_2;y_2;z_2)$ (os OZ usmjerena je vertikalno nagore).

2345. Nađite rad elastične sile usmjerene prema ishodištu koordinatnog sistema. Jakost sile proporcionalna je udaljenosti tačke od ishodišta koordinatnog sistema, a tačka na koju djeluje sila opisuje u prvom kvadrantu četvrtinu elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ u smislu suprotnom gibanju kazaljke sata.

2346. Nađite potencijalnu funkciju sile $R\{X, Y, Z\}$ i odredite rad sile na zadanom dijelu puta, ako je

a) $X=0$, $Y=0$, $Z=-mg$ (sila teže), a materijalna tačka premjesti se iz položaja $A(x_1, y_1, z_1)$ u položaj $B(x_2, y_2, z_2)$;

b) $X=-\frac{\mu x}{r^3}$, $Y=-\frac{\mu y}{r^3}$, $Z=-\frac{\pi z}{r^3}$, gdje je $\mu=\text{const}$ i $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (Newtonova privlačna sila) i materijalna tačka se iz položaja $A(a, b, c)$ udaljava u neizmjernost;

c) $X=-k^2x$, $Y=-k^2y$, $Z=-k^2z$, gdje je $k=\text{const}$ (elastična sila) pri čemu se početna tačka puta nalazi na kugli $x^2+y^2+z^2=R^2$, a krajnja tačka na kugli $x^2+y^2+z^2=r^2$ $(R>r)$.

10. Plošni integrali

1°. Plošni integral prve vrste. Neka je $f(x,y,z)$ neprekinuta funkcija, a $z=\varphi(x\ y)$ glatka ploha S.

Plošni integral prve vrste je limes integralne sume

$$\iint_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i,$$

gdje je ΔS_i površina i-tog elementa plohe S i tačka (x_i, y_i, z_i) pripada tom elementu, pri čemu maksimalni promjer elemenata razdiobe teži k nuli.

Vrijednost tog integrala ne ovisi o izboru strane plohe S, po kojoj se vrši integracija.

Ako je projekcija σ plohe S na ravninu XOY jednoznačna, tj. svaki pravac paralelan s osi OZ siječe plohu S samo u jednoj tački, onda pripadni plošni integral prve vrste možemo izračunati pomoću formule

$$\iint_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}S=\iint_{(\sigma)} f[x, y, \varphi(x, y)]\sqrt{1+\varphi_x'^2(x, y)+\varphi_y'^2(x, y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Primjer 1. Izračunajmo plošni integral

$$\iint_S (x+y+z)\,\mathrm{d}S,$$

gdje je S površina kocke $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$.

Rješenje. Izračunajmo zbroj plošnih integrala po gornjoj strani kocke $(z=1)$ i po donjoj strani kocke $(z=0)$

$$\int_0^1\int_0^1 (x+y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^1 (2x+2y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3.$$

Očigledno je da je traženi plošni integral tri puta veći i iznosi

$$\iint_S (x+y+z)\,\mathrm{d}S=9.$$

2°. Plošni integral druge vrste. Ako su $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$ $R=R(x,y,z)$ neprekinute funkcije a S^+ strana glatke dvostrane plohe S koju karakterizira smjer normale $\boldsymbol{n}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, onda se pripadni plošni integral druge vrste izražava na ovaj način:

$$\iint_{S^+} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S.$$

Pri prijelazu na drugu stranu S^- plohe taj integral mijenja svoj predznak.

Ako je ploha S zadana implicitno $F(x, y, z)=0$, onda kosinus smjera normale te plohe određujemo po formulama

$$\cos\alpha=\frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial x},\quad \cos\beta=\frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial y},\quad \cos\gamma=\frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial z},$$

gdje je

$$D=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

a izbor predznaka radikala mora odgovarati odabranoj strani plohe S.

3°, Stokesova formula. Ako su funkcije $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ neprekinuto derivabilne, a C je zatvorena po dijelovima glatka krivulja koja omeđuje glatku dvostranu plohu S, onda vrijedi *Stokesova formula*

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$

$$=\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS,$$

gdje su $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kosinusi smjera normale na plohu S, pri čemu se smjer normale određuje tako da je sa strane normale obilazak krivulje C suprotan smjeru gibanja kazaljke na satu (u desnom koordinatnom sistemu).

Izračunajte ove plošne integrale prve vrste:

2347. $\iint_S (x^2+y^2)\,dS$, gdje je S kugla $x^2+y^2+z^2=a^2$.

2348. $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, gdje je S plašt čunja

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0\quad [0\leqslant z\leqslant b].$$

Izračunajte ove plošne integrale druge vrste:

2349. $\iint_S yz\,dy\,dz+xz\,dz\,dx+xy\,dx\,dy$, gdje je S vanjska strana površine tetraedra omeđenog ravninama $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=a$.

2350. $\iint_S z\,dx\,dy$, gdje je S vanjska strana elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2351. $\iint_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, gdje je S vanjska strana plohe polukugle $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geqslant 0)$.

2352. Nađite masu površine kocke $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$ ako plošna gustoća u tački $M(x;\ y;\ z)$ iznosi xyz.

2353. Odredite koordinate težišta homogene parabolne ljuske $az=x^2+y^2$ $(0\leqslant z\leqslant a)$.

2354. Nađite moment tromosti dijela plašta čunja $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $[0\leqslant z\leqslant h]$ s obzirom na os OZ.

2355. Primjenom Stokesove formule transformirajte integrale:

a) $\oint\limits_C (x^2-yz)\,dx + (y^2-zx)\,dy + (z^2-xy)\,dz$;

b) $\oint\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$.

Primjenom Stokesove formule nađite zadane integrale i provjerite neposrednim računom:

2356. $\oint\limits_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, gdje je C kružnica

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad x+y+z=0.$$

2357. $\oint\limits_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, gdje je C elipsa

$$x^2+y^2=1, \quad x+z=1.$$

2358. $\oint\limits_C x\,dx + (x+y)\,dy + (x+y+z)\,dz$, gdje je C krivulja

$$x=a\sin t, \quad y=a\cos t, \quad z=a(\sin t+\cos t) \quad [0 \leqslant t \leqslant 2\pi].$$

2359. $\oint\limits_{ABCA} y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, gdje je $ABCA$ kontura $\triangle ABC$ s vrhovima $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ a;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ a)$.

2360. U kome slučaju je krivuljni integral

$$I=\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

po bilo kojoj zatvorenoj krivulji C jednak nuli?

11. Formula Ostrogradskog-Gaussa

Ako je S zatvorena glatka ploha koja omeđuje konačno područje V, a $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ su funkcije neprekinute zajedno sa svojim parcijalnim derivacijama prvog reda u zatvorenom području $V+S$, onda vrijedi formula *Ostrogradskog-Gaussa*

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

gdje su $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kosinusi smjera vanjske normale na plohu S.

Primjenom formule Ostrogradskog-Gaussa transformirajte ove plošne integrale po zatvorenim plohama S koje omeđuju konačno područje V ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ su kosinusi smjera vanjske normale na plohu S):

2361. $\iint\limits_S xy\,dx\,dy + yz\,dy\,dz + zx\,dz\,dx$.

2362. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$.

2363. $\displaystyle\iint\limits_S \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dS$.

2364. $\iint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S.$

Pomoću formule Ostrogradskog-Gaussa izračunajte ove plošne integrale (parametri su pozitivni):

2365. $\iint\limits_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, gdje je S vanjska strana površine kocke

$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant a, \quad 0 \leqslant z \leqslant a.$$

2366. $\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, gdje je S vanjska strana piramide omeđene plohama $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

2367. $\iint\limits_S x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, gdje je S vanjska strana kugle

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

2368. $\iint\limits_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$, gdje je S vanjska potpuna površina čunja

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0 \quad [0 \leqslant z \leqslant b].$$

2369. Dokažite da je

$$\iint\limits_S \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l})\,\mathrm{d}S = 0,$$

ako je S zatvorena ploha i $\boldsymbol{l}$ po volji odabran konstantan smjer, a $\boldsymbol{n}$ vanjska normala na plohu S.

2370. Dokažite da volumen tijela V omeđenog plohom S iznosi

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S,$$

gdje su $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kosinusi smjera vanjske normale na plohu S.

12. Elementi teorije polja

1°. Skalarno i vektorsko polje. Skalarno polje definirano je skalarnom funkcijom tačke $u=f(P)=f(x, y, z)$ gdje je $P(x, y, z)$ tačka prostora. Plohe $f(x, y, z)=C$, gdje je $C=\text{const}$ nazivamo *nivo-plohama* skalarnog polja.

Vektorsko polje definirano je vektorskom funkcijom tačke $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(P)=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, gdje je P tačka prostora a $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ radijvektor tačke P. U koordinatnom obliku $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ gdje su $a_x=a_x(x, y, z)$, $a_y=a_y(x, y, z)$, $a_z=a_z(x, y, z)$ projekcije vektora $\boldsymbol{a}$ na koordinatne osi. *Vektorske linije* (*silnice*, *strujnice*) vektorskog polja računaju se iz sistema diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{\mathrm{d}x}{a_x}=\frac{\mathrm{d}y}{a_y}=\frac{\mathrm{d}z}{a_z}.$$

Skalarno ili vektorsko polje koje ne ovisi o vremenu t, nazivamo *stacionarnim*, a ono koje ovisi o vremenu *nestacionarnim*.

2°. Gradijent. Vektor

$$\operatorname{grad} U(P)=\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}\equiv\nabla U,$$

gdje je $\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$ Hamiltonov operator (nabla) nazivamo *gradijentom* derivabilnog polja $U=f(P)$ u danoj tački P (vidi VI, 6), Vektor grad $U(P)\neq 0$ je usmjeren po normali $\boldsymbol{n}$ na nivo-plohu u tački P u stranu porasta funkcije U ima duljinu jednaku

$$\frac{\partial U}{\partial n}=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Ako je smjer u tački P zadan jediničnim vektorom $\boldsymbol{l}$ $\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ onda je

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\operatorname{grad} U\cdot\boldsymbol{l}=\operatorname{grad}_l U=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma$$

(*derivacija funkcije U u tački P u smjeru l*).

3°. Divergencija i rotor. *Divergencijom* derivabilnog vektorskog polja $\boldsymbol{a}(P)=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ nazivamo skalar div $\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\equiv\nabla\boldsymbol{a}$.

Rotorom derivabilnog vektorskog polja $\boldsymbol{a}(P)$ nazivamo vektor

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\equiv\nabla\times\boldsymbol{a}.$$

4°. Tok vektora. *Tokom* neprekinutog vektorskog polja $\boldsymbol{a}(P)$ kroz plohu S u stranu određenu jediničnim vektorom normale $\boldsymbol{n}$ $\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ na plohu S, nazivamo integral

$$\iint_S\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\iint_S a_n\,\mathrm{d}S=\iint_S(a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S.$$

Ako je S zatvorena ploha koja omeđuje volumen V, a $\boldsymbol{n}$ je jedinični vektor vanjske normale na plohu S, onda vrijedi *formula Ostrogradskog-Gaussa,* koja u vektorskom obliku glasi

$$\oint\!\!\oint_S a_n\,\mathrm{d}S=\iiint_{(V)}\operatorname{div}\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

5°. Cirkulacija vektora; rad polja. *Linijski integral* neprekinutog vektora $\boldsymbol{a}$ po dijelovima glatkoj krivulji C određen je formulom

$$\int_C\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_C a_s\,\mathrm{d}s=\int_C a_x\,\mathrm{d}x+a_y\,\mathrm{d}y+a_z\,\mathrm{d}z \qquad (1)$$

i predstavlja *rad* polja $\boldsymbol{a}$ duž krivulje C (a_s je projekcija vektora $\boldsymbol{a}$ na tangentu na C).

Ako je krivulja C zatvorena, onda linijski integral (1) nazivamo *cirkulacijom* vektorskog polja $\boldsymbol{a}$ duž krivulje C.

Ako zatvorena krivulja C omeđuje dvostranu plohu S, tada vrijedi *Stokesova formula*, koja u vektorskom obliku glasi

$$\oint_C\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S\boldsymbol{n}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}S=\iint_S(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_n\,\mathrm{d}S,$$

gdje je $\boldsymbol{n}$ vektor normale na plohu S kojem smjer mora biti tako odabran da je za promatrača koji gleda sa strane plohe karakterizirane smjerom vektora $\boldsymbol{n}$, obilazak krivulje C u desnom sistemu koordinata suprotan smislu gibanja kazaljke sata.

6°. Potencijalno i solenoidalno polje. Vektorsko polje $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ nazivamo *potencijalnim* ako je

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} U,$$

gdje je $U = f(\boldsymbol{r})$ derivabilna skalarna funkcija (*potencijal* polja).

Za potencijalnost polja $\boldsymbol{a}$, zadanog i neprekinuto derivabilnog u jednostruko suvislom području nužno je i dovoljno da ono bude *bezvrtložno*, tj. da bude $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$. U tome slučaju postoji potencijal U, koji se određuje iz jednadžbe

$$\mathrm{d}U = a_x \, \mathrm{d}x + a_y \, \mathrm{d}y + a_z \, \mathrm{d}z.$$

Ako je potencijal U jednoznačna funkcija, onda je $\int\limits_{AB} \boldsymbol{a} \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = U(B) - U(A)$; napose je cirkulacija vektora $\boldsymbol{a}$ jednaka nuli: $\oint\limits_{C} \boldsymbol{a} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$.

Derivabilno vektorsko polje $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ nazivamo *solenoidalnim* ako je u svakoj tački polja $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$; u tome je slučaju tok vektora kroz bilo koju zatvorenu plohu jednak nuli.

Ako je polje istovremeno i potencijalno i solenoidalno, onda je $\operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = 0$, i potencijalna funkcija U je harmonijska funkcija, tj. zadovoljava Laplaceovu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad \text{ili} \quad \Delta U = 0,$$

gdje je $\Delta = \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ Laplaceov operator.

2371. Odredite nivo-plohe skalarnog polja $U = f(r)$, gdje je $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Kakve će biti nivo-plohe polja $U = F(\rho)$, gdje je $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$?

2372. Odredite nivo-plohe skalarnog polja

$$U = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

2373. Pokažite da su vektorske linije vektorskog polja $\boldsymbol{a}(P) = \boldsymbol{c}$, gdje je $\boldsymbol{c}$ konstantni vektor, pravci paralelni s vektorom $\boldsymbol{c}$.

2374. Nađite vektorske linije polja $\boldsymbol{a} = -\omega y \boldsymbol{i} + \omega x \boldsymbol{j}$, gdje je ω konstanta.

2375. Izvedite formule:

a) $\operatorname{grad}(C_1 U + C_2 V) = C_1 \operatorname{grad} U + C_2 \operatorname{grad} V$, gdje su C_1 i C_2 konstante;

b) $\operatorname{grad}(UV) = U \operatorname{grad} V + V \operatorname{grad} U$;

c) $\operatorname{grad}(U^2) = 2U \operatorname{grad} U$;

d) $\operatorname{grad}\left(\dfrac{U}{V}\right) = \dfrac{V \operatorname{grad} U - U \operatorname{grad} V}{V^2}$;

e) $\operatorname{grad} \varphi(U) = \varphi'(U) \operatorname{grad} U$.

2376. Nađite veličinu i smjer gradijenta polja $U = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ u tački $A(2;\ 1;\ 1)$. Odredite u kojim tačkama je gradijent polja okomit na os OZ i u kojim tačkama je jednak nuli.

2377. Izračunajte grad U, ako U iznosi:

a) $\boldsymbol{r}$, b) $\boldsymbol{r}^2$, c) $\dfrac{1}{r}$, d) $f(r)$ $(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$.

2378. Nađite gradijent skalarnog polja $U=\boldsymbol{c}\boldsymbol{r}$, gdje je $\boldsymbol{c}$ konstantan vektor. Kakve će biti nivo-plohe tog polja i kako su one raspoređene u odnosu na vektor $\boldsymbol{c}$?

2379. Nađite derivaciju funkcije $U=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ u zadanoj tački $P(x, y, z)$ u smjeru radijvektora $\boldsymbol{r}$ te tačke. U kojem slučaju će ta derivacija biti jednaka vrijednosti gradijenta?

2380. Nađite derivaciju funkcije $U=\dfrac{1}{r}$ u smjeru $\boldsymbol{l}\,\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. U kojem slučaju je ta derivacija jednaka nuli?

2381. Izvedite formule:

a) $\operatorname{div}(C_1\boldsymbol{a}_1+C_2\boldsymbol{a}_2)=C_1\operatorname{div}\boldsymbol{a}_1+C_2\operatorname{div}\boldsymbol{a}_2$, gdje su C_1 i C_2 konstante;

b) $\operatorname{div}(U\boldsymbol{c})=\operatorname{grad}U\cdot\boldsymbol{c}$, gdje je $\boldsymbol{c}$ konstantan vektor;

c) $\operatorname{div}(U\boldsymbol{a})=\operatorname{grad}U\cdot\boldsymbol{a}+U\operatorname{div}\boldsymbol{a}$.

2382. Izračunajte $\operatorname{div}\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$.

2383. Nađite div $\boldsymbol{a}$ za centralno vektorsko polje $\boldsymbol{a}(P)=f(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$, gdje je

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

2384. Izvedite formule:

a) $\operatorname{rot}(C_1\boldsymbol{a}_1+C_2\boldsymbol{a}_2)=C_1\operatorname{rot}\boldsymbol{a}_1+C_2\operatorname{rot}\boldsymbol{a}_2$, gdje su C_1 i C_2 konstante;

b) $\operatorname{rot}(U\boldsymbol{c})=\operatorname{grad}\ U\times\boldsymbol{c}$, gdje je $\boldsymbol{c}$ konstantan vektor;

c) $\operatorname{rot}(U\boldsymbol{a})=\operatorname{grad}U\times\boldsymbol{a}+U\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$.

2385. Izračunajte divergenciju i rotor vektora $\boldsymbol{a}$, ako $\boldsymbol{a}$ iznosi: a) $\boldsymbol{r}$; b) $r\boldsymbol{c}$ i c) $f(r)\boldsymbol{c}$, gdje je $\boldsymbol{c}$ konstantan vektor.

2386. Nađite divergenciju i rotor polja linearnih brzina tačaka tijela koje rotira konstantnom kutnom brzinom ω oko osi OZ u smislu suprotnom gibanju kazaljke sata.

2387. Izračunajte rotor polja linearnih brzina $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}$ tačaka tijela, koje rotira konstantnom brzinom $\boldsymbol{\omega}$ oko neke osi koja prolazi ishodištem koordinatnog sistema.

2388. Izračunajte divergenciju i rotor gradijenta skalarnog polja U.

2389. Dokažite da je div (rot $\boldsymbol{a}$) $=0$.

2390. Uz pomoć teorema Ostrogradskog-Gaussa dokažite da je tok vektora $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}$ kroz zatvorenu plohu koja omeđuje neki volumen v, jednak trostrukom volumenu.

2391. Nađite tok vektora $\boldsymbol{r}$ kroz punu površinu valjka $x^2+y^2 \leqslant R^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$.

2392. Nađite tok vektora $\boldsymbol{a}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k}$ kroz: a) plašt čunja $\frac{x^2+y^2}{R^2} \leqslant \frac{z^2}{H^2}$, $0 \leqslant z \leqslant H$; b) kroz punu površinu čunja.

2393*. Izračunajte divergenciju i tok privlačne sile $\boldsymbol{F}=-\frac{m\boldsymbol{r}}{r^3}$ tačke mase m smještene u ishodištu koordinatnog sistema, kroz bilo koju zatvorenu plohu koja okružuje tu tačku.

2394. Izračunajte linijski integral vektora $\boldsymbol{r}$ duž jednog zavoja zavojnice $x=R\cos t$; $y=R\sin t$; $z=ht$ od $t=0$ do $t=2\pi$.

2395. Pomoću Stokesova teorema izračunajte cirkulaciju vektora $\boldsymbol{a}=x^2y^3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ duž kružnice $x^2+y^2=R^2$; $z=0$, ako se za plohu odabere polukugla $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

2396. Pokažite, ako je sila $\boldsymbol{F}$ centralna, tj. usmjerena prema nepomičnoj tački O i ovisi samo o udaljenosti r do te tačke: $\boldsymbol{F}=f(r)\,\boldsymbol{r}$, gdje je $f(r)$ jednoznačna neprekinuta funkcija, da je to polje potencijalno. Nađite potencijal U polja.

2397. Nađite potencijal U gravitacionog polja koje stvara materijalna tačka mase m smještene u ishodište koordinatnog sistema: $\boldsymbol{a}=-\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r}$. Pokažite da potencijal U zadovoljava Laplaceovu jednadžbu $\Delta U=0$.

2398. Istražite ima li zadano vektorsko polje potencijal U, i nađite U ako potencijal postoji:

$$\text{a) } \boldsymbol{a}=(5x^2y-4xy)\,\boldsymbol{i}+(3x^2-2y)\,\boldsymbol{j};$$

$$\text{b) } \boldsymbol{a}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k};$$

$$\text{c) } \boldsymbol{a}=(y+z)\,\boldsymbol{i}+(x+z)\,\boldsymbol{j}+(x+y)\,\boldsymbol{k}.$$

2399. Dokažite da će prostorno centralno polje $\boldsymbol{a}=f(r)\,\boldsymbol{r}$ biti solenoidalno samo za $f(r)=\frac{k}{r^3}$ gdje je $k=\text{const.}$

2400. Da li je vektorsko polje $\boldsymbol{a}=r\,(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})$ solenoidalno ($\boldsymbol{c}$ je konstantan vektor)?

GLAVA VIII

REDOVI

1. Redovi brojeva

1°. Osnovni pojmovi. Red brojeva

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

nazivamo *konvergentnim*, ako njegova *parcijalna suma*

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$$

ima limes kada $n\to\infty$. Veličinu $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ nazivamo tada *sumom* reda, a broj

$$R_n=S-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots$$

ostatkom reda. Ako limesa $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ nema, onda red nazivamo *divergentnim.*

Kada red konvergira, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ (*nuždan uvjet konvergencije*). Obratna tvrdnja nije tačna.

Da bi red (1) konvergirao, nužno je i dovoljno da za svaki pozitivni broj ε možemo odabrati takav N, da je za $n>N$ i po volji odabrani pozitivni p zadovoljena jednadžba

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|<\varepsilon$$

(*Cauchyjev kriterij*).

Konvergencija ili divergencija reda ne poremeti se ako redu dodamo ili od njega oduzmemo konačan broj članova reda.

2°. Uvjeti konvergencije i divergencije redova s pozitivnim članovima.

a) **Kriterij uspoređivanja I.** Ako je $0\leqslant a_n\leqslant b_n$ počevši od nekog $n=n_0$, a red

$$b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2}$$

konvergira, onda red (1) također konvergira. Ako red (1) divergira, onda divergira i red (2).

Za uspoređivanje redova napose je povoljno odabrati *geometrijski red*

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \qquad (a\neq 0),$$

koji konvergira za $|q|<1$, a divergira za $|q|\geqslant 1$, i *harmonijski red*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

koji je divergentan.

Primjer 1. Red

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\ldots$$

konvergira budući da je ovdje

$$a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}<\frac{1}{2^n},$$

pri čemu geometrijski red

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

kojemu je kvocijent $q=\frac{1}{2}$, konvergira.

Primjer 2. Red

$$\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\ldots+\frac{\ln n}{n}+\ldots$$

divergira budući da je njegov opći član $\frac{\ln n}{n}$ veći od pripadnog člana $\frac{1}{n}$ harmonijskog reda (koji divergira).

b) **Kriterij uspoređivanja II.** Ako postoji konačan $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ različit od nule (napose ako je $a_n\sim b_n$), onda oba reda (1) i (2) konvergiraju ili divergiraju istovremeno.

Primjer 3. Red

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$$

divergira, budući da je

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n-1}:\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\neq 0,$$

a red s općim članom $\frac{1}{n}$ divergira.

Primjer 4. Red

$$\frac{1}{2-1}+\frac{1}{2^2-2}+\frac{1}{2^3-3}+\ldots+\frac{1}{2^n-n}+\ldots$$

konvergira, jer je

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n-n}:\frac{1}{2^n}\right)=1,\quad \text{tj.}\quad \frac{1}{2^n-n}\sim\frac{1}{2^n},$$

a red s općim članom $\frac{1}{2^n}$ konvergira.

c) **D'Alembertov kriterij.** Neka je $a_n>0$ (počevši od nekog $n=n_0$) i neka postoji limes

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q.$$

Tada red (1) konvergira kada je $q<1$, a divergira kada je $q>1$. Ako je $q=1$, kriterij ne daje odluku (red može konvergirati ili divergirati).

Primjer 5. Ispitajmo konvergenciju reda

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$$

Rješenje. Ovdje je

$$a_n=\frac{2n-1}{2^n}, \quad a_{n+1}=\frac{2n+1}{2^{n+1}}$$

i

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)2^n}{2^{n+1}(2n-1)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2n}}=\frac{1}{2}.$$

Prema tome zadani red konvergira.

d) **Cauchyjev kriterij.** Neka je $a_n\geqslant 0$ (počevši od nekog $n=n_0$) i neka postoji limes

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q.$$

Tada red (1) konvergira kada je $q<1$, a divergira kada je $q>1$. U slučaju kada je $q=1$ kriterij ne daje odluku (red može konvergirati ili divergirati).

e) **Integralni kriterij (Cauchy).** Ako je $a_n=f(n)$, gdje je funkcija $f(x)$ pozitivna, monotono silazna i neprekinuta za $x\geqslant a\geqslant 1$, onda red (1) i integral

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

konvergiraju ili divergiraju istovremeno.

Pomoću integralnog kriterija dokazuje se da *Dirichletov red*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \tag{3}$$

konvergira kada je $p>1$, a divergira kada je $p\leqslant 1$. Konvergenciju mnogih redova možemo ispitati uspoređivanjem s odgovarajućim Dirichletovim redom (3).

Primjer 6. Ispitajmo konvergenciju reda

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2n}+\ldots$$

Rješenje. Imamo:

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{4n^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2n}}\sim\frac{1}{4n^2}.$$

Budući da Dirichletov red za $p=2$ konvergira, onda na osnovu kriterija uspoređivanja II možemo utvrditi da i zadani red konvergira.

3°. Kriteriji konvergencije redova s članovima promjenljivog predznaka. Ako red

$$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|+\ldots, \tag{4}$$

koji je sastavljen od apsolutnih vrijednosti članova reda (1) konvergira, onda red (1) također konvergira i nazivamo ga *apsolutno konvergentnim.* Ako pak red (1) konvergira, a red (4) divergira, tada red (1) nazivamo *uvjetno* (*neapsolutno*) *konvergentnim.*

Za ispitivanje apsolutne konvergencije reda (1) možemo za red (4) upotrijebiti poznate uvjete konvergencije redova s pozitivnim članovima. Napose red (1) konvergira apsolutno ako je

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

ili

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Općenito iz divergencije reda (4) ne slijedi divergencija reda (1). No ako je $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ ili $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ tada ne divergira samo red (4) nego i red (1).

Leibnizov kriterij. Ako su za alternirani red

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots \quad (b_n \geqslant 0) \tag{5}$$

ispunjeni uvjeti: 1) $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \dots$; 2) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, onda red (5) konvergira.

Za ostatak reda R_n u tome slučaju vrijedi ocjena

$$|R_n| \leqslant b_{n+1}.$$

Primjer 7. Ispitajmo konvergenciju reda

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{7}\right)^4 + \dots + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n + \dots$$

Rješenje. Sastavimo red iz apsolutnih vrijednosti članova zadanog reda:

$$1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{7}\right)^4 + \dots + \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n + \dots$$

Budući da je

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2},$$

to zadani red konvergira apsolutno.

Primjer 8. Red

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n} + \dots$$

konvergira jer je ispunjen uvjet Leibnizova kriterija. Taj red konvergira uvjetno (neapsolutno) zato što red

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

divergira (harmonijski red).

Napomena. Za konvergenciju alterniranog reda nije dovoljno da njegov opći član teži k nuli. Leibnizov kriterij utvrđuje samo da alternirani red konvergira ako apsolutna vrijednost općeg člana reda teži k nuli monotono. Tako na primjer red

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{k} - \frac{1}{5^k} + \dots$$

divergira bez obzira na to što njegov opći član teži k nuli (monotonost mijenjanja apsolutne vrijednosti općeg člana ovdje je naravno narušena).

Stvarno, ovdje je $S_{2k} = S'_k + S''_k$, gdje je

$$S'_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}, \quad S''_k = -\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^k}\right),$$

pri čemu je $\lim\limits_{k \to \infty} S'_k = \infty$ (S'_k je parcijalna suma harmonijskog reda) dok limes $\lim\limits_{k \to \infty} S''_k$ postoji i konačan je (S''_k je parcijalna suma konvergentnog geometrijskog reda), prema tome je $\lim\limits_{k \to \infty} S_{2k} = \infty$.

S druge strane za konvergenciju alterniranog reda ne mora biti ispunjen Leibnizov kriterij: alternirani red može konvergirati, ako apsolutna vrijednost njegova općeg člana teži k nuli nemonotono.

Tako red

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^3} - \frac{1}{(2n)^2} + \ldots$$

konvergira i to apsolutno premda Leibnizov kriterij nije ispunjen: apsolutna vrijednost općeg člana reda doduše teži k nuli, ali ne monotono.

4°. Redovi s kompleksnim članovima. Red s općim članom $c_n = a_n + i\,b_n$ (i je imaginarna jedinica) konvergira tada i samo tada kada istovremeno konvergiraju redovi s realnim članovima $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, pri čemu je u tom slučaju

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{6}$$

Red (6) očito konvergira i nazivamo ga *apsolutno konvergentnim*, ako konvergira red

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

kojemu su članovi moduli članova reda (6).

5°. Osnovne računske operacije s redovima.

a) Konvergentni red možemo pomnožiti član po član s bilo kojim brojem k, tj. ako je

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = S,$$

onda je

$$ka_1 + ka_2 + \ldots + ka_n + \ldots = kS.$$

b) Pod *sumom* (*razlikom*) dvaju konvergentnih redova

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = S_1, \tag{7}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = S_2 \tag{8}$$

razumijevamo pripadni red

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots = S_1 \pm S_2.$$

c) *Produktom* redova (7) i (8) nazivamo red

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots, \tag{9}$$

gdje je $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Ako redovi (7) i (8) konvergiraju apsolutno, onda red (9) također konvergira apsolutno i ima sumu $S_1 S_2$.

d) Ako red konvergira apsolutno, njegova suma se ne mijenja permutacijom članova reda. To svojstvo ne vrijedi ako red konvergira uvjetno.

Napišite jednostavnu formulu za n-ti član reda prema navedenim članovima:

2401. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$

2402. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots$

2403. $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\ldots$

2404. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$

2405. $\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\frac{6}{25}+\ldots$

2406. $\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\ldots$

2407. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\ldots$

2408. $1+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}+\ldots$

2409. $1-1+1-1+1-1+\ldots$

2410. $1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{6}+\ldots$

U zadacima br. 2411 do 2415 napišite 4 do 5 prvih članova reda prema poznatom općem članu a_n.

2411. $a_n=\frac{3n-2}{n^2+1}$.

2412. $a_n=\frac{(-1)^n n}{2^n}$.

2413. $a_n=\frac{2+(-1)^n}{n^2}$.

2414. $a_n=\frac{1}{[3+(-1)^n]^n}$.

2415. $a_n=\frac{\left(2+\sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos n\pi}{n!}$.

Ispitajte konvergenciju redova primjenom kriterija uspoređivanja (ili nužnih uvjeta):

2416. $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$

2417. $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\ldots$

2418. $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\ldots+\frac{n+1}{2n+1}+\ldots$

2419. $\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt[3]{10}}+\frac{1}{\sqrt[4]{10}}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{10}}+\ldots$

2420. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots$

2421. $\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\ldots+\frac{1}{10n+1}+\ldots$

2422. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots$

2423. $2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}+\ldots$

2424. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$

2425. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)^2}+\ldots$

2426. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt{2}}+\frac{\sqrt[3]{3}}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}+\ldots$

Pomoću D'Alembertova kriterija ispitajte konvergenciju redova:

2427. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}+\ldots$

2428. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}+\ldots$

Pomoću Cauchyjeva kriterija ispitajte konvergenciju redova:

2429. $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+\ldots$

2430. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{3}{8}\right)^5+\ldots+\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}+\ldots$

Ispitajte konvergenciju redova s pozitivnim članovima:

2431. $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$

2432. $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2-1}+\ldots$

2433. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$

2434. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{19}+\ldots+\frac{n^2}{2n^2+1}+\ldots$

2435. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\ldots+\frac{n}{n^2+1}+\ldots$

2436. $\frac{3}{2^2\cdot 3^2}+\frac{5}{3^2\cdot 4^2}+\frac{7}{4^2\cdot 5^2}+\ldots+\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}+\ldots$

2437. $\frac{3}{4}+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\ldots+\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n+\ldots$

2438. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{7}+\left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{3}{2}}+\ldots+\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}+\ldots$

2439. $\frac{1}{e}+\frac{8}{e^2}+\frac{27}{e^3}+\ldots+\frac{n^3}{e^n}+\ldots$

2440. $1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{3^3}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{n^n}+\ldots$

2441. $\frac{1!}{2+1}+\frac{2!}{2^2+1}+\frac{3!}{2^3+1}+\ldots+\frac{n!}{2^n+1}+\ldots$

2442. $1+\frac{2}{1!}+\frac{4}{2!}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots$

2443. $\frac{1}{4}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{4\cdot 8\cdot 12\ldots 4n}+\ldots$

2444. $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\frac{(3!)^2}{6!}+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}+\ldots$

2445. $1000+\frac{1000\cdot 1002}{1\cdot 4}+\frac{1000\cdot 1002\cdot 1004}{1\cdot 4\cdot 7}+\ldots$

$$\ldots+\frac{1000\cdot 1002\cdot 1004\ldots(998+2n)}{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}+\ldots$$

2446. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdot 14\ldots(6n-7)(6n-4)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdot 17\ldots(8n-11)(8n-7)}+\ldots$

2447. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots+\frac{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\ldots(4n-4)(4n-2)}+\ldots$

2448. $\frac{1}{1!}+\frac{1\cdot 11}{3!}+\frac{1\cdot 11\cdot 21}{5!}+\ldots+\frac{1\cdot 11\cdot 21\ldots(10n-9)}{(2n-1)!}+\ldots$

2449. $1+\frac{1\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1\cdot 4\cdot 9}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\ldots+\frac{1\cdot 4\cdot 9\ldots n^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\ldots(4n-3)}+\ldots$

2450. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2451. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$.

2452. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

2453. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2}$.

2454. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

2455. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

2456. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

2457. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}$.

2458. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$.

2459. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

2460. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

2461. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n + \sqrt{\ln^3 n}}$.

2462. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$.

2463. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n}-1)}$.

2464. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

2465. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

2466. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

2467. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

2468*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$.

2469. Dokažite da red $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^q n}$:

1) konvergira za bilo koji q, kada je $p>1$, i za $q>1$, kada je $p=1$.

2) divergira za bilo koji q, kada je $p<1$, i za $q\leqslant 1$, kada je $p=1$.

Ispitajte konvergenciju dalje zadanih redova s članovima promjenljiva predznaka. Kada red konvergira, tada ispitajte da li je ta konvergencija apsolutna ili uvjetna.

2470. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\ldots$

2471. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\ldots$

2472. $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\ldots$

2473. $1-\frac{2}{7}+\frac{3}{13}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}+\ldots$

2474. $\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 4}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}+\ldots$

2475. $-\frac{1}{2}-\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}-\ldots+(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\cdot\frac{n}{2^n}+\ldots$

2476. $-\frac{2}{2\sqrt{2}-1}+\frac{3}{3\sqrt{3}-1}-\frac{4}{4\sqrt{4}-1}+\ldots+(-1)^n\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}+\ldots$

2477. $-\frac{3}{4}+\left(\frac{5}{7}\right)^2-\left(\frac{7}{10}\right)^3+\ldots+(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n+\ldots$

2478. $\frac{3}{2}-\frac{3\cdot 5}{2\cdot 5}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 5\cdot 8}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}+\ldots$

2479. $\frac{1}{7}-\frac{1\cdot 4}{7\cdot 9}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{7\cdot 9\cdot 11}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\ldots(2n+5)}+\ldots$

2480. $\frac{\sin\alpha}{\ln 10}+\frac{\sin 2\alpha}{(\ln 10)^2}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n}+\ldots$

2481. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

2482. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\operatorname{tg}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

2483. Uvjerite se da D'Alembertov kriterij konvergencije ne rješava pitanje o konvergenciji reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, gdje je

$$a_{2k-1}=\frac{2^{k-1}}{3^{k-1}},\qquad a_{2k}=\frac{2^{k-1}}{3^k}\qquad (k=1,\ 2,\ldots),$$

dok pomoću Cauchyjeva kriterija možemo ustanoviti da taj red konvergira.

2484*. Uvjerite se da Leibnizov kriterij nije primjenljiv na alternirane redove a) do d). Istražite koji od tih redova divergiraju, koji konvergiraju uvjetno, a koji konvergiraju apsolutno:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\ldots$

$$\left(a_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{k+1}-1},\quad a_{2k}=-\frac{1}{\sqrt{k+1}+1}\right);$$

b) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^5}+\dots$

$$\left(a_{2k-1}=\frac{1}{2^{k-1}},\quad a_{2k}=-\frac{1}{3^{2k-1}}\right);$$

c) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3^3}+\dots$

$$\left(a_{2k-1}=\frac{1}{2k-1},\quad a_{2k}=-\frac{1}{3^k}\right);$$

d) $\frac{1}{3}-1+\frac{1}{7}-\frac{1}{5}+\frac{1}{11}-\frac{1}{9}+\dots$

$$\left(a_{2k-1}=\frac{1}{4k-1},\quad a_{2k}=-\frac{1}{4k-3}\right).$$

Ispitajte konvergenciju redova s kompleksnim članovima:

2485. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+i)^n}{2^n}$.

2486. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(2i-1)^n}{3^n}$.

2487. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(3+i)^n}$.

2488. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$.

2489. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+i}$.

2490. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$.

2491. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[n+(2n-1)i]^2}$.

2492. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n(2-i)+1}{n(3-2i)-3i}\right]^n$.

2493. Među krivuljama $y=\frac{1}{x^3}$ i $y=\frac{1}{x^2}$ desno od njihova sjecišta konstruirani su odsječci paralelni s osi OY i međusobno jednako udaljeni. Da li je suma duljina tih odsječaka konačna?

2494. Da li će duljina odsječaka iz prethodnog zadatka biti konačna ako krivulju $y=\frac{1}{x^2}$ zamijenite krivuljom $y=\frac{1}{x}$?

2495. Zbrojite redove $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{3^n}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-n}{3^n}$. Da li ta suma konvergira?

2496. Načinite razliku divergentnih redova $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ i ispitajte njezinu konvergenciju.

2497. Da li konvergira red tvoren oduzimanjem reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ od reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$?

2498. Odaberite takva dva reda da njihova suma konvergira, a razlika divergira.

2499. Načinite produkt redova $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ i $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$. Da li taj produkt konvergira?

2500. Načinite red $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\right)^2$. Da li taj red konvergira?

2501. Zadan je red $-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}+\ldots$ Ocijenite moguću pogrešku pri zamjeni sume tog reda sumom prva četiri člana tog reda te sumom prvih pet članova. Šta možete reći o predznacima tih pogrešaka?

2502*. Ocijenite moguću pogrešku pri zamjeni sume reda

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots$$

sumom njegovih prvih n članova.

2503. Ocijenite moguću pogrešku pri zamjeni sume reda

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

sumom njegovih prvih n članova. Napose ocijenite tačnost takvog približenja za $n=10$.

2504.** Ocijenite moguću pogrešku pri zamjeni sume reda

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

sumom njegovih prvih n članova. Napose ocijenite tačnost takvog približenja za $n=1000$.

2505*. Ocijenite moguću pogrešku pri zamjeni sume reda

$$1+2\left(\frac{1}{4}\right)^2+3\left(\frac{1}{4}\right)^4+\ldots+n\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}+\ldots$$

sumom njegovih prvih n članova.

2506. Koliko članova reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ treba uzeti da se njegova suma izračuna s tačnošću do 0,01? do 0,001?

2507. Koliko članova reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)\,5^n}$ treba uzeti, da se izračuna njegova suma s tačnošću do 0,01? do 0,001? do 0,0001?

2508*. Nađite sumu reda $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

2509. Nađite sumu reda

$$\sqrt[3]{x}+(\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{x})+(\sqrt[7]{x}-\sqrt[5]{x})+\ldots+(\sqrt[2k+1]{x}-\sqrt[2k-1]{x})+\ldots$$

2. Redovi funkcija

1°. Područje konvergencije. Skup vrijednosti argumenata x za koje red funkcija

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots \tag{1}$$

konvergira, nazivamo *područjem konvergencije* tog reda. Funkciju

$$S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x),$$

gdje je $S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$, a x pripada području konvergencije, nazivamo *sumom* reda, a $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ *ostatkom* reda.

U jednostavnijim slučajevima je za određivanje područja konvergencije reda (1) dovoljno primijeniti na taj red poznate kriterije konvergencije, smatrajući x fiksiranim.

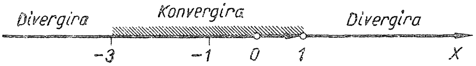
Primjer 1. Odredite područje konvergencije reda

$$\frac{x+1}{1\cdot 2}+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}+\ldots \tag{2}$$

Rješenje. Označimo sa u_n opći član reda, pa ćemo imati:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{n+1}2^n n}{2^{n+1}(n+1)\,|x+1|^n}=\frac{|x+1|}{2}.$$

Na osnovu D'Alembertova kriterija možemo ustanoviti da red konvergira (i to apsolutno), ako je $\frac{|x+1|}{2}<1$, tj. za $-3<x<1$; red divergira ako je $\frac{|x+1|}{2}>1$, tj. ako je $-\infty<x<-3$ ili $1<x<\infty$ (sl. 104). Za $x=1$ dobijemo harmonijski red $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ koji divergira,



Slika 104.

a za $x=-3$ red $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots$ koji (prema Leibnizovom kriteriju) konvergira (uvjetno). Red dakle konvergira za $-3\leqslant x<1$.

2°. Redovi potencija. Za svaki *red potencija*

$$c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots+c_n(x-a)^n+\ldots \tag{3}$$

(c_n i a su realni brojevi) postoji takav interval (*interval konvergencije*) $|x-a|<R$ sa središtem u tački $x=a$, unutar kojega red (3) konvergira apsolutno; za $|x-a|>R$ red divergira. *Polumjer konvergencije* R može u specijalnim slučajevima biti i 0 ili ∞. U završnim tačkama intervala konvergencije $x=a\pm R$ moguća je kako konvergencija tako i divergencija reda potencija. Interval konvergencije određuje se obično pomoću D'Alembertova ili Cauchyjeva kriterija primjenjujući ih na red kojem su članovi apsolutne vrijednosti članova zadanog reda (3).

Primjenom na red apsolutnih vrijednosti

$$|c_0|+|c_1|\,|x-a|+\ldots+|c_n|\,|x-a|^n+\ldots$$

D'Alembertova i Cauchyjeva kriterija konvergencije dobivamo za polumjer konvergencije reda potencija (3) pripadne formule

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}\qquad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

No upotreba tih formula zahtijeva oprez zbog toga što limesi s desnih strana tih formula često ne postoje. Tako npr. ako ima neizmjerno mnogo koeficijenata c_n koji su jednaki nuli (to je napose ispunjeno u slučaju kada red ima samo članove s parnim potencijama ili samo s neparnim potencijama od $(x-a)$), nije moguće primijeniti te formule. U vezi s time preporuča se za određivanje intervala konvergencije primijeniti D'Alembertov ili Chauchyjev kriterij neposredno, kako je to učinjeno prije prilikom razmatranja reda (2), gdje nisu upotrijebljene opće formule za polumjer konvergencije.

Ako je $z=x+iy$ kompleksna varijabla, onda za red potencija

$$c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots \tag{4}$$

($c_n=a_n+ib_n$, $z_0=x_0+iy_0$) postoji neki krug (*krug konvergencije*) $|z-z_0|<R$ sa središtem u tački $z=z_0$ unutar kojeg red konvergira apsolutno; za $|z-z_0|>R$ red divergira. U tačkama koje leže na samom rubu kruga konvergencije red (4) može ili konvergirati ili divergirati.

Krug konvergencije obično se određuje pomoću D'Alembertovog ili Cauchyjevog kriterija primijenjenih na red

$$|c_0|+|c_1|\cdot|z-z_0|+|c_2|\cdot|z-z_0|^2+\ldots+|c_n|\cdot|z-z_0|^n+\ldots,$$

kojemu su članovi moduli članova zadanog reda. Tako na primjer pomoću D'Alembertovog kriterija lako možemo ustanoviti da je krug konvergencije reda

$$\frac{z+1}{1\cdot 2}+\frac{(z+1)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(z+1)^3}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{(z+1)^n}{n\cdot 2^n}+\ldots$$

određen nejednadžbom $|z+1|<2$ (dovoljno je ponoviti ono što je navedeno na str. 295, a što je služilo za određivanje intervala konvergencije reda (2), zamijenivši samo x sa z). Središte kruga konvergencije nalazi se u tački $z=-1$, a polumjer R tog kruga (polumjer konvergencije) iznosi 2.

3°. Jednolika (uniformna) konvergencija. Red funkcija (1) konvergira u nekom intervalu jednoliko ako za bilo koji $\varepsilon>0$ možemo naći takav N koji ne ovisi o x, da uz $n>N$ za sve x iz zadanog područja vrijedi nejednadžba $|R_n(x)|<\varepsilon$, gdje je $R_n(x)$ ostatak zadanog reda.

Ako je $|f_n(x)|\leqslant c_n$ ($n=1, 2, \ldots$) za $a\leqslant x\leqslant b$ i red brojeva $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergira, onda red funkcija (1) konvergira u intervalu $[a, b]$ apsolutno i jednoliko (*Weierstrassov kriterij*).

Red potencija (3) konvergira apsolutno i jednoliko u svakom intervalu unutar područja konvergencije. Red potencija (3) moguće je član po član derivirati i integrirati unutar njegova područja konvergencije (kada je $|x-a|<R$), tj. ako je

$$c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots+c_n(x-a)^n+\ldots=f(x), \tag{5}$$

onda za svaki x iz područja konvergencije reda (3) imamo

$$c_1+2c_2(x-a)+\ldots+nc_n(x-a)^{n-1}+\ldots=f'(x), \tag{6}$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} c_0\,dx+\int\limits_{x_0}^{x} c_1(x-a)\,dx+\int\limits_{x_0}^{x} c_2(x-a)^2\,dx+\ldots+\int\limits_{x_0}^{x} c_n(x-a)^n\,dx+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}-(x_0-a)^{n+1}}{n+1}=\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx \tag{7}$$

(broj x_0 također pripada području konvergencije reda (3)). Pri tome redovi (6) i (7) imaju isto područje konvergencije kao i red (3).

Nađite područje konvergencije reda:

2510. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$.

2511. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^x}$.

2512. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\ln x}}$.

2513. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

2514. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\sin\frac{x}{3^n}$.

2515.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{e^{nx}}$.

2516. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}e^{-n\sin x}$.

2517. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$.

2518. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!x^n}$.

2519. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)x^n}$.

2520. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$.

2521. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^5x^{2n}}$.

2522. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n(x-5)^n}$.

2523. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{x^{n^n}}$.

2524*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^n+\frac{1}{2^nx^n}\right)$.

2525. $\sum\limits_{n=-1}^{\infty}x^n$.

Nadite područje konvergencije reda potencija i ispitajte konvergenciju na krajevima intervala konvergencije:

2526. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$.

2527. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$.

2528. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

2529. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$.

2530. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$.

2531. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^5x^{2n}}{2n+1}$.

2532. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^2x^n$.

2533. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

2534. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!x^n$.

2535. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$.

2536. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}x^n$.

2537. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^{n^2}x^{n^2}$.

2538. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$.

2539. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$.

2540. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n\cdot\ln n}$.

2541. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n!}$.

2542.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!x^{n!}$.

2543*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^{n-1}n^n}$.

2544*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^n}}{n^n}$.

2545. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n\cdot 3^n}$.

2546. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$.

2547. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$.

2548. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{2n}$

2549. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$.

2550. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n(x+3)^n$.

2551. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$.

2552. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)\,2^n}$.

2553. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$.

2554. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}$.

2555. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

2556. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$.

2557. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

2558. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$.

2559*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n$.

2560. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^{n-1}\cdot n^n}$.

2561. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$.

2562. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2\,2^{n+1}}$.

2563. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n\frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$.

Odredite krug konvergencije:

2564. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} i^n z^n$.

2565. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1+ni)\,z^n$.

2566. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n\cdot 3^n}$.

2567. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n}$.

2568. $(1+2i)+(1+2i)(3+2i)z+\ldots+(1+2i)(3+2i)\ldots(2n+1+2i)z^n+\ldots$.

2569. $1+\frac{z}{1-i}+\frac{z^2}{(1-i)(1-2i)}+\ldots+\frac{z^n}{(1-i)(1-2i)\ldots(1-ni)}+\ldots$.

2570. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+2ni}{n+2i}\right)^n z^n$.

2571. Polazeći od definicije jednolike konvergencije dokažite da red

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

ne konvergira jednoliko u intervalu $(-1, 1)$, ali da konvergira jednoliko u svakom intervalu unutar tog područja.

Rješenje. Primijenivši formulu za zbroj geometrijskog reda dobit ćemo za $|x|<1$

$$R_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Uzmimo u području $(-1, 1)$ interval $[-1+\alpha, 1-\alpha]$ gdje je α po volji malen pozitivan broj. U tom intervalu je $|x| \leqslant 1-\alpha$, $|1-x| \geqslant \alpha$ i prema tome je

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{\alpha}.$$

Da dokažemo jednoliku konvergenciju zadanog reda u intervalu $[-1+\alpha, (1-\alpha)]$, dovoljno je pokazati da za po volji odabrani $\varepsilon > 0$ možemo odabrati takav N koji ovisi samo o ε, da za svaki $n > N$ vrijedi nejednadžba $|R_n(x)| < \varepsilon$ za svaki x u promatranom intervalu

Uzevši po volji odabrano $\varepsilon > 0$ treba da je $\frac{(1-\alpha)^{n+1}}{\alpha} < \varepsilon$; Odatle je $(1-\alpha)^{n+1} < \varepsilon\alpha$, $(n+1)\ln(1-\alpha) < \ln(\varepsilon\alpha)$, tj. $n+1 > \frac{\ln(\varepsilon\alpha)}{\ln(1-\alpha)}$ (jer je $\ln(1-\alpha) < 0$ i $n > \frac{\ln(\varepsilon\alpha)}{\ln(1-\alpha)} - 1$.

Stavivši prema tome $N = \frac{\ln(\varepsilon\alpha)}{\ln(1-\alpha)} - 1$, uvjerit ćemo se da je uz $n > N$ zaista $|R_n(x)| < \varepsilon$ za svaki x iz intervala $[-1+\alpha, 1-\alpha)$, i jednolika konvergencija zadanog reda u bilo kojem odsječku unutar intervala $(-1, 1)$ time je dokazana.

Što se tiče cijelog intervala $(-1, 1)$, on obuhvaća tačke koje su po volji blizu tački $x=1$, a kako je $\lim\limits_{x\to 1} R_n(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \infty$, tada za bilo kako veliki n ima tačaka x za koje je $R_n(x)$ veći od po volji odabranog bilo kako velikog broja. Prema tome, nemoguće je odabrati takav N da bi za $n > N$ nejednadžba $|R_n(x)| < \varepsilon$ vrijedila za sve tačke intervala $(-1, 1)$, a to znači da konvergencija reda u intervalu $(-1, 1)$ nije jednolika.

2572. Polazeći od definicije jednolike konvergencije dokažite da:

a) red $$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

konvergira jednoliko u svakom konačnom intervalu;

b) red $$\frac{x^2}{1}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n}+\ldots$$

konvergira jednoliko u čitavom intervalu konvergencije $(-1, 1)$;

c) red $$1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots$$

konvergira jednoliko u području $(1+\delta, \infty)$, gdje je δ po volji odabran pozitivan broj;

d) red $(x^2-x^4)+(x^4-x^6)+(x^6-x^8)+\ldots+(x^{2n}-x^{2n+2})+\ldots$

konvergira ne samo unutar intervala $(-1, 1)$ nego i na krajevima toga intervala, ali je konvergencija reda u intervalu $(-1, 1)$ nejednolika.

Dokažite jednoliku konvergenciju reda funkcija u zadanim intervalima:

2573. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ na odsječku $[-1; 1]$.

2574. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ na cijelom brojnom pravcu.

2575. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ na odsječku $[0, 1]$.

Primijenivši deriviranje i integriranje član po član, nađite sume redova:

2576. $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$

2577. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$

2578. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$

2579. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$

2580. $1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n+\ldots$

2581. $1-3x^2+5x^4-\ldots+(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}+\ldots$

2582. $1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\ldots+n(n+1)x^{n-1}+\ldots$

Nađite sume redova:

2583. $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\ldots+\frac{n}{x^n}+\ldots$

2584. $x+\frac{x^5}{5}+\frac{x^9}{9}+\ldots+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\ldots$

2585*. $1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\,3^{n-1}}+\ldots$

2586. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$

3. Taylorov red

1°. Razvoj funkcije u red potencija. Ako funkcija $f(x)$ dopušta u nekoj okolini $|x-a|<R$ tačke a razvoj u red potencija po potencijama od $x-a$, onda taj red (*Taylorov red*) glasi

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \tag{1}$$

Za $a=0$ Taylorov red nazivamo također *Maclaurinov red*. Jednadžba (1) vrijedi ako za $|x-a|<R$ *ostatak* Taylorova reda

$$R_n(x)=f(x)-\left[f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]\to 0$$

kad $n\to\infty$.

Za ocjenu ostatka možemo se poslužiti formulom

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[a+\theta_n(x-a)], \tag{2}$$

gdje je $0<\theta_n<1$ (*Lagrangeova formula*).

Primjer 1. Razvijmo funkciju $f(x)=\text{ch}$ u red po potencijama x.

Rješenje. Nađemo derivacije zadane funkcije $f(x)=\text{ch}\,x$, $f'(x)=\text{sh}\,x$, $f''(x)=\text{ch}\,x$, $f'''(x)=\text{sh}\,x, \ldots$; općenito $f^{(n)}(x)=\text{ch}\,x$, kada je n paran, a $f^{(n)}(x)=\text{sh}\,x$ kada je n neparan. Stavivši $a=0$ dobivamo $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=1$, $f'''(0)=0, \ldots$; općenito $f^{(n)}(0)=1$ kada je n paran, a $f^{(n)}(0)=0$, kada je n neparan. Odatle na osnovu (1) imamo:

$$\text{ch}\,x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \tag{3}$$

Da odredimo područje konvergencije reda (3) primijenit ćemo D'Alembertov kriterij. Imamo:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}:\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}=0$$

za po volji odabrani x. Prema tome red konvergira u intervalu $-\infty<x<\infty$. Ostatak prema formuli (2) glasi

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\text{ch}\,\theta x, \text{ ako je } n \text{ neparan, i}$$

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\text{sh}\,\theta x, \text{ ako je } n \text{ paran.}$$

Kako je $0<\theta<1$, to je

$$|\text{ch}\,\theta x|=\frac{e^{\theta x}+e^{-\theta x}}{2}\leqslant e^{|x|}, \quad |\text{sh}\,\theta x|=\left|\frac{e^{\theta x}+e^{-\theta x}}{2}\right|\leqslant e^{|x|}$$

i prema tome $|R_n(x)|\leqslant\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}$. Red s općim članom $\dfrac{|x|^n}{n!}$ konvergira za bilo koji x (u to se možemo lako uvjeriti pomoću D'Alembertova kriterija) pa je u suglasnosti s nužnim uvjetom konvergencije

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0,$$

a prema tome i $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ za po volji odabrani x. To znači da je suma reda (3) za bilo koji x zaista jednaka $\text{ch}\,x$.

2°. Postupci kojima se služimo pri razvoju u red potencija.

Služimo li se osnovnim razvojima

$$\text{I.}\quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$\text{II.}\quad \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$\text{III.}\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$\text{IV.}\quad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad (-1 < x < 1)^{*}),$$

$$\text{V.}\quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad (-1 < x \leqslant 1),$$

možemo u mnogim slučajevima jednostavno provesti razvoj zadane funkcije u red potencija, pri čemu otpada potreba ispitivanja ostatka. Ponekad je pri razvoju korisno derivirati ili integrirati član po član. Pri razvoju u red potencija racionalnih funkcija preporuča se rastaviti te funkcije na parcijalne razlomke.

Primjer 2. Razvijte po nenegativnim potencijama od x**) funkciju

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}.$$

Rješenje. Rastavimo funkciju na parcijalne razlomke, pa ćemo imati

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x}.$$

Kako je

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{4}$$

$$\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + (2x)^2 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n, \tag{5}$$

to konačno dobijemo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n 2^{n+1}]\, x^n. \tag{6}$$

Geometrijske progresije (4) i (5) konvergiraju kada je $|x| < 1$ odnosno $|x| < \frac{1}{2}$; prema tome formula (6) vrijedi za $|x| < \frac{1}{2}$, tj. kada je $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

---

*) Na granicama intervala konvergencije (tj. za $x = -1$ i za $x = 1$) razvoj IV ponaša se ovako: za $m > 0$ vrijedi apsolutna konvergencija na obje granice; za $0 > m > -1$ razvoj divergira za $x = -1$ a uvjetno konvergira za $x = 1$; za $m \leqslant -1$ divergira na obje granice.

**) Ovdje i nadalje ćemo podrazumijevati „po cijelim i pozitivnim potencijama“.

3°. Taylorov red za funkcije dviju varijabli. Razvoj beskonačno mnogo puta derivabilne funkcije dviju varijabli $f(x,y)$ u *Taylorov red* u okolini tačke $(a;b)$ glasi

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]f(a,b)+\frac{1}{2!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(a,b)+\ldots+\frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a,b)+\ldots \quad (7)$$

Ako je $a=b=0$ Taylorov red nazivamo također i *Maclaurinov red*. Ovdje su upotrijebljene ove oznake:

$$\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]f(a,b)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=a\\ y=b}}(x-a)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Bigg|_{\substack{x=a\\ y=b}}(y-b);$$

$$\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(a,b)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\Bigg|_{\substack{x=a\\ y=b}}(x-a)^2+$$

$$+2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}\Bigg|_{\substack{x=a\\ y=b}}(x-a)(y-b)+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\Bigg|_{\substack{x=a\\ y=b}}(y-b)^2 \quad \text{itd.}$$

Razvoj (7) vrijedi kada ostatak reda

$$R_n(x,y)=f(x,y)-\left\{f(a,b)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^k f(a,b)\right\}\to 0$$

kada $n\to\infty$. Ostatak možemo predočiti u obliku

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(x,y)\Bigg|_{\substack{x=a+\theta(x-a)\\ y=b+\theta(y-b)}},$$

gdje je $0<\theta<1$.

Razvijte po cijelim ne negativnim potencijama od x navedene funkcije, nađite intervale konvergencije dobivenih redova i ispitajte ponašanje njihovih ostataka:

2587. $a^x\,(a>0)$. **2588.** $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. **2589.** $\cos(x+a)$.

2590. $\sin^2 x$. **2591*.** $\ln(2+x)$.

Koristeći se osnovnim razvojima I do V napišite razvoj po potencijama od x ovih funkcija i odredite intervale konvergencije redova:

2592. $\frac{2x-3}{(x-1)^2}$. **2593.** $\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$.

2594. xe^{-2x}. **2595.** e^{x^2}.

2596. $\operatorname{sh} x$.

2597. $\cos 2x$.

2598. $\cos^2 x$.

2599. $\sin 3x + x\cos 3x$.

2600. $\dfrac{x}{9+x^2}$.

2601. $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

2602. $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

2603. $\ln(1+x-2x^2)$.

Primjenom deriviranja razvijte po potencijama od x ove funkcije i odredite intervale u kojima ti razvoji vrijede:

2604. $(1+x)\ln(1+x)$.

2605. $\operatorname{arctg} x$.

2606. $\arcsin x$.

2607. $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Na razne načine razvijte po potencijama od x zadane funkcije i odredite intervale u kojima ti razvoji vrijede:

2608. $\sin^2 x\cos^2 x$.

2609. $(1+x)e^{-x}$.

2610. $(1+e^x)^3$.

2611. $\sqrt[3]{8+x}$.

2612. $\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-5x+6}$.

2613. $\operatorname{ch}^3 x$.

2614. $\dfrac{1}{4-x^4}$.

2615. $\ln(x^2+3x+2)$.

2616. $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$.

2617. $\int_0^x e^{-x^2}\,dx$.

2618. $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+x)\,dx}{x}$.

2619. $\displaystyle\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Napišite tri prva člana, različita od nule, razvoja u red po potencijama od x funkcija:

2620. $\operatorname{tg} x$.

2621. $\operatorname{th} x$.

2622. $e^{\cos x}$.

2623. $\sec x$.

2624. $\ln\cos x$.

2625. $e^x\sin x$.

2626*. Pokažite da se za računanje duljine elipse možete poslužiti približnom formulom

$$s \approx 2\pi a\left(1-\frac{\varepsilon^2}{4}\right),$$

gdje je ε ekscentricitet a $2a$ velika os elipse.

2627. Teška nerastezljiva nit se pod djelovanjem vlastite mase provjesi po lančanici $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ pri čemu je $a = \frac{H}{q}$, gdje je H horizontalna napetost niti a q masa po jedinici duljine. Pokažite da za mali x, s tačnošću do veličine reda x^4, možete uzeti da se nit provjesi po paraboli $y = a + \frac{x^2}{2a}$.

2628. Razvijte funkciju $x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ u red po potencijama od $x+4$.

2629. $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x + 2$. Razvijte $f(x+h)$ u red po potencijama od h.

2630. Razvijte $\ln x$ u red po potencijama od $x-1$.

2631. Razvijte $\frac{1}{x}$ u red po potencijama od $x-1$.

2632. Razvijte $\frac{1}{x^2}$ u red po potencijama od $x+1$.

2633. Razvijte $\frac{1}{x^2+3x+2}$ u red po potencijama od $x+4$.

2634. Razvijte $\frac{1}{x^2+4x+7}$ u red po potencijama od $x+2$.

2635. Razvijte e^x u red po potencijama od $x+2$.

2636. Razvijte $\sqrt{x}$ u red po potencijama od $x-4$.

2637. Razvijte $\cos x$ u red po potencijama od $x - \frac{\pi}{2}$.

2638. Razvijte $\cos^2 x$ u red po potencijama od $x - \frac{\pi}{4}$.

2639*. Razvijte $\ln x$ u red po potencijama od $\frac{1-x}{1+x}$.

2640. Razvijte $\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ u red po potencijama od $\frac{x}{1+x}$.

2641. Kakva je vrijednost dopuštene pogreške ako stavimo da je približno

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}?$$

2642. Kako tačno ćete izračunati broj $\frac{\pi}{4}$, ako se poslužite redom

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots,$$

uzevši sumu njegovih prvih pet članova za $x=1$?

2643*. Izračunajte broj $\frac{\pi}{6}$ s tačnošću do 0,001 pomoću razvoja u red po potencijama od x funkcije $\arcsin x$ (vidite primjer 2606).

2644. Koliko morate uzeti članova reda

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots,$$

da izračunate cos 18° s tačnošću do 0,001?

2645. Koliko morate uzeti članova reda

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

da izračunate sin 15° s tačnošću do 0,0001?

2646. Koliko morate uzeti članova reda

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots,$$

da nađete broj e s tačnošću do 0,0001?

2647. Koliko morate uzeti članova reda

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots,$$

da izračunate ln 2 s tačnošću do 0,01 ? do 0,001?

2648. Izračunajte $\sqrt[3]{7}$ s tačnošću do 0,01 pomoću razvoja funkcije $\sqrt[3]{8+x}$ u red po potencijama od x.

2649. Objasnite postanak približne formule $\sqrt{a^2+x} \approx a + \frac{x}{2a}$ $(a>0)$ i pomoću nje izračunajte $\sqrt{23}$ uvrstivši da je $a=5$, te ocijenite pri tome moguću pogrešku.

2650. Izračunajte $\sqrt[4]{19}$ s tačnošću do 0,001.

2651. Za koje vrijednosti x približna formula

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

daje pogrešku koja nije veća od 0,01? 0,001? 0,0001?

2652. Za koje vrijednosti x približna formula

$$\sin x \approx x$$

daje pogrešku koja nije veća od 0,01? 0,001?

2653. Izračunajte $\int\limits_0^{1/2} \frac{\sin x}{x} dx$ s tačnošću do 0,0001.

2654. Izračunajte $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$ s tačnošću do 0,0001.

2655. Izračunajte $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x\,dx$ s tačnošću do 0,001.

2656. Izračunajte $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ s tačnošću do 0,001.

2657. Izračunajte $\int\limits_0^{1/4} \sqrt{1+x^3}\,dx$ s tačnošću do 0,0001.

2658. Izračunajte $\int\limits_0^{1/9} \sqrt{x}e^x\,dx$ s tačnošću do 0,001.

2659. Razvijte u red po potencijama od x i y funkciju $\cos(x-y)$, nađite područje konvergencije dobivenog reda i ispitajte ostatak.

Napišite razvoje po potencijama od x i y ovih funkcija i odredite područja konvergencija redova:

2660. $\sin x \cdot \sin y$.

2661. $\sin(x^2+y^2)$.

2662*. $\frac{1-x+y}{1+x-y}$.

2663*. $\ln(1-x-y+xy)$.

2664*. $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

2665. $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$. Razvijte $f(x+h,\ y+k)$ po potencijama od h i k.

2666. $f(x,y)=x^3-2y^3+3xy$. Nađite prirast te funkcije pri prijelazu od vrijednosti $x=1$, $y=2$ na vrijednosti $x=1+h$, $y=2+k$.

2667. Razvijte funkciju e^{x+y} po potencijama od $x-2$ i $y+2$.

2668. Razvijte funkciju $\sin(x+y)$ po potencijama od x i $y-\frac{\pi}{2}$.

Napišite tri, četiri prva člana razvoja u red po potencijama od x i y funkcija:

2669. $e^x\cos y$.

2670. $(1+x)^{1+y}$.

4. Fourierovi redovi

1°. Dirichletov teorem. Kažemo da funkcija $f(x)$ zadovoljava *Dirichletove uvjete* u intervalu (a, b) ako je u tom intervalu funkcija

1) jednoliko ograđena, tj. $|f(x)| \leq M$ za $a<x<b$, gdje je M konstanta;
2) nema više od konačnog broja tačaka prekinutosti, a one su sve prve vrsti (tj. u svakoj tački prekinutosti ξ funkcije $f(x)$ postoji konačan lijevi limes $f(\xi-0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(\xi-\varepsilon)$ i konačan desni limes $f(\xi+0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(\xi+\varepsilon)\,(\varepsilon>0)$);
3) ima najviše konačan broj tačaka strogog ekstrema.

Dirichletov teorem utvrđuje da funkcija $f(x)$ koja u intervalu $(-\pi, \pi)$ zadovoljava Dirichletove uvjete, u svakoj tački x tog intervala u kojoj je $f(x)$ neprekinuta možemo razviti u trigonometrijski *Fourierov red*:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots$$

$$\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots, \qquad (1)$$

gdje se *Fourierovi koeficijenti* a_n i b_n računaju po formulama

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \, (n = 0, 1, 2, \ldots); \; b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \, (n = 1, 2, \ldots).$$

Ako je x iz intervala $(-\pi, \pi)$ tačka prekinutosti funkcije $f(x)$, onda je suma Fourierova reda $S(x)$ jednaka aritmetičkoj sredini lijevih i desnih limesa funkcije:

$$S(x) = \frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)].$$

Na krajevima intervala $x = -\pi$ i $x = \pi$

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2} [f(-\pi+0) + f(\pi-0)].$$

2°. Nepotpuni Fourierovi redovi: Ako je funkcija $f(x)$ parna (tj. $f(-x) = f(x)$) onda je u formuli (1)

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ako je funkcija $f(x)$ neparna (tj. $f(-x) = -f(x)$), onda je $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ i

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Funkcija zadana u intervalu $(0, \pi)$ može po našoj volji biti produžena u interval $(-\pi, 0)$ bilo kao parna, bilo kao neparna, prema tome možemo je po želji razviti u intervalu $(0, \pi)$ u nepotpuni Fourierov red po sinusima ili po kosinusima višestrukih lukova.

3°. Fourierov red perioda 2 *l*. Ako funkcija $f(x)$ zadovoljava Dirichletove uvjete u nekom intervalu $(-l, l)$ duljine $2l$, onda u tačkama neprekinutosti funkcije koje pripadaju tom intervalu vrijedi razvoj

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \ldots$$
$$\ldots + a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} + \ldots,$$

gdje je

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

U tačkama prekinutosti funkcije $f(x)$ i na rubovima $x = \pm l$ intervala suma Fourierova reda određuje se analogno kao pri razvoju u intervalu $(-\pi, \pi)$.

Kada se funkcija $f(x)$ razvija u Fourierov red u po volji odabranom intervalu $(a, a+2l)$ duljine $2l$, granice integriranja u formulama (2) treba zamijeniti sa a i $a+2l$.

Dalje navedene funkcije razvijte u Fourierov red u intervalu $(-\pi, \pi)$, odredite sumu reda u tačkama prekinutosti i na krajevima intervala ($x=-\pi$, $x=\pi$), konstruirajte graf te funkcije i sume odgovarajućeg reda (također i izvan intervala $(-\pi, \pi)$):

2671. $f(x)=\begin{cases} c_1 & \text{za } -\pi<x\leqslant 0, \\ c_2 & \text{za } 0<x<\pi. \end{cases}$

Razmotrite specijalni slučaj kada je $c_1=-1$, $c_2=1$.

2672. $f(x)=\begin{cases} ax & \text{za } -\pi<x\leqslant 0, \\ bx & \text{za } 0\leqslant x<\pi. \end{cases}$

Razmotrite specijalne slučajeve: a) $a=b=1$; b) $a=-1$, $b=1$; c) $a=0$, $b=1$, d) $a=1$, $b=0$.

2673. $f(x)=x^2$.

2674. $f(x)=e^{ax}$.

2675. $f(x)=\sin ax$.

2676. $f(x)=\cos ax$.

2677. $f(x)=\operatorname{sh} ax$.

2678. $f(x)=\operatorname{ch} ax$.

2679. Funkciju $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ razvijte u Fourierov red u intervalu $(0, 2\pi)$.

2680. Razvijte u intervalu $(0, \pi)$ po sinusima višestrukih lukova funkciju $f(x)=\dfrac{\pi}{4}$. Dobiveni razvoj upotrijebite za sumiranje redova brojeva:

a) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\ldots$; b) $1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\ldots$;

c) $1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}-\ldots$

Dalje navedene funkcije razvijte u intervalu $(0, \pi)$ u nepotpune Fourierove redove: a) po sinusima višestrukih lukova; b) po kosinusima višestrukih lukova. Nacrtajte grafove funkcija i grafove suma pripadnih redova u području njihove egzistencije.

2681. $f(x)=x$. Nađite pomoću dobivenog razvoja sumu reda

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$$

2682. $f(x)=x^2$. Nađite pomoću dobivenog razvoja sumu redova brojeva

1) $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots$, 2) $1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+\ldots$

2683. $f(x)=e^{ax}$.

2684. $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{za } 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{za } \dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\pi. \end{cases}$

2685. $f(x)=\begin{cases} x & \text{za } 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}, \\ \pi-x & \text{za } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

Razvijte u intervalu $(0, \pi)$ po sinusima višestrukih lukova funkcije:

2686. $f(x)=\begin{cases} x & \text{za } 0<x\leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{za } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

2687. $f(x)=x(\pi-x)$.

2688. $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$.

Razvijte u intervalu $(0, \pi)$ po kosinusima višestrukih lukova funkcije:

2689. $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{za } 0<x\leqslant h, \\ 0 & \text{za } h<x<\pi. \end{cases}$

2690. $f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{x}{2h} & \text{za } 0<x\leqslant 2h, \\ 0 & \text{za } 2h<x<\pi. \end{cases}$

2691. $f(x)=x\sin x$.

2692. $f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{za } 0<x\leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ -\cos x & \text{za } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

2693. Primjenom razvoja funkcija x i x^2 u intervalu $(0, \pi)$ po kosinusima višestrukih lukova (vidi zadatke br. 2681, 2682), dokažite jednadžbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12} \quad (0\leqslant x\leqslant\pi).$$

2694.** Dokažite da kada je funkcija $f(x)$ parna, a pri tom je $f\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$, tada njen Fourierov red u intervalu $(-\pi, \pi)$ predočuje razvoj po kosinusima neparnih višestrukih lukova, a kada je funkcija $f(x)$ neparna i $f\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ tada se ona razvija u intervalu $(-\pi, \pi)$ po sinusima neparnih višestrukih lukova.

U navedenim intervalima razvijte u Fourierov red funkcije:

2695. $f(x)=|x| \quad (-1<x<1)$.

2696. $f(x)=2x \quad (0<x<1)$.

2697. $f(x)=e^x \quad (-l<x<l)$.

2698. $f(x)=10-x \quad (5<x<15)$.

Razvijte u navedenim intervalima u nepotpune Fourierove redove:

a) po sinusima višestrukih lukova i b) po kosinusima višestrukih lukova ove funkcije:

2699. $f(x)=1 \quad (0<x<1)$.

2700. $f(x)=x \quad (0<x<l)$.

2701. $f(x)=x^2 \quad (0<x<2\pi)$.

2702. $f(x)=\begin{cases} x & \text{za } 0<x\leqslant 1, \\ 2-x & \text{za } 1<x<2. \end{cases}$

2703. Razvijte po kosinusima višestrukih lukova u intervalu $\left(\dfrac{3}{2}, 3\right)$ funkciju

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{za } \dfrac{3}{2}<x\leqslant 2, \\ 3-x & \text{za } 2<x<3. \end{cases}$$

GLAVA IX

DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

1. Provjera rješenja. Sastavljanje diferencijalnih jednadžbi porodica krivulja. Početni uvjeti

1°. Osnovni pojmovi. Jednadžbu oblika

$$F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ \overset{(n)}{y}) = 0, \tag{1}$$

gdje je F zadana funkcija i $y = (x)$ tražena funkcija, nazivamo *diferencijalnom jednadžbom n-tog reda*. Svaku funkciju $y = \varphi(x)$ koja jednadžbu (1) prevodi u identitet, nazivamo *rješenjem* te jednadžbe, a graf te funkcije *integralnom krivuljom*. Ako je rješenje zadano implicitno $\Phi(x, y) = 0$ tada ga obično nazivamo *integralom*.

Primjer 1. Provjerimo da li je funkcija $y = \sin x$ rješenje jednadžbe

$$y'' + y = 0.$$

Rješenje. Imamo

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x$$

i prema tome

$$y'' + y = -\sin x + \sin x \equiv 0.$$

Integral

$$\Phi(x,\ y,\ C_1,\ \ldots,\ C_n) = 0 \tag{2}$$

diferencijalne jednadžbe (1) koji ima n nezavisnih po volji odaberivih konstanti $C_1, \ldots, C_n$ i ekvivalentan je (u zadanom području) jednadžbi (1), nazivamo *općim integralom* te jednadžbe (u pripadnom području). Dajući u relaciji (2) konstantama $C_1, \ldots, C_n$ određene vrijednosti, dobivamo *partikularni integral* jednadžbe (1).

Obrnuto, kada imamo porodicu krivulja (2) i eliminiramo parametre $C_1, \ldots, C_n$ iz sistema jednadžbi

$$\Phi = 0, \quad \frac{d\Phi}{dx} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{d^n\Phi}{dx^n} = 0,$$

dobivamo općenito diferencijalnu jednadžbu oblika (1) kojoj je opći integral u pripadnom području relacija (2).

Primjer 2. Nađimo diferencijalnu jednadžbu porodice parabola

$$y = C_1(x - C_2)^2. \tag{3}$$

Rješenje. Derivirajmo dva puta jednadžbu (3) pa ćemo imati

$$y' = 2C_1(x - C_2) \quad \text{i} \quad y'' = 2C_1. \tag{4}$$

Iz jednadžbi (3) i (4) eliminiramo parametre C_1 i C_2 pa dobijemo traženu diferencijalnu jednadžbu

$$2yy'' = y'^2.$$

Lako možemo provjeriti da funkcija (3) prevodi tu jednadžbu u identitet.

2°. **Početni uvjeti.** Ako su za traženo partikularno rješenje $y = y(x)$ diferencijalne jednadžbe

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{5}$$

gdje je f funkcija definirana u okolini tačke $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$, zadani *početni uvjeti* (*Cauchyjev problem*)

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

i poznato je *opće rješenje* jednadžbe (5)

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n),$$

onda se po volji odaberive konstante $C_1, \ldots, C_n$ određuju, ako je to moguće, iz sistema jednadžbi

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \varphi(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ y'_0 &= \varphi'(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)} &= \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, \ldots, C_n). \end{aligned}\right\}$$

Primjer 3. Nađimo krivulju porodice

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}, \tag{6}$$

za koju je $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

Rješenje. Imamo:

$$y' = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}. \tag{7}$$

Stavimo li u formulama (6) i (7) $x = 0$, dobit ćemo

$$1 = C_1 + C_2, \quad -2 = C_1 - 2C_2,$$

odakle je

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1$$

i, prema tome,

$$y = e^{-2x}.$$

Istražite, da li su navedene funkcije rješenja zadanih diferencijalnih jednadžbi:

2704. $xy' = 2y, \quad y = 5x^2.$

2705. $y'' = x^2 + y^2, \quad y = \dfrac{1}{x}.$

2706. $(x+y)\,dx + x\,dy = 0, \quad y = \dfrac{C^2 - x^2}{2x}.$

2707. $y'' + y = 0, \quad y = 3\sin x - 4\cos x.$

2708. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$

2709. $y'' - 2y' + y = 0$; a) $y = xe^x$, b) $y = x^2 e^x$.

2710. $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2) y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0, \quad y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$

Pokažite da su za zadane diferencijalne jednadžbe naznačene relacije integrali:

2711. $(x - 2y) y' = 2x - y, \quad x^2 - xy + y^2 = C^2.$

2712. $(x - y + 1) y' = 1, \quad y = x + Ce^y.$

2713. $(xy - x) y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 0, \quad y = \text{in}(xy).$

Odredite diferencijalne jednadžbe zadanih porodica krivulja (C, C_1, C_2, C_3 su po volji odaberive konstante):

2714. $y = Cx.$

2715. $y = Cx^2.$

2716. $y^2 = 2Cx.$

2717. $x^2 + y^2 = C^2.$

2718. $y = Ce^x.$

2719. $x^3 = C(x^2 - y^2).$

2720. $y^2 + \frac{1}{x} = 2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}.$

2721. $\ln \frac{x}{y} = 1 + ay$ (a je parametar).

2722. $(y - y_0)^2 = 2px$ (y_0, p su parametri).

2723. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$

2724. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$

2725. $y = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3.$

2726. Odredite diferencijalnu jednadžbu svih pravaca u ravnini XOY.

2727. Odredite diferencijalnu jednadžbu svih parabola s vertikalnom osi u ravnini XOY.

2728. Odredite diferencijalnu jednadžbu svih kružnica u ravnini XOY.

Za dane porodice krivulja nađite linije koje zadovoljavaju zadane početne uvjete:

2729. $x^2 - y^2 = C, \quad y(0) = 5.$

2730. $y = (C_1 + C_2 x) e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

2731. $y = C_1 \sin(x - C_2), \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = 0.$

2732. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -2.$

2. Diferencijalne jednadžbe prvog reda

1°. Oblici diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Diferencijalna jednadžba prvog reda s nepoznatom funkcijom y, riješena po derivaciji y', ima oblik

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

gdje je $f(x, y)$ zadana funkcija. U nekim slučajevima povoljno je traženom funkcijom smatrati varijablu x i jednadžbu (1) napisati u obliku

$$x' = g(x, y), \tag{1'}$$

gdje je $g(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}$.

Uzevši u obzir da je $y' = \frac{dy}{dx}$ i $x' = \frac{dx}{dy}$ diferencijalne jednadžbe (1) i (1') možemo napisati u simetričnom obliku

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{2}$$

gdje su $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ poznate funkcije.

Pod rješenjima jednadžbe (2) razumijevamo funkcije oblika $y = \varphi(x)$ ili $x = \psi(y)$ koje zadovoljavaju tu jednadžbu.

Opći integral jednadžbi (1) i (1') ili jednadžbe (2) ima oblik

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

gdje je C po volji odaberiva konstanta.

2°. Polje smjerova. Skup smjerova

$$\operatorname{tg}\alpha = f(x, y)$$

nazivamo *poljem smjerová* diferencijalne jednadžbe (1) i obično ga prikazujemo sistemom crtica ili strijelica s priklonim kutom α.

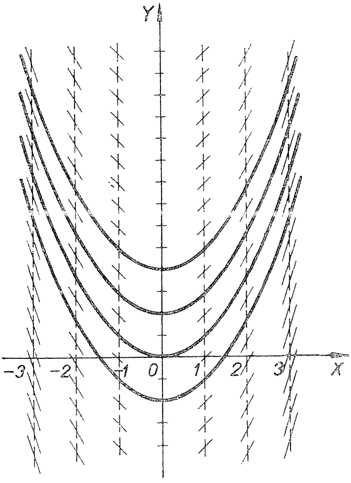
Krivulje $f(x, y) = k$, duž kojih je prikloni kut polja konstantan i iznosi k, nazivamo *izoklinama*. Nacrtavši izokline i polje smjerova možemo u jednostavnijim slučajevima približno nacrtati polje integralnih krivulja shvativši ih kao krivulje koje u svakoj svojoj tački imaju zadani smjer polja.

Primjer 1. Metodom izoklina konstruirajmo polje integralnih krivulja jednadžbe

$$y' = x.$$

Rješenje. Nacrtavši izokline $x = k$ (pravce) i polje smjerova, približno dobijemo polje integralnih krivulja (sl. 105). Opće rješenje je porodica parabola

$$y = \frac{x^2}{2} + C.$$



Slika 105.

Metodom izoklina nacrtajte približno polje integralnih krivulja za dalje navedene diferencijalne jednadžbe:

2733. $y' = -x$.

2734. $y' = -\frac{x}{y}$.

2735. $y' = 1 + y^2$.

2736. $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

2737. $y' = x^2 + y^2$.

3°. Cauchyjev teorem. Ako je funkcija $f(x, y)$ neprekinuta u nekom području $U\{a<x<A, b<y<B\}$ i ima u tom području ograđenu derivaciju $f_y'(x, y)$, onda svakom tačkom $(x_0 y_0)$ područja U prolazi jedna i samo jedna integralna krivulja $y = \varphi(x)$ jednadžbe (1) $(\varphi(x_0) = y_0)$.

4°. Metoda Eulerove lomljene crte. Za približnu konstrukciju integralne krivulje jednadžbe (1), koja prolazi zadanom tačkom $M_0(x_0, y_0)$, tu krivulju zamjenjujemo lomljenom crtom s vrhovima $M_i(x_i, y_i)$ gdje je

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i, \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

$$\Delta x_i = h \text{ (korak procesa)},$$

$$\Delta y_i = hf(x_i, y_i) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Primjer 2. Eulerovom metodom za jednadžbu

$$y' = \frac{xy}{2}$$

nadimo $y(1)$, ako je $y(0) = 1$ $(h = 0, 1)$.

Načinimo tablicu:

i	x_i	y_i	$\Delta y_i = \frac{x_i y_i}{20}$
0	0,	1	0
1	0,1	1	0,005
2	0,2	1,005	0,010
3	0,3	1,015	0,015
4	0,4	1,030	0,021
5	0,5	1,051	0,026
6	0,6	1,077	0,032
7	0,7	1,109	0,039
8	0,8	1,148	0,046
9	0,9	1,194	0,054
10	1,0	1,248	

Prema tome je $y(1) = 1{,}248$. Za usporedbu navodimo tačnu vrijednost $y(1) = e^{1/4} \doteq 1{,}284$.

Eulerovom metodom nađite partikularna rješenja zadanih diferencijalnih jednadžbi za navedene vrijednosti x:

2738. $y' = y, \quad y(0) = 1$; nađite $y(1)$ $(h = 0{,}1)$.

2739. $y' = x + y, \quad y(1) = 1$; nađite $y(2)$ $(h = 0{,}1)$.

2740. $y' = -\dfrac{y}{1+x}, \quad y(0) = 2$; nađite $y(1)$ $(h = 0{,}1)$.

2241. $y' = y - \dfrac{2x}{y}, \quad y(0) = 1$; nađite $y(1)$ $(h = 0{,}2)$.

3. Diferencijalne jednadžbe prvog reda sa separiranim varijablama. Ortogonalne trajektorije.

1°. Jednadžba prvog reda sa separiranim varijablama. Jednadžbom sa *separiranim varijablama* nazivamo jednadžbu prvog reda oblika

$$y' = f(x)\,g(y) \tag{1}$$

ili

$$X(x)\,Y(y)\,\mathrm{d}x + X_1(x)\,Y_1(y)\,\mathrm{d}y = 0. \quad (f, g, X, X_1, Y, Y_1 \text{ su neprekinute}). \tag{1'}$$

Podijelimo li obje strane jednadžbe (1) sa $g(y)$ i pomnožimo sa $\mathrm{d}x$, dobit ćemo $\dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x$. Odatle integriranjem dobivamo opći integral jednadbže (1) u obliku

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C. \tag{2}$$

Analogno, ako obje strane jednadžbe (1′) podijelimo sa $X_1(x)\;Y(y)$ i integriramo, dobit ćemo opći integral jednadžbe (1′) u obliku

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{Y_1(y)}{Y(y)}\,\mathrm{d}y = C. \tag{2'}$$

Ako za neku vrijednost $y = y_0$ imamo $g(y_0) = 0$ onda je funkcija $y = y_0$ također rješenje jednadžbe (1) u što se neposredno lako možemo uvjeriti. Analogno će pravci $x = a$ i $y = b$ biti integralne krivulje jednadžbe (1′) ako su a i b korijeni jednadžbi $X_1(x) = 0$, odnosno $Y(y) = 0$ čijim lijevim stranama smo dijelili početnu jednadžbu.

Primjer 1. Riješimo jednadžbu

$$y' = -\frac{y}{x}. \tag{3}$$

Napose nađimo rješenje koje zadovoljava početni uvjet: $y(1) = 2$.

Rješenje. Jednadžbu (3) možemo napisati u obliku

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x}.$$

Odatle ćemo separacijom varijabli imati

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \text{i prema tome} \quad \ln|y| = -\ln|x| + \ln C_1,$$

gdje je po volji odaberiva konstanta $\ln C_1$ uzeta u logaritamskom obliku. Nakon potenciranja dobijemo opće rješenje

$$y = \frac{C}{x}, \tag{4}$$

gdje je $C = \pm C_1$.

Prilikom dijeljenja sa y mogli smo izgubiti rješenje $y = 0$, ali se ono nalazi u formuli (4) za $C = 0$.

Pomoću zadanog početnog uvjeta dobivamo $C = 2$, pa je prema tome traženo partikularno rješenje

$$y = \frac{2}{x}.$$

2°. Neke diferencijalne jednadžbe koje se svode na jednadžbe sa separiranim varijablama. Diferencijalne jednadžbe oblika

$$y' = f(ax + by + c) \quad (b \neq 0)$$

(f je neprekinuta) svode se na jednadžbe oblika (1) zamjenom $u = ax + by + c$, gdje je u nova tražena funkcija.

3°. Ortogonalne trajektorije su krivulje koje sijeku linije zadane porodice $\Phi(x, y, a) = 0$ (a je parametar) pod pravim kutom. Ako je $F(x, y, y') = 0$ diferencijalna jednadžba porodice, onda je

$$F\left(x,\ y,\ -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

diferencijalna jednadžba ortogonalnih trajektorija.

Primjer 2. Nađimo ortogonalne trajektorije porodice elipsa

$$x^2 + 2y^2 = a^2. \tag{5}$$

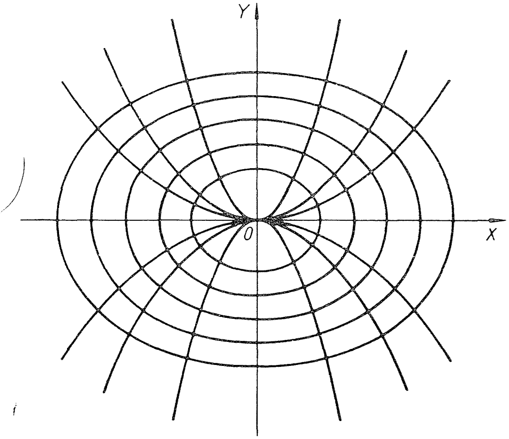
Rješenje. Deriviranjem obiju strana jednadžbe (5) nalazimo diferencijalnu jednadžbu porodice

$$x + 2yy' = 0.$$

Odatle, zamijenivši y' sa $-\frac{1}{y'}$, dobijemo diferencijalnu jednadžbu ortogonalnih trajektorija

$$x - \frac{2y}{y'} = 0 \quad \text{ili} \quad y' = \frac{2y}{x}.$$

Integriranjem ćemo dobiti $y = Cx^2$ (porodicu parabola) (sl. 106).



Slika 106.

4°. Postavljanje diferencijalnih jednadžbi. Pri postavljanju diferencijalnih jednadžbi u geometrijskim zadacima često se možemo koristiti geometrijskim smislom derivacije kao tangensa kuta što ga čini tangenta na krivulju s pozitivnim smjerom osi OX; to u mnogo slučajeva omogućava da odmah ustanovimo odnose među ordinatom y tražene krivulje, njenom apscisom x i y', tj. da dobijemo diferencijalnu jednadžbu. U drugim slučajevima (vidite zadatke 2783, 2890, 2895) koristimo se geometrijskim smislom određenog integrala kao površine krivocrtnog trapeza ili duljine luka. Pri tome se neposredno iz uvjeta zadatka dobije jednostavna integralna jednadžba (ukoliko je tražena funkcija pod znakom integrala), a deriviranjem obiju njenih strana možemo lako prijeći na diferencijalnu jednadžbu.

Primjer 3. Nađimo krivulju koja prolazi tačkom (3; 2), a dirališe bilo koje njene tangente raspolavlja odsječak tangente među koordinatnim osima.

Rješenje. Neka je tačka $M(x, y)$ polovište tangente AB, a ta tačka je po uvjetu zadatka diralište (tačke A i B su tačke u kojima tangenta siječe osi OY i OX). Na osnovu uvjeta je $OA = 2y$ i $OB = 2x$. Koeficijent smjera tangente na krivulju u tački $M(x, y)$ je

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{OA}{OB} = -\frac{y}{x}.$$

To je već diferencijalna jednadžba tražene krivulje. Transformacijom ćemo dobiti:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

i iz toga

$$\ln x + \ln y = \ln C \quad \text{ili} \quad xy = C.$$

Primjenom početnih uvjeta dobivamo da je $C = 3 \cdot 2 = 6$. Tako smo ustanovili da je tražena krivulja hiperbola $xy = 6$.

Riješite diferencijalne jednadžbe:

2742. $\operatorname{tg} x \sin^2 y \, dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y \, dy = 0.$ **2743.** $xy' - y = y^3.$

2744. $xyy' = 1 - x^2.$ **2745.** $y - xy' = a(1 + x^2 y').$

2746. $3e^x \operatorname{tg} y \, dx + (1 - e^x) \sec^2 y \, dy = 0.$ **2747.** $y' \operatorname{tg} x = y.$

Nađite partikularna rješenja koja zadovoljavaju navedene početne uvjete:

2748. $(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x; \quad y = 1 \quad \text{za} \quad x = 0.$

2749. $(xy^2 + x) \, dx + (x^2 y - y) \, dy = 0; \quad y = 1 \quad \text{za} \quad x = 0.$

2750. $y' \sin x = y \ln y; \quad y = 1 \quad \text{za} \quad x = \frac{\pi}{2}.$

Riješite diferencijalne jednadžbe pomoću zamjene varijabli:

2751. $y' = (x + y)^2.$

2752. $y' = (8x + 2y + 1)^2.$

2753. $(2x + 3y - 1) \, dx + (4x + 6y - 5) \, dy = 0.$

2754. $(2x - y) \, dx + (4x - 2y + 3) \, dy = 0.$

U zadacima 2755 i 2756 prijeđite na polarne koordinate:

2755. $y' = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}.$

2756. $(x^2 + y^2) \, dx - xy \, dy = 0.$

2757*. Nađite krivulju za koju je duljina tangente jednaka udaljenosti dirališta od ishodišta koordinatnog sistema.

2758. Nađite krivulju za koju se odsječak normale između koordinatnih osi u bilo kojoj tački krivulje raspolavlja u toj tački.

2759. Nađite krivulju za koju suptangenta ima konstantnu duljinu $(a > 0)$

2760. Nađite krivulju za koju je suptangenta dvostruko veća od apscise dirališta.

2761*. Nađite krivulju za koju apscisa težišta lika omeđenog koordinatnim osima, tom krivuljom i ordinatom bilo koje njene tačke iznosi 3/4 apscise te tačke.

2762. Nađite jednadžbu krivulje koja prolazi tačkom (3; 1), za koju se odsječak tangente između dirališta i osi OX raspolavlja u sjecištu s osi OY.

2763. Nađite jednadžbu krivulje koja prolazi tačkom (2; 0), ako odsječak tangente na krivulju između dirališta i osi OY ima konstantnu duljinu 2.

Nađite ortogonalne trajektorije zadanih porodica krivulja (a je parametar), konstruirajte porodice i njihove ortogonalne trajektorije.

2764. $x^2+y^2=a^2$.

2765. $y^2=ax$.

2766. $xy=a$.

2767. $(x-a)^2+y^2=a^2$.

4. Homogene diferencijalne jednadžbe prvog reda

1°. Homogene jednadžbe. Diferencijalnu jednadžbu

$$P(x,\ y)\,\mathrm{d}x+Q(x,\ y)\,\mathrm{d}y=0 \tag{1}$$

nazivamo *homogenom* ako su $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ homogene funkcije istoga stupnja. Jednadžbu (1) možemo svesti na oblik

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

i pomoću supstitucije $y=xu$, gdje je u nova nepoznata funkcija, transformiramo u jednadžbu sa separiranim varijablama. Možemo također primijeniti i supstituciju $x=yu$.

Primjer 1. Nađite opće rješenje jednadžbe

$$y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}.$$

Rješenje. Stavimo $y=ux$, pa ćemo dobiti $u+xu'=e^u+u$ ili

$$e^{-u}\,\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Integriranjem dobivamo $u=-\ln\ln\frac{C}{x}$, odakle je

$$y=-x\ln\ln\frac{C}{x}.$$

2°. Jednadžbe koje se svode na homogene. Ako je

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{2}$$

gdje je f neprekinuta i

$$\delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0,$$

onda, stavivši u jednadžbi (2) $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$ gdje se konstante α i β određuju iz sistema jednadžbi

$$a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0, \qquad a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0,$$

dobivamo homogenu diferencijalnu jednadžbu s obzirom na varijable u i v. Ako je $\delta = 0$, onda uvrštenjem $a_1x + b_1y = u$ u jednadžbu (2) dobivamo jednadžbu sa separiranim varijablama.

Integrirajte diferencijalne jednadžbe:

2768. $y' = \frac{y}{x} - 1$. **2769.** $y' = -\frac{x+y}{x}$.

2770. $(x-y)\,y\,dx - x^2\,dy = 0$.

2771. Za jednadžbu $(x^2+y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$ nađite porodicu integralnih krivulja, a također izdvojite krivulje koje prolaze kroz tačke (4; 0), odnosno (1; 1).

2772. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$. **2773.** $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$.

2774. $(4x^2 + 3xy + y^2)\,dx + (4y^2 + 3xy + x^2)\,dy = 0$.

2775. Nađite partikularno rješenje jednadžbe $(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ iz uvjeta da je $y = 1$ za $x = 2$.

Riješite jednadžbe:

2776. $(2x - y + 4)\,dy + (x - 2y + 5)\,dx = 0$.

2777. $y' = \frac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$. **2778.** $y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + 4y + 3}$.

2779. Nađite jednadžbu krivulje koja prolazi tačkom (1; 0) i ima svojstvo da je odsječak koji odsijeca tangenta na osi OY jednak polarnom radijusu dirališta.

2780.** Kakav oblik treba dati zrcalu projektora da se zrake iz tačkastog izvora svjetla reflektiraju u paralelnom pramenu?

2781. Nađite jednadžbu krivulje u kojoj je suptangenta jednaka aritmetičkoj sredini koordinata dirališta.

2782. Nađite jednadžbu krivulje za koju je odsječak, koji na osi ordinata odsijeca normala u bilo kojoj tački krivulje, jednak udaljenosti te tačke od ishodišta koordinatnog sistema.

2783*. Nađite jednadžbu krivulje za koju je površina, omeđena s osi apscisa, krivuljom i sa dvije ordinate od kojih je jedna konstantna a druga promjenljiva, jednak omjeru kuba promjenljive ordinate i pripadne apscise.

2784. Nađite krivulju za koju je odsječak na osi ordinata, koji odsijeca bilo koja tangenta, jednak apscisi dirališta.

5. Linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda. Bernoullijeva jednadžba

1°. Linearne jednadžbe. Diferencijalnu jednadžbu oblika

$$y' + P(x)\,y = Q(x) \tag{1}$$

prvog stupnja s obzirom na y i y' nazivamo *linaernom*.

Ako je funkcija $Q(x) \equiv 0$, onda jednadžba (1) dobiva oblik

$$y' + P(x)\,y = 0 \tag{2}$$

i nazivamo je *homogenom linearnom* diferencijalnom jednadžbom. U tome slučaju se varijable separiraju i opće rješenje jednadžbe (2) je

$$y = C e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}. \tag{3}$$

Za rješavanje nehomogene linearne jednadžbe (1) primjenjujemo tako zvanu metodu *varijacije po volji odaberive konstante*; ta metoda se sastoji u tome da najprije nađemo opće rješenje pripadne homogene linearne jednadžbe, tj. relaciju (3). Zatim, smatrajući u toj relaciji da je C funkcija od x, tražimo rješenje nehomogene jednadžbe (1) u obliku (3). U tu svrhu uvrstimo u jednadžbu (1) y i y' koje smo odredili iz (3), i iz dobivene diferencijalne jednadžbe određujemo funkciju $C(x)$. Na taj način opće rješenje nehomogene jednadžbe (1) dobivamo u obliku

$$y = C(x)\, e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Primjer 1. Riješimo jednadžbu

$$y' = \operatorname{tg} x \cdot y = \cos x \tag{4}$$

Rješenje. Pripadna homogena jednadžba je

$$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0.$$

Rješavanjem te jednadžbe dobivamo:

$$y = C \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Smatrajući C funkcijom od x, deriviranjem nalazimo da je

$$y = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot C.$$

Uvrštenjem y i y' u jednadžbu (4) dobivamo:

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot C = \operatorname{tg} x \cdot \frac{C}{\cos x} + \cos x, \quad \text{ili} \quad \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = \cos^2 x,$$

odakle je

$$C(x) = \int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C_1.$$

Iz toga slijedi da opće rješenje jednadžbe (4) glasi

$$y = \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C_1\right) \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Za rješavanje linearne jednadžbe (1) možemo također primijeniti supstituciju

$$y = uv, \tag{5}$$

gdje su u i v nepoznate funkcije od x. Tada jednadžba (1) dobiva oblik

$$[u' + P(x)\, u]\, v + v' u = Q(x). \tag{6}$$

Ako tražimo da bude

$$u' + P(x)\, u = 0, \tag{7}$$

onda iz (7) dobivamo u, zatim iz (6) nalazimo v, a prema (5) imamo y.

2°. Bernoullijeva jednadžba. Jednadžbu prvog reda oblika

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^{\alpha},$$

gdje je $\alpha \neq 0$ i $\alpha \neq 1$ nazivamo *Bernoullijevom jednadžbom.* Nju svodimo na linearnu pomoću supstitucije $z = y^{1-\alpha}$. Možemo također neposredno primijeniti supstituciju $y = uv$ ili metodu varijacije konstante.

Primjer 2. Riješimo jednadžbu

$$y' = \frac{4}{x}\,y + x\sqrt{y}.$$

Rješenje. To je Bernoullijeva jednadžba $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$. Stavimo da je

$$y = uv,$$

pa dobivamo:

$$u'v + v'u = \frac{4}{x}\,uv + x\sqrt{uv} \quad \text{ili} \quad v\left(u' - \frac{4}{x}\,u\right) + v'u = x\sqrt{uv}. \tag{8}$$

Da bi odredili funkciju u treba da ispunimo relaciju

$$u' - \frac{4}{x}\,u = 0,$$

odakle je

$$u = x^4.$$

Uvrštenjem tog izraza u jednadžbu (8) dobijemo:

$$v'x^4 = x\sqrt{vx^4},$$

a odatle nalazimo v:

$$v = \left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2,$$

i prema tome dobivamo opće rješenje u obliku

$$y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2.$$

Nađite opće integrale jednadžbi:

2785. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x.$

2786. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = x^3.$

2787*. $(1 + y^2)\,dx = (\sqrt{1 + y^2}\sin y - xy)\,dy.$

2788. $y^2\,dx - (2xy + 3)\,dy = 0.$

Nađite partikularna rješenja koja zadovoljavaju navedene uvjete:

2789. $xy'+y-e^x=0;\quad y=b$ za $x=a$.

2790. $y'-\dfrac{y}{1-x^2}-1-x=0;\quad y=0$ za $x=0$.

2791. $y'-y\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\cos x};\quad y=0$ za $x=0$.

Nađite opća rješenja jednadžbi:

2792. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=-xy^2$.

2793. $2xy\dfrac{dy}{dx}-y^2+x=0$.

2794. $y\,dx+\left(x-\dfrac{1}{2}x^3y\right)dy=0$.

2795. $3x\,dy=y(1+x\sin x-3y^3\sin x)\,dx$.

2796. Zadana su tri partikularna rješenja y, y_1, y_2 linearne jednadžbe. Dokažite da izraz $\dfrac{y_2-y}{y-y_1}$ zadržava konstantnu vrijednost za svaki x. Kakav je geometrijski smisao tog rezultata?

2797. Nađite krivulje za koje je konstantna površina trokuta, koji tvore os OX, tangenta i radijvektor dirališta.

2798. Nađite jednadžbu krivulje za koju je odsječak koji odsijeca tangenta na osi apscisa jednak kvadratu ordinate dirališta.

2799. Nađite jednadžbu krivulje za koju je odsječak koji odsijeca tangenta na osi ordinata jednak subnormali.

2800. Nađite jednadžbu krivulje za koju je odsječak koji odsijeca tangenta na osi ordinata proporcionalan kvadratu ordinate dirališta.

2801. Nađite jednadžbu krivulje za koju je duljina tangente jednaka udaljenosti tačke, u kojoj tangenta siječe os OX, od tačke $M(0, a)$.

6. Egzaktne diferencijalne jednadžbe. Eulerov multiplikator

1°. Egzaktne diferencijalne jednaždbe. Ako je za diferencijalnu jednadžbu

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0 \tag{1}$$

ispunjena jednadžba $\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, tada jednadžbu (1) možemo napisati u obliku $dU(x, y)=0$ i nazivamo je *egzaktnom diferencijalnom jednadžbom*. Opći integral jednadžbe (1) je $U(x, y)=C$. Funkcija $U(x, y)$ određuje se na način koji je naveden u glavi VI, 8. ili po formuli

$$U=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\,dy$$

(vidi glavu VII, 9).

Primjer 1. Nađimo opći integral diferencijalne jednadžbe

$$(3x^2 + 6xy^2)\,\mathrm{d}x + (6x^2y + 4y^3)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Rješenje. To je egzaktna diferencijalna jednadžba, jer je

$$\frac{\partial(3x^2 + 6xy^2)}{\partial y} + \frac{\partial(6x^2y + 4y^3)}{\partial x} = 12xy$$

i prema tome jednadžba ima oblik $\mathrm{d}U = 0$.

Ovdje je

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2 \quad \text{i} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3;$$

a odatle je

$$U = \int (3x^2 + 6xy^2)\,\mathrm{d}x + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

Deriviranjem U po y naći ćemo

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3$$

(prema uvjetu); odakle je $\varphi'(y) = 4y^3$ i $\varphi(y) = y^4 + C_0$. Najzad dobijemo $U(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C_0$, i prema tome je $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$ traženi opći integral zadane jednadžbe.

2°. Eulerov multiplikator. Ako lijeva strana jednadžbe (1) nije totalni diferencijal, a ispunjeni su uvjeti Cauchyjeva teorema, onda egzistira funkcija $\mu = \mu(x, y)$ (*Eulerov multiplikator*) takva da je

$$\mu(P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = \mathrm{d}U. \tag{2}$$

Odatle dobivamo da funkcija μ zadovoljava jednadžbu

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q).$$

Eulerov multiplikator μ lako je naći u dva slučaja:

$$1)\ \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = F(x), \quad \text{tada je} \quad \mu = \mu(x);$$

$$2)\ \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = F_1(y), \quad \text{tada je} \quad \mu = \mu(y).$$

Primjer 2. Riješimo jednadžbu

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Rješenje. Ovdje je

$$P = 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}, \quad Q = x^2 + y^2 \quad \text{i} \quad \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{2x + 2x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = 1,$$

iz čega slijedi da je $\mu = \mu(x)$.

Budući da je $\dfrac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$ ili $\mu\dfrac{\partial P}{\partial y} = \mu\dfrac{\partial Q}{\partial x} + Q\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}$, tada je

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{d}x \quad \text{i} \quad \ln\mu = x, \quad \mu = e^x.$$

Kada jednadžbu pomnožimo sa $\mu = e^x$, dobijemo:

$$e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + e^x(x^2 + y^2)\,dy = 0,$$

a to je egzaktna diferencijalna jednadžba. Kada je integriramo, imat ćemo opći integral

$$ye^x\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) = C.$$

Nađite opće integrale jednadžbi:

2802. $(x+y)\,dx + (x+2y)\,dy = 0.$

2803. $(x^2+y^2+2x)\,dx + 2xy\,dy = 0.$

2804. $(x^3-3xy^2+2)\,dx - (3x^2y-y^2)\,dy = 0.$

2805. $x\,dx + y\,dy = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}.$

2806. $\dfrac{2x\,dx}{y^3} + \dfrac{y^2-3x^2}{y^4}\,dy = 0.$

2807. Nađite partikularni integral jednadžbe

$$\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0,$$

koji zadovoljava početni uvjet $y(0) = 2$.

Riješite jednadžbe za koje postoji Eulerov multiplikator $\mu = \mu(x)$ ili $\mu = \mu(y)$:

2808. $(x+y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0.$

2809. $y(1+xy)\,dx - x\,dy = 0.$

2810. $\dfrac{y}{x}\,dx + (y^3 - \ln x)\,dy = 0.$

2811. $(x\cos y - y\sin y)\,dy + (x\sin y + y\cos y)\,dx = 0.$

7. Diferencijalne jednadžbe prvog reda koje nisu riješene s obzirom na derivaciju

1°. Diferencijalne jednadžbe prvog reda višeg stupnja. Ako je jednadžba

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

na primjer drugog stupnja s obzirom na y', onda, rješavanjem jednadžbe (1) s obzirom na y', dobivamo dvije jednadžbe

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y). \tag{2}$$

Tako svakom tačkom $M_0(x_0, y_0)$ nekog područja ravnine prolaze općenito dvije integralne krivulje. Opći integral jednadžbe (1) u tome slučaju ima oblik

$$\Phi(x, y, C) \equiv \Phi_1(x, y, C)\,\Phi_2(x, y, C) = 0, \tag{3}$$

gdje su Φ_1 i Φ_2 opći integrali jednadžbi (2).

Povrh toga za jednadžbu (1) može postojati *singularni integral.* Singularni integral geometrijski predstavlja ovojnicu porodice krivulja (3) i možemo ga dobiti eliminacijom konstante C iz sistema jednadžbi

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \Phi'_C(x, y, C) = 0, \tag{4}$$

ili ako eliminiramo $p = y'$ iz sistema jednadžbi

$$F(x, y, p) = 0, \quad F'_p(x, y, p) = 0. \tag{5}$$

Primijetimo da krivulje definirane jednadžbama (4) ili (5) nisu uvijek rješenja jednadžbe (1); prema tome to u svakom pojedinom slučaju treba provjeriti.

Primjer. 1. Nađimo opći i singularni integral jednadžbe

$$xy'^2 + 2xy' - y = 0.$$

Rješenje. Riješimo s obzirom na y' pa imamo dvije homogene jednadžbe:

$$y' = -1 + \sqrt{1 + \frac{y}{x}}, \quad y' = -1 - \sqrt{1 + \frac{y}{x}},$$

definirane u području

$$x(x + y) > 0,$$

a njihovi opći integrali su

$$\left(\sqrt{1 + \frac{y}{x}} - 1\right)^2 = \frac{C}{x}, \quad \left(\sqrt{1 + \frac{y}{x}} + 1\right)^2 = \frac{C}{x}$$

ili

$$(2x + y - C) - 2\sqrt{x^2 + xy} = 0, \quad (2x + y - C) + 2\sqrt{x^2 + xy} = 0.$$

Kada ih pomnožimo, dobijemo opći integral zadane jednadžbe

$$(2x + y - C)^2 - 4(x^2 + xy) = 0$$

ili

$$(y - C)^2 = 4Cx$$

(porodicu parabola).

Derivirajmo opći integral po C i eliminirajmo C. Nalazimo singularni integral

$$y + x = 0.$$

(Pokus pokazuje da je $y + x = 0$ rješenje zadane jednadžbe.)

Singularni integral možemo također naći deriviranjem $xp^2 + 2xp - y = 0$ po p i eliminiranjem p.

2°. Rješavanje diferencijalne jednadžbe uvođenjem parametra. Ako diferencijalna jednadžba prvog reda ima oblik

$$x = \varphi(y, y'),$$

onda varijable x i y možemo odrediti iz sistema jednadžbi

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{dy}, \quad x = \varphi(y, p),$$

gdje je $p = y'$ parametar.

Analogno, ako je $y = \psi(x, y')$ onda se x i y određuje iz sistema jednadžbi

$$p = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dp}{dx}, \qquad y = \psi(x, p).$$

Primjer 2. Nađimo opći i singularni integral jednadžbe

$$y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}.$$

Rješenje. Stavivši $y' = p$ prepišimo jednadžbu ovako

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}.$$

Deriviravši po x i smatrajući da je p funkcija od x dobivamo

$$p = 2p\frac{dp}{dx} - p - x\frac{dp}{dx} + x$$

ili $\frac{dp}{dx}(2p-x) = (2p-x)$, ili $\frac{dp}{dx} = 1$. Integriranjem izlazi $p = x+C$. Uvrštenje u početnu jednadžbu daje opće rješenje:

$$y = (x + C)^2 - x(x + C) + \frac{x^2}{2} \quad \text{ili} \quad y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2.$$

Deriviranjem općeg rješenja po C i eliminacijom C dobijemo singularno rješenje: $y = \frac{x^2}{4}$. (Pokus pokazuje da je $y = \frac{x^2}{4}$ zaista rješenje zadane jednadžbe).

Ako faktor $2p-x$, kojim smo kratili, izjednačimo s nulom, dobijemo $p = \frac{x}{2}$ i nakon uvrštenja p u zadanu jednadžbu izlazi $y = \frac{x^2}{4}$, a to je isto singularno rješenje.

Nađite opće i singularne integrale jednadžbi (u zadacima 2812 i 2813 konstruirajte polje integralnih krivulja):

2812. $y'^2 - \frac{2y}{x}y' + 1 = 0.$

2813. $4y'^2 - 9x = 0.$

2814. $yy'^2 - (xy+1)y' + x = 0.$

2815. $yy'^2 - 2xy' + y = 0.$

2816. Nađite integralne krivulje jednadžbe $y'^2 + y^2 = 1$ koje prolaze tačkom $M\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Uvođenjem parametra $y' = p$ riješite jednadžbe:

2817. $x = \sin y' + \ln y'.$

2818. $y = y'^2 e^{y'}.$

2819. $y = y'^2 + 2\ln y'.$

2820. $4y = x^2 + y'^2.$

2821. $e^x = \frac{y^2 + y'^2}{2y'}.$

8. Lagrangeova i Clairautova jednadžba

1°. Lagrangeova jednadžba. Jednadžbu oblika

$$y = x\varphi(p) + \psi(p), \tag{1}$$

gdje je $p = y'$ nazivamo *Lagrangeovom jednadžbom*. Deriviranjem, znajući da je $\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}x$, jednadžbu (1) svodimo na linearnu s obzirom na x i $\mathrm{d}x$:

$$p\,\mathrm{d}x = \varphi(p)\,\mathrm{d}x + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\,\mathrm{d}p. \tag{2}$$

Ako je $p \not\equiv \varphi(p)$, onda iz jednadžbi (1) i (2) dobivamo opće rješenje u parametarskom obliku:

$$x = Cf(p) + g(p), \quad y = [Cf(p) + g(p)]\,\varphi(p) + \psi(p),$$

gdje je p parametar, a $f(p)$, $g(p)$ su neke poznate funkcije. Povrh toga može postojati singularno rješenje koje tražimo na običan način.

2°. Clairautova jednadžba. Ako je u jednadžbi (1) $\varphi(p) \equiv p$ onda dobivamo *Clairautovu jednadžbu*

$$y = xp + \psi(p).$$

Njeno opće rješenje ima oblik $y = Cx + \psi(C)$ (porodica pravaca). Pored toga egzistira singularno rješenje (ovojnica) koje dobijemo nakon eliminiranja parametra p iz sistema jednadžbi

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = px + \psi(p). \end{cases}$$

Primjer. Riješimo jednadžbu

$$y = 2y'x + \frac{1}{y'}. \tag{3}$$

Rješenje. Stavimo $y' = p$, pa je tada $y = 2px + \dfrac{1}{p}$; derivirajmo i zamijenimo $\mathrm{d}y$ sa $p\,\mathrm{d}x$. Dobićemo:

$$p\,\mathrm{d}x = 2p\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}p - \frac{\mathrm{d}p}{p^2}$$

ili

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = -\frac{2}{p}x + \frac{1}{p^3}.$$

Kada riješimo tu linearnu jednadžbu, imat ćemo

$$x = \frac{1}{p^2}(\ln p + C).$$

Iz toga je opći integral

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{p^2}(\ln p + C). \\[2ex] y = 2px + \dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

Da nađemo singularni integral po općem pravilu tvorimo sistem

$$y = 2px + \frac{1}{p}, \qquad 0 = 2x - \frac{1}{p^2}.$$

Odatle je

$$x = \frac{1}{2p^2}, \qquad y = \frac{2}{p}$$

i prema tome

$$y = \pm 2\sqrt{2x}.$$

Uvrštenjem y u jednadžbu (3) uvjerit ćemo se da dobivena funkcija nije rješenje, pa prema tome jednadžba (3) nema singularnog integrala.

Riješite Lagrangeove jednadžbe:

2822. $y = \frac{1}{2}x\left(y' + \frac{y}{y'}\right)$.

2823. $y = y' + \sqrt{1 - y'^2}$.

2824. $y = (1 + y')x + y'^2$.

2825*. $y = -\frac{1}{2}y'(2x + y')$.

Nađite opće i singularne integrale Clairautove jednadžbe i konstruirajte polje integralnih krivulja:

2826. $y = xy' + y'^2$.

2827. $y = xy' + y'$.

2828. $y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$.

2829. $y = xy' + \frac{1}{y'}$.

2830. Nađite krivulju za koju je konstantna površina trokuta, koji tvore koordinatne osi i tangenta u bilo kojoj tački.

2831. Nađite krivulju, ako je udaljenost zadane tačke do bilo koje tangente te krivulje konstantna.

2832. Nađite krivulju za koju duljina odsječka bilo koje njene tangente unutar koordinatnih osi ima stalnu vrijednost l.

9. Razne diferencijalne jednadžbe prvog reda

2833. Odredite tipove diferencijalnih jednadžbi i ukažite na metodu njihova rješavanja:

a) $(x + y)y' = x \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$;

b) $(x - y)y' = y^2$;

c) $y' = 2xy + x^3$;

d) $y' = 2xy + y^3$;

e) $xy' + y = \sin y$;

f) $(y - xy')^2 = y'^3$;

g) $y = xe^{y'}$;

h) $(y' - 2xy)\sqrt{y} = x^3$;

i) $y' = (x + y)^2$;

j) $x \cos y' + y \sin y' = 1$;

k) $(x^2 - xy)y' = y^4$;

l) $(x^2 + 2xy^3)\,dx + (y^2 + 3x^2y^2)\,dy = 0$;

m) $(x^3 - 3xy)\,dx + (x^2 + 3)\,dy = 0$;

n) $(xy^3 + \ln x)\,dx = y^2\,dy$.

Riješite jednadžbe:

2834. a) $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + x\cos\frac{y}{x}\,\mathrm{d}y = 0;$

b) $x\ln\frac{x}{y}\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = 0.$

2835. $x\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)\mathrm{d}y.$

2836. $(2xy^2 - y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0.$

2837. $xy' + y = xy^2\ln x.$

2838. $y = xy' + y'\ln y'.$

2839. $y = xy' + \sqrt{-ay'}.$

2840. $x^2(y+1)\,\mathrm{d}x + (x^3-1)(y-1)\,\mathrm{d}y = 0.$

2841. $(1+y^2)(e^{2x}\,\mathrm{d}x - e^y\,\mathrm{d}y) - (1+y)\,\mathrm{d}y = 0.$

2842. $y' - y\frac{2x-1}{x^2} = 1.$

2843. $ye^y = (y^3 + 2xe^y)\,y'.$

2844. $y' + y\cos x = \sin x\cos x.$

2845. $(1-x^2)\,y' + xy = a.$

2846. $xy' - \frac{y}{x+1} - x = 0.$

2847. $y'(x\cos y + a\sin 2y) = 1.$

2848. $(x^2y - x^2 + y - 1)\,\mathrm{d}x + (xy + 2x - 3y - 6)\,\mathrm{d}y = 0.$

2849. $y' = \left(1 + \frac{y-1}{2x}\right)^2.$

2850. $xy^3\,\mathrm{d}x = (x^2y + 2)\,\mathrm{d}y.$

2851. $y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1}.$

2852. $2\mathrm{d}x + \sqrt{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}y - \sqrt{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x = 0.$

2853. $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}.$

2854. $yy' + y^2 = \cos x.$

2855. $x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = y^2\,\mathrm{d}x.$

2856. $y'(x + \sin y) = 1.$

2857. $y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -p + p^2.$

2858. $x^3\,\mathrm{d}x - (x^4 + y^3)\,\mathrm{d}y = 0.$

2859. $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0.$

2860. $\frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{y^2} = 0.$

2861. $e^y\,\mathrm{d}x + (xe^y - 2y)\,\mathrm{d}y = 0.$

2862. $y = 2xy' + \sqrt{1 + y'^2}.$

2863. $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x).$

2864. $(2e^x + y^4)\,\mathrm{d}y - ye^x\,\mathrm{d}x = 0.$

2865. $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$

2866. $xy(xy^2+1)\,dy - dx = 0.$

2867. $a(xy'+2y) = xyy'.$

2868. $x\,dy - y\,dx = y^2\,dx.$

2869. $(x^2-1)^{3/2}dy + (x^3+3xy\sqrt{x^2-1})\,dx = 0.$

2870. $\operatorname{tg}x\frac{dy}{dx} - y = a.$

2871. $\sqrt{a^2+x^2}\,dy + (x+y-\sqrt{a^2+x^2})\,dx = 0.$

2872. $xyy'^2 - (x^2+y^2)y' + xy = 0.$

2873. $y = xy' + \frac{1}{y'^2}.$

2874. $(3x^2+2xy-y^2)\,dx + (x^2-2xy-3y^2)\,dy = 0.$

2875. $2yp\frac{dp}{dy} = 3p^2+4y^2.$

Nađite rješenja jednadžbi za navedene početne uvjete:

2876. $y' = \frac{y+1}{x}$; $y = 0$ za $x = 1$.

2877. $e^{x-y}y' = 1$; $y = 1$ za $x = 1$.

2878. $y'\operatorname{ctg}x + y = 2$; $y = 2$ za $x = 0$.

2879. $e^y(y'+1) = 1$; $y = 0$ za $x = 0$.

2880. $y' + y = \cos x$; $y = \frac{1}{2}$ za $x = 0$.

2881. $y' - 2y = -x^2$; $y = \frac{1}{4}$ za $x = 0$.

2882. $y' + y = 2x$; $y = -1$ za $x = 0$.

2883. $xy' = y$; a) $y = 1$ za $x = 1$; b) $y = 0$ za $x = 0$.

2884. $2xy' = y$; a) $y = 1$ za $x = 1$; b) $y = 0$ za $x = 0$.

2885. $2xyy' + x^2 - y^2 = 0$; a) $y = 0$ za $x = 0$; b) $y = 1$ za $x = 0$.
c) $y = 0$ za $x = 1$.

2886. Nađite krivulju koja prolazi tačkom (0; 1) u kojoj je suptangenta jednaka zbroju koordinata dirališta.

2887. Nađite krivulju ako vam je poznato da je suma odsječaka, koje na koordinatnim osima odsijeca tangenta krivulje, konstantna i iznosi $2a$.

2888. Zbroj duljina normale i subnormale jednak je jedan. Nađite jednadžbu krivulje ako je poznato da krivulja prolazi kroz ishodište koordinatnog sistema.

2889*. Nađite krivulju za koju je kut koji tvori tangenta i radijvektor dirališta, konstantan.

2890. Nađite krivulju ako vam je poznato da je površina između koordinatnih osi, te krivulje i ordinate bilo koje tačke na krivulji jednaka kubu te ordinate.

2891. Nađite krivulju ako je poznato da je površina sektora, omeđenog polarnom osi, tom krivuljom i polarnim radijusom bilo koje tačke krivulje, proporcionalna kubu tog radijusa.

2892. Nađite krivulju za koju je odsječak koji na osi OX odsijeca tangenta jednak duljini te tangente.

2893. Nađite krivulju za koju parabola $y^2 = 2x$ raspolavlja odsječak tangente između koordinatnih osi.

2894. Nađite krivulju za koju je duljina normale u bilo kojoj tački krivulje jednaka udaljenosti te tačke od ishodišta koordinatnog sistema.

2895*. Površina lika omeđenog krivuljom, koordinatnim osima i ordinatom bilo koje tačke krivulje jednaka je duljini pripadnog luka krivulje. Nađite jednadžbu te krivulje ako je poznato da ona prolazi tačkom (0; 1).

2896. Nađite krivulju za koju je površina trokuta, koji tvori os apscisa, tangenta i radijvektor dirališta, konstantna i jednaka a^2.

2897. Nađite krivulju ako je poznato da je polovište odsječka koji na osi OX odsijecaju tangenta i normala na krivulju, konstantna tačka $(a;\ 0)$.

Pri postavljanju diferencijalne jednadžbe prvog reda, naročito u zadacima iz fizike, često je svrsishodno primijeniti tzv. *metodu diferencijala* koja se sastoji u tome da približne odnose među neizmjerno malim prirastima zadanih i traženih veličina, ispravne s tačnošću do neizmjerno malih veličina višeg reda, zamijenimo pripadnim odnosima među njihovim diferencijalima, što ne utječe na rezultat.

Zadatak. U rezervoaru ima 100 l vodene otopine od 10 kg soli. Voda utječe u rezervoar brzinom od 3 l u min., a smjesa iz njega istječe brzinom od 2 l u min, pri čemu se miješanjem podržava jednolika koncentracija. Koliko soli će biti u rezervoaru po isteku jednog sata?

Rješenje. Koncentracijom c zadane tvari nazivamo količinu tvari u jedinici volumena. Ako je koncentracija jednolika, onda količina tvari u volumenu V iznosi cV.

Neka je količina soli koja se nalazi u rezervoaru x kg, po isteku vremena t min. Količina smjese u rezervoaru u tome trenutku bit će $(100+t)$ l i prema tome koncentracija $c = \dfrac{x}{100+t}$ kg na 1 l.

U toku vremena dt iz rezervoara istječe 2 dt l smjese sa $2c\,dt$ kg soli. Prema tome promjenu dx količine soli u rezervoaru karakterizira odnos

$$-\,dx = 2c\,dt, \quad \text{ili} \quad -\,dx = \frac{2x}{100+t}\,dt.$$

To i jeste tražena diferencijalna jednadžba. Kada separiramo varijable i integriramo, dobit ćemo

$$\ln x - 2\ln(100+t) + \ln C$$

ili

$$x = \frac{C}{(100+t)^2}.$$

Konstantu C određujemo iz uvjeta da je za $t = 0$, $x = 10$, tj. $C = 100000$. Po isteku jednog sata u rezervoaru će biti $x = \dfrac{100000}{160^2} \approx 3{,}9$ kg soli.

2898*. Dokažite da slobodna površina teške tekućine, koja rotira oko vertikalne osi, ima oblik rotacionog paraboloida.

2898*. Nađite ovisnost tlaka zraka o visini, ako je poznato da je tlak 1 kp/cm^2 na razini mora, a 0,92 kp/cm^2 na visini od 500 m.

2900*. Prema Hookeovom zakonu elastični konop duljine l pod djelovanjem razvlačne sile F dobiva prirast duljine klF ($k = \text{const}$). Koliko će se produžiti konop pod djelovanjem svoje težine W, ako ga objesimo za jedan njegov kraj? (Početna duljina konopa je l).

2901. Riješite isti zadatak pod uvjetom da je na kraju konopa obješen teret P.

Pri rješavanju zadataka 2902 i 2903 upotrijebite Newtonov zakon po kome je brzina hlađenja tijela proporcionalna razlici temperature tijela i okoline.

2902. Nađite zavisnost temperature T od vremena t ako tijelo zagrijano do T_0 stupanja unesemo u prostoriju u kojoj je temperatura stalna i iznosi a stupnjeva.

2903. Kroz koje će se vrijeme temperatura tijela zagrijanog do 100° sniziti do 30° ako je temperatura prostorije 20°, a za prvih 20 min tijelo se ohladi do 60°?

2904. Usporavajuće djelovanje trenja na disk koji se vrti u tekućini proporcionalno je kutnoj brzini vrtnje. Nađite ovisnost te kutne brzine o vremenu ako je poznato da se disk počeo vrtjeti brzinom od 100 okr/min i da se nakon 1 min vrtio brzinom od 60 okr/min.

2905*. Brzina raspadanja radijuma proporcionalna je prisutnoj količini radijuma. Poznato vam je da nakom 1600 godina ostane polovina prvotne količine. Nađite koliki se postotak radijuma raspadne nakon 100 godina.

2906*. Brzina istjecanja vode iz otvora na udaljenosti h po vertikali od slobodne površine određuje se formulom

$$v = c\sqrt{2gh}\,, \text{ gdje je } c \approx 0{,}6 \text{ i } g \text{ ubrzanje sile teže.}$$

Za koje vrijeme voda kojom je napunjen polusferni kotao promjera 2 m istječe iz njega kroz okrugli otvor na dnu, polumjera 0,1 m.

2907*. Količina svjetlosti koja se apsorbira pri prolazu kroz tanak sloj vode proporcionalna je količini svjetla koje pada na vodu i debljini sloja vode. Ako se pri prolazu kroz sloj vode debljine 3 m apsorbira polovina prvobitne količine svjetla, koliki dio svjetla prodire do dubine od 30 m?

2908*. Sila otpora zraka pri padanju tijela s padobranom proporcionalna je kvadratu brzine padanja. Nađite graničnu brzinu padanja.

2909*. Dno rezervoara sadržine 300 l pokrito je smjesom soli i netopive tvari. Uz pretpostavku da je brzina otapanja soli proporcionalna razlici među koncentracijom u zadanom trenutku i koncentracijom zasićene otopine (1 kg soli na 3 l vode) i da zadana količina čiste vode otapa 1/3 kg soli u 1 min, nađite koliko će soli sadržavati otopina po isteku 1 sata.

2910*. Elektromotorna sila e u strujnom krugu struje i, otpora R i induktiviteta L sastavljena je od pada napona Ri i elektromotorne sile samoindukcije $L\dfrac{di}{dt}$. Odredite struju i u trenutku t, ako je $e = E\sin\omega t$ (E i ω su konstante) a $i = 0$ za $t = 0$.

10. Diferencijalne jednadžbe višeg reda

1°. Neposredno integriranje. Ako je

$$y^{(n)} = f(x),$$

onda je

$$y = \underbrace{\int dx \int \ldots \int}_{n \text{ puta}} f(x)\, dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n.$$

2°. Sniženje reda jednadžbe. 1) Ako diferencijalna jednadžba ne sadrži eksplicitno y, npr.

$$F(x, y', y'') = 0,$$

onda supstitucijom $y' = p$ dobivamo jednadžbu kojoj je red za jedinicu niži:

$$F(x, p, p') = 0.$$

Primjer 1. Nađimo partikularno rješenje jednadžbe

$$xy'' + y' + x = 0,$$

koja zadovoljava uvjete

$$y = 0, \quad y' = 0 \quad \text{za} \quad x = 0.$$

Rješenje. Stavimo $y' = p$, pa imamo $y'' = p'$, odakle je

$$xp' + p + x = 0.$$

Kada riješimo ovu jednadžbu kao linearnu s obzirom na funkciju p, dobijemo

$$px = C_1 - \frac{x^2}{2}.$$

Iz uvjeta $y' = p = 0$ za $x = 0$ imamo $0 = C_1 - 0$, tj. $C_1 = 0$. Iz toga slijedi da je

$$p = -\frac{x}{2}$$

ili

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2},$$

odakle još jednom integracijom izlazi

$$y = -\frac{x^2}{4} + C_2.$$

Uvrstivši $y = 0$ za $x = 0$, dobijemo $C_2 = 0$. Prema tome traženo partikularno rješenje glasi

$$y = -\frac{1}{4}x^2.$$

2) Ako diferencijalna jednadžba ne sadrži eksplicitno x, npr.

$$F(y, y', y'') = 0,$$

onda stavljajući $y' = p$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ dobivamo jednadžbu kojoj je red za jedan niži:

$$F\left(y,\ p,\ p\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Primjer 2. Nađimo partikularno rješenje jednadžbe

$$yy'' - y'^2 = y^4$$

pod uvjetom da je $y = 1$, $y' = 0$ za $x = 0$.

Rješenje. Uvrštenjem $y' = p$, a prema tome i $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, naša jednadžba se transformira u ovu:

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = y^4.$$

Dobili smo Bernoullijevu jednadžbu s obzirom na p (y smatramo argumentom). Riješimo je, pa nalazimo da je

$$p = \pm y\sqrt{C_1 + y^2}.$$

Iz uvjeta $y' = p = 0$ za $y = 1$ imamo $C_1 = -1$.
Prema tome je

$$p = \pm y\sqrt{y^2 - 1}$$

ili

$$\frac{dy}{dx} = \pm y\sqrt{y^2 - 1}.$$

Integriranjem izlazi:

$$\arccos\frac{1}{y} \pm x = C_2.$$

Stavivši $y = 1$ i $x = 0$ dobijemo $C_2 = 0$, odakle je $\dfrac{1}{y} = \cos x$ ili $y = \sec x$.

Riješite jednadžbe:

2911. $y'' = \dfrac{1}{x}$.

2912. $y'' = -\dfrac{1}{2y^3}$.

2913. $y'' = 1 - y'^2$.

2914. $xy'' + y' = 0$.

2915. $yy'' = y'^2$.

2916. $yy'' + y'^2 = 0$.

2917. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$.

2918. $y'(1 + y'^2) = ay''$.

2919. $x^2y'' + xy' = 1$.

2920. $yy'' = y^2y' + y'^2$.

2921. $yy'' - y'(1 + y') = 0$.

2922. $y'' = -\dfrac{x}{y'}$.

2923. $(x + 1)y'' - (x + 2)y' + x + 2 = 0$.

2924. $xy'' = y'\ln\dfrac{y'}{x}$.

2925. $y' + \frac{1}{4}(y'')^2 = xy''$.

2926. $xy''' + y'' = 1 + x$.

2927. $y'''^2 + y''^2 = 1$.

Nađite partikularna rješenja uz zadane početne uvjete:

2928. $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$; $y = 0$, $y' = 3$ za $x = 0$.

2929. $1 + y'^2 = 2yy''$; $y = 1$, $y' = 1$ za $x = 1$.

2930. $yy'' + y'^2 = y'^3$; $y = 1$, $y' = 1$ za $x = 0$.

2931. $xy'' = y'$; $y = 0$, $y' = 0$ za $x = 0$.

Nađite opće integrale jednadžbi:

2932. $yy' = \sqrt{y^2 + y'^2}\,y'' - y'y''$.

2933. $yy'' = y'^2 + y'\sqrt{y^2 + y'^2}$.

2934. $y'^2 - yy'' = y^2 y'$.

2935. $yy'' + y'^2 - y'^3 \ln y = 0$.

Nađite rješenja koja zadovoljavaju navedene uvjete:

2936. $y''y^3 = 1$; $y = 1$, $y' = 1$ za $x = \frac{1}{2}$.

2937. $yy'' + y'^2 = 1$; $y = 1$, $y' = 1$ za $x = 0$.

2938. $xy'' = \sqrt{1 + y'^2}$; $y = 0$ za $x = 1$; $y = 1$ za $x = e^2$.

2939. $y''(1 + \ln x) + \frac{1}{x} \cdot y' = 2 + \ln x$; $y = \frac{1}{2}$, $y' = 1$ za $x = 1$.

2940. $y'' = \frac{y'}{x}\left(1 + \ln\frac{y'}{x}\right)$; $y = \frac{1}{2}$, $y' = 1$ za $x = 1$.

2941. $y'' - y'^2 + y'(y-1) = 0$; $y = 2$, $y' = 2$ za $x = 0$.

2942. $3y'y'' = y + y'^3 + 1$; $y = -2$, $y' = 0$ za $x = 0$.

2943. $y^2 + y'^2 - 2yy'' = 0$; $y = 1$, $y' = 1$ za $x = 0$.

2944. $yy' + y'^2 + yy'' = 0$; $y = 1$ za $x = 0$ i $y = 0$ za $x = -1$.

2945. $2y' + (y'^2 - 6x) \cdot y'' = 0$; $y = 0$, $y' = 2$ za $x = 2$.

2946. $y'y^2 + yy'' - y'^2 = 0$; $y = 1$, $y' = 2$ za $x = 0$.

2947. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$; $y = 1$, $y' = 0$ za $x = 0$.

2948. $2yy''+y^2-y'^2=0; \quad y=1, \quad y'=1$ za $x=0$.

2949. $y''=y'^2-y; \quad y=-\frac{1}{4}, \quad y'=\frac{1}{2}$ za $x=1$.

2950. $y''+\frac{1}{y^2}e^{y^2}y'-2yy'^2=0; \quad y=1, \quad y'=e$ za $x=-\frac{1}{2e}$.

2951. $1+yy''+y'^2=0; \quad y=0, \quad y'=1$ za $x=1$.

2952. $(1+yy')y''=(1+y'^2)y'; \quad y=1, \quad y'=1$ za $x=0$.

2953. $(x+1)y''+xy'^2=y'; \quad y=-2, \quad y'=4$ za $x=1$.

Riješite jednadžbe:

2954. $y'=xy''^2+y''^2$.

2955. $y'=xy''+y''-y''^2$.

2956. $y'''^2=4y''$.

2957. $yy'y''=y'^3+y''^2$. Izdvojite integralnu krivulju koja prolazi tačkom (0; 0) i u njoj dira pravac $y+x=0$.

2958. Nađite krivulje konstantnog polumjera zakrivljenosti.

2959. Nađite krivulju za koju je polumjer zakrivljenosti proporcionalan kubu normale.

2960. Nađite krivulju za koju je polumjer zakrivljenosti jednak normali.

2961. Nađite krivulju u kojoj je polumjer zakrivljenosti dvostruko veći od normale.

2962. Nađite krivulju za koju je projekcija polumjera zakrivljenosti na os OY konstantna.

2963. Nađite jednadžbu užeta visećeg mosta ako pretpostavite da je opterećenje jednoliko raspoređeno po projekciji užeta na horizontalni pravac. Težinu užeta zanemarite.

2964*. Nađite položaj ravnoteže gipke nerastezljive niti, koja je krajevima učvršćena u dvije tačke i ima konstantan teret q (uključivo težinu niti) na jedinicu duljine.

2965*. Teško tijelo bez početne brzine kliže po kosini. Nađite zakon gibanja ako je prikloni kut α, a koeficijent trenja μ.

Uputa. Sila trenja je μN gdje je N sila reakcije podloge.

2966*. Silu otpora zraka pri padanju tijela možemo smatrati proporcionalnom kvadratu brzine. Nađite zakon gibanja ako je početna brzina nula.

2967*. Motorni čamac težine 300 kp giba se po pravcu s početnom brzinom od 66 m/s. Otpor vode proporcionalan je brzini i iznosi 10 kp pri brzini 1 m/s. Za koje vrijeme će brzina biti 8 m/s^2.

11. Linearne diferencijalne jednadžbe

1°. Homogene jednadžbe. Funkcije $y_1=\varphi_1(x)$, $y_2=\varphi_2(x), \dots, y_n=\varphi_n(x)$ nazivamo *linearno zavisnim* ako egzistiraju konstante $C_1, C_2, \dots, C_n$ koje nisu sve jednake nuli, takve da je

$$C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n\equiv 0;$$

U suprotnom slučaju zadane funkcije nazivamo *linearno nezavisnim.*

Opće rješenje *homogene linearne* diferencijalne jednadžbe

$$y^{(n)}+P_1(x)\,y^{(n-1)}+\dots+P_n(x)y=0 \tag{1}$$

s neprekinutim koeficijentima $P_i(x)$ $(i=1, 2, \dots, n)$ ima oblik

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n,$$

gdje su $y_1, y_2, \dots, y_n$ linearno nezavisna rješenja jednadžbe (1) (*fundamentalni sistem rješenja*).

2°. Nehomogene jednadžbe. Opće rješenje *nehomogene linearne* diferencijalne jednadžbe

$$y^{(n)}+P_1(x)\,y^{(n-1)}+\dots+P_n(x)\,y=f(x) \tag{2}$$

s neprekinutim koeficijentima $P_i(x)$ i desnom stranom $f(x)$ ima oblik

$$y=y_0+Y,$$

gdje je y_0 opće rješenje pripadne homogene jednadžbe (1), a Y je partikularno rješenje zadane nehomogene jednadžbe (2).

Ako je poznat fundamentalan sistem rješenja $y_1, y_2, \dots, y_n$ homogene jednadžbe (1), onda opće rješenje pripadne nehomogene jednadžbe (2) možemo naći po formuli

$$y=C_1(x)\,y_1+C_2(x)\,y_2+\dots+C_n(x)\,y_n,$$

gdje su funkcije $C_i(x)$ $(i=1, 2, \dots, n)$ određene iz sistema jednadžbi

$$\left.\begin{array}{l}
C_1'(x)\,y_1+C_2'(x)\,y_2\qquad+\dots+C_n'(x)\,y_n=0,\\
C_1'(x)\,y_1'+C_2'(x)\,y_2'\qquad+\dots+C_n'(x)\,y_n'=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
C_1'(x)\,y_1^{(n-2)}+C_2'(x)\,y_2^{(n-2)}+\dots+C_n'(x)\,y_n^{(n-2)}=0,\\
C_1'(x)\,y_1^{(n-1)}+C_2'(x)\,y_2^{(n-1)}\quad+\dots+C_n'(x)\,y_n^{(n-1)}=f(x)
\end{array}\right\} \tag{3}$$

(*metoda varijacija po volji odaberivih konstanti*).

Primjer. Riješimo jednadžbu

$$xy''+y'=x^2. \tag{4}$$

Rješenje. Rješavanjem homogene jednadžbe

$$xy''+y'=0,$$

dobivamo:

$$y=C_1\ln x+C_2. \tag{5}$$

Prema tome možemo uzeti da je

$$y_1=\ln x \quad \text{i} \quad y_2=1$$

i rješenje jednaždbe (4) tražiti u obliku

$$y=C_1(x)\ln x+C_2(x).$$

Postavimo sistem jednadžbi (3) i uzmimo u obzir da je svedeni oblik jednadžbe (4) $y'' + \frac{y'}{x} = x$. Dobit ćemo

$$\begin{cases} C_1'(x)\ln x + C_2'(x)\cdot 1 = 0, \\ C_1'(x)\frac{1}{x} + C_2'(x)\cdot 0 = x. \end{cases}$$

Odatle je

$$C_1(x) = \frac{x^3}{3} + A \quad \text{i} \quad C_2(x) = -\frac{x^3}{3}\ln x + \frac{x^3}{9} + B$$

i prema tome je

$$y = \frac{x^3}{9} + A\ln x + B,$$

gdje su A i B po volji odaberive konstante.

2968. Ispitajte linearnu zavisnost ovih sistema funkcija:

a) $x,\ x+1$;
b) $x^2,\ -2x^2$;
c) $0,\ 1,\ x$;
d) $x,\ x+1,\ x+2$;
e) $x,\ x^2,\ x^3$;
f) $e^x,\ e^{2x},\ e^{3x}$;
g) $\sin x,\ \cos x,\ 1$;
h) $\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ 1$.

2969. Nađite linearne homogene diferencijalne jednadžbe ako je poznat njihov fundamentalni sistem rješenja:

a) $y_1 = \sin x, \quad y_2 = \cos x$;
b) $y_1 = e^x, \quad y_2 = xe^x$;
c) $y_1 = x, \quad y_2 = x^2$;
d) $y_1 = e^x, \quad y_2 = e^x \sin x, \quad y_3 = e^x \cos x$.

2970. Poznavajući fundamentalni sistem rješenja linearne homogene diferencijalne jednadžbe

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2, \quad y_3 = x^3,$$

nađite njeno partikularno rješenje y koje zadovoljava početne uvjete

$$y|_{x=1} = 0, \quad y'|_{x=1} = -1, \quad y''|_{x=1} = 2.$$

2971*. Riješite jednadžbu

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0,$$

ako vam je poznato njeno partikularno rješenje $y_1 = \frac{\sin x}{x}$.

2972. Riješite jednadžbu

$$x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0,$$

ako vam je poznato njeno partikularno rješenje $y_1 = x$.

Metodom varijacije konstanti riješite nehomogene linearne jednadžbe:

2973. $x^2y''-y'=3x^2$.

2974*. $x^2y''+xy'-y=x^2$.

2975. $y'''+y'=\sec x$.

12. Linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima

1°. Homogene jednadžbe. Linearna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima p i q bez desne strane ima oblik

$$y''+py'+qy=0. \tag{1}$$

Ako su k_1 i k_2 korijeni karakteristične jednadžbe

$$\varphi(k)\equiv k^2+pk+q=0, \tag{2}$$

onda opće rješenje jednadžbe (1) pišemo u jednom od ova tri oblika:

1) $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$, ako su k_1 i k_2 realni a $k_1\neq k_2$;

2) $y=e^{k_1x}(C_1+C_2x)$, ako je $k_1=k_2$;

3) $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$, ako su $k_1=\alpha+\beta i$ a $k_2=\alpha-\beta i\,(\beta\neq 0)$.

2°. Nehomogene jednadžbe. Opće rješenje linearne nehomogene diferencijalne jednadžbe

$$y''+py'+qy=f(x) \tag{3}$$

možemo pisati u obliku zbroja

$$y=y_0+Y,$$

gdje je y_0 opće rješenje pripadne jednadžbe (1) bez desne strane, određeno po formulama 1) do 3), a Y je partikularno rješenje zadane jednadžbe (3).

Funkciju Y možemo naći metodom *neodređenih koeficijenata* u ovim jednostavnim slučajevima:

1. $f(x)=e^{ax}P_n(x)$, gdje je $P_n(x)$ polinom n-tog stupnja.

   Ako a nije korijen karakteristične jednadžbe (2), tj. $\varphi(a)\neq 0$, onda stavljamo $Y=e^{ax}Q_n(x)$, gdje je $Q_n(x)$ polinom n-tog stupnja s neodređenim koeficijentima.

   Ako je a korijen karakteristične jednadžbe (2) tj. $\varphi(a)=0$, onda je $Y=x^re^{ax}Q_n(x)$, gdje je r višestrukost korijena a ($r=1$ ili $r=2$).

2. $f(x)=e^{ax}[P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx]$.

   Ako je $\varphi(a\pm bi)\neq 0$, onda stavljamo

$$Y=e^{ax}[S_N(x)\cos bx+T_N(x)\sin bx],$$

gdje su $S_N(x)$ i $T_N(x)$ polinomi stupnja $N=\max\{n, m\}$.

Ako je pak $\varphi(a\pm bi)=0$, onda je

$$Y=x^re^{ax}[S_N(x)\cos bx+T_N(x)\sin bx],$$

gdje je r višestrukost korijena $a\pm bi$ (za jednadžbe drugog reda $r=1$).

U općem slučaju se za rješavanje jednadžbe (3) primjenjuje *metoda varijacije konstanti* (vidi 11.)

Primjer 1. Nađimo opće rješenje jednadžbe $2y''-y'-y=4xe^{2x}$.

Rješenje. Karakteristična jednadžba $2k^2-k-1=0$ ima korijene $k_1=1$ i $k_2=-\frac{1}{2}$. Opće rješenje pripadne homogene jednadžbe (prvi oblik) glasi $y_0=C_1e^x+C_2e^{-x/2}$. Desna je strana zadane jednadžbe $f(x)=4xe^{2x}\equiv e^{ax}P_n(x)$. Prema tome je $Y=e^{2x}(Ax+B)$ jer je $n=1$ i $r=0$. Deriviramo li Y dva puta i uvrstimo derivacije u zadanu jednadžbu, dobivamo

$$2e^{2x}(4Ax+4B+4A)-e^{2x}(2Ax+2B+A)-e^{2x}(Ax+B)=4xe^{2x}.$$

Kraćenjem sa e^{2x} i izjednačenjem koeficijenata uz prve stupnjeve od x i slobodnih članova na lijevoj i desnoj strani jednadžbe imamo: $5A=4$ i $7A+5B=0$, odakle je $A=\frac{4}{5}$ a $B=-\frac{28}{25}$.

Na taj način, $Y=e^{2x}\left(\frac{4}{5}x-\frac{28}{25}\right)$, a opće rješenje zadane jednadžbe je

$$y=C_1e^x+C_2e^{-\frac{1}{2}x}+e^{2x}\left(\frac{4}{5}x-\frac{28}{25}\right).$$

Primjer 2. Nađimo opće rješenje jednadžbe $y''-2y'+y=x\,e^x$.

Rješenje. Karaketristična jednadžba $k^2-2k+1=0$ ima dvostruki korijen $k=1$. Desna strana jednadžbe ima oblik $f(x)=xe^x$; ovdje je $a=1$ i $n=1$. Partikularno je rešenje $Y=x^2e^x(Ax+B)$ jer se a poklapa s dvostrukim korijenom $k=1$, a iz toga je $r=2$.

Derivirajmo Y dva puta, uvrstimo u jednadžbu i izjednačimo koeficijente. Dobivamo $A=\frac{1}{6}$, $B=0$. Prema tome opće rješenje zadane jednadžbe glasi

$$y=(C_1+C_2x)\,e^x+\frac{1}{6}x^3e^x.$$

Primjer 3. Nađimo opće rješenje jednadžbe $y''+y=x\sin x$.

Rješenje. Karakteristična jednadžba $k^2+1=0$ ima korijene $k_1=i$ i $k_2=-i$. Opće rješenje pripadne homogene jednadžbe bit će [vidi 3), gdje je $=0$ i $\beta=1$]:

$$y_0=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Desna strana ima oblik

$$f(x)=e^{ax}[P_n(x)\cos bx=Q_m(x)\sin bx],$$

gdje je $a=0$, $b=1$, $P_n(x)=0$, $Q_m(x)=x$. Njoj odgovara partikularno rješenje

$$Y=x[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x]$$

(ovdje je $N=1$, $a=0$, $b=1$, $r=1$).

Derivirajmo dva puta i uvrstimo u jednadžbu, izjednačimo koeficijente u obje strane jednadžbe uz $\cos x$, $x\cos x$, $\sin x$ i $x\sin x$. Time ćemo dobiti četiri jednadžbe: $2A+2D=0$, $4C=0$, $-2B+2C=0$ i $-4A=1$, iz kojih izlazi da je $A=-1/4$, $B=0$, $C=0$, $D=1/4$.

Prema tome je $Y=-\frac{x^2}{4}\cos x+\frac{x}{4}\sin x$.

Opće rješenje je

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{x^2}{4}\cos x+\frac{x}{4}\sin x.$$

3°. Princip superpozicije rješenja. Ako je desna strana jednadžbe (3) suma više funkcija:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

a Y_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ su rješenja pojedinih jednadžbi

$$y'' + py' + qy = f_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots . n),$$

tada je suma

$$y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

rješenje jednadžbe (3).

Nađite opće rješenje jednadžbi:

2976. $y'' - 5y' + 6y = 0.$

2977. $y'' - 9y = 0.$

2978. $y'' - y' = 0.$

2979. $y'' + y = 0.$

2980. $y'' - 2y' + 2y = 0.$

2981. $y'' + 4y' + 13y = 0.$

2982. $y'' + 2y' + y = 0.$

2983. $y'' - 4y' + 2y = 0.$

2984. $y'' + ky = 0.$

2985. $y = y'' + y'.$

2986. $\dfrac{y' - y}{y''} = 3.$

Nađite partikularna rješenja koja zadovoljavaju navedene uvjete:

2987. $y'' - 5y' + 4y = 0;\quad y = 5,\ y' = 8$ za $x = 0.$

2988. $y'' + 3y' + 2y = 0;\quad y = 1,\ y' = -1$ za $x = 0.$

2989. $y'' + 4y = 0;\quad y = 0,\ y' = 2$ za $x = 0.$

2990. $y'' + 2y' = 0;\quad y = 1,\ y' = 0$ za $x = 0.$

2991. $y'' = \dfrac{y}{a^2};\quad y = a,\ y' = 0$ za $x = 0.$

2992. $y'' + 3y' = 0;\quad y = 0$ za $x = 0$ i $y = 0$ za $x = 3.$

2993. $y'' + \pi^2 y = 0;\quad y = 0$ za $x = 0$ i $y = 0$ za $x = 1.$

2994. Odredite oblik partikularnih rješenja za zadane nehomogene jednadžbe:

a) $y'' - 4y = x^2 e^{2x};$

b) $y'' + 9y = \cos 2x;$

c) $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x};$

d) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x;$

e) $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^x + xe^{2x};$

f) $y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos 2x - x^2 e^x \sin 2x.$

Nađite opće rješenje jednadžbi:

2995. $y'' - 4y' + 4y = x^2$.

2996. $y'' - y' + y = x^3 + 6$.

2997. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$.

2998. $y'' - 8y' + 7y = 14$.

2999. $y'' - y = e^x$.

3000. $y'' + y = \cos x$.

3001. $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$.

3002. $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$.

3003. $y'' - 2y' + y = \sin x + \operatorname{sh} x$.

3004. $y'' + y' = \sin^2 x$.

3005. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$.

3006. Nađite rješenje jednadžbe $y''+4y=\sin x$, koje zadovoljava uvjete $y=1$, $y'=1$ za $x=0$.

Riješite jednadžbe:

3007. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = A \sin pt$. Razmotrite slučaj: 1) $p \neq \omega$; 2) $p = \omega$.

3008. $y'' - 7y' + 12y = -e^{4x}$.

3009. $y'' - 2y' = x^2 - 1$.

3010. $y'' - 2y' + y = 2e^x$.

3011. $y'' - 2y' = e^{2x} + 5$.

3012. $y'' - 2y' - 8y = e^x - 8 \cos 2x$.

3013. $y'' + y' = 5x + 2e^x$.

3014. $y'' - y' = 2x - 1 - 3e^x$.

3015. $y'' + 2y' + y = e^x + e^{-x}$.

3016. $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x$.

3017. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + \frac{x}{2}$.

3018. $y'' - 3y' = x + \cos x$.

3019. Nađite rješenje jednadžbe $y''-2y'=e^{2x}+x^2-1$, koje zadovoljava uvjete: $y=\frac{1}{8}$, $y'=1$ za $x=0$.

Riješite jednadžbe:

3020. $y'' - y = 2x \sin x$.

3021. $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$.

3022. $y''+4y=2\sin 2x-3\cos 2x+1$.

3023. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \sin x$.

3024. $y'' = xe^x + y$.

3025. $y'' + 9y = 2x \sin x + xe^{3x}$.

3026. $y'' - 2y' - 3y = x(1+e^{3x})$.

3027. $y'' - 2y' = 3x + 2xe^x$.

3028. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$.

3029. $y''+2y'-3y=2xe^{-3x}+(x+1)e^x$.

3030*. $y'' + y = 2x \cos x \cos 2x$.

3031. $y'' - 2y = 2xe^x(\cos x - \sin x)$.

Primjenom metode varijacije konstanata riješite jednadžbe:

3032. $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

3033. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.

3034. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

3035. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$.

3036. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

3037. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

3038. a) $y'' - y = \operatorname{th} x$; b) $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$.

3039. Dva jednaka tereta obješena su na kraju opruge. Nađite jednadžbu gibanja koje će vršiti jedan teret kada drugi otpadne.

Rješenje. Neka produljenje opruge pod djelovanjem jednog tereta u stanju mirovanja iznosi a, a masa tereta m. Označimo sa x koordinatu tereta računajući po vertikali od položaja ravnoteže kada je obješen jedan teret. Tada je

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x + a),$$

gdje je očigledno $k = \frac{mg}{a}$, a odatle i $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{a}x$.

Opće rješenje je

$$x = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{a}}\, t + C_2 \sin \sqrt{\frac{g}{a}}\, t.$$

Početni uvjeti daju $x = a$ i $\frac{dx}{dt} = 0$ za $t = 0$; odatle je $C_1 = a$ i $C_2 = 0$, pa je dakle

$$x = a \cos \sqrt{\frac{g}{a}}\, t.$$

3040*. Sila koja rasteže oprugu proporcionalna je njenom produljenju i iznosi 1 kp kada se duljina poveća za 1 cm. Na oprugu je obješen teret težine 2 kp. Nađite period titranja koje nastane kada taj teret lagano povučete dolje i zatim ispustite.

3041*. Teret težine $P = 4$ kp obješen je na oprugu i produlji je za 1 cm. Nađite zakon gibanja tereta ako gornji kraj opruge vrši vertikalno harmonijsko titranje $y = 2 \sin 30t$ cm, a u početnom trenutku teret se nalazi u mirovanju (otpor sredine je zanemaren).

3042. Materijalnu tačku mase m privlače dva središta silama koje su proporcionalne udaljenosti (koeficijent proporcionalnosti je k). Nađite zakon gibanja tačke ako znate da je međusobna udaljenost središta $2b$ i da se u početnom trenutku tačka nalazila na dužini koja spaja središta, na udaljenosti c od njenog polovišta, i da je početna brzina bila nula.

3043. Lanac duljine 6 m skliže nadolje s podloge bez trenja. Ako gibanje započne u trenutku kada visi 1 m lanca, za koliko vremena će odklizati čitav lanac?

3044*. Uska duga cijev vrti se konstantnom kutnom brzinom ω oko na nju okomite, vertikalne osi. Kuglica koja je u cijevi kliže po njoj bez trenja. Nađite zakone gibanja kuglice s obzirom na cijev smatrajući da je

a) u početnom trenutku kuglica bila udaljena za a od osi rotacije a početna brzina kuglice bila nula;

b) u početnom trenutku kuglica bila na osi rotacije i imala početnu brzinu v_0.

13. Linearne diferencijalne jednadžbe višega od drugog reda s konstantnim koeficijentima

1°. Homogena jednadžba. Fundamentalni sistem rješenja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ homogene linearne jednadžbe s konstantnim koeficijentima

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{1}$$

postavlja se na osnovu karaktera korijena karakteristične jednadžbe

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0. \tag{2}$$

Napose: 1) ako je h realni korijen jednadžbe (2) višestrukosti m, onda mu odgovara m linearno nezavisnih rješenja jednadžbe (1):

$$y_1 = e^{kx}, \quad y_2 = xe^{kx}, \quad \ldots, \quad y_m = x^{m-1} e^{kx};$$

2) ako je $\alpha \pm \beta i$ par kompleksnih korijena jednadžbe (2) višestrukosti m onda mu odgovara $2m$ linearno nezavisnih rješenja jednadžbe (1):

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \; y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x, \; y_3 = xe^{\alpha x} \cos \beta x, \; y_4 = xe^{\alpha x} \sin \beta x, \ldots$$
$$\ldots, \; y_{2m-1} = x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \; y_{2m} = x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

2°. Nehomogena jednadžba. Partikularno rješenje nehomogene jednadžbe

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{3}$$

tražimo na osnovu pravila 12, 2° i 3°.

Nađite opće rješenje jednadžbi:

3045. $y''' - 13y'' + 12y' = 0.$

3046. $y''' - y' = 0.$

3047. $y''' + y = 0.$

3048. $y^{IV} - 2y'' = 0.$

3049. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

3050. $y^{IV} + 4y = 0.$

3051. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0.$

3052. $y^{IV} + y' = 0.$

3053. $y^{IV} - 2y'' + y = 0.$

3054. $y^{IV} - a^4 y = 0 \; (a \neq 0).$

3055. $y^{IV} - 6y'' + 9y = 0.$

3056. $y^{IV} + a^2 y'' = 0.$

3057. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0.$

3058. $y^{IV} + 2y'' + y = 0.$

3059. $y^{(n)} + \frac{n}{1} y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y^{(n-2)} + \ldots + \frac{n}{1} y' + y = 0.$

3060. $y^{IV} - 2y''' + y'' = e^x.$

3061. $y^{IV} - 2y''' + y'' = x^3.$

3062. $y''' - y = x^3 - 1.$

3063. $y^{IV} + y''' = \cos 4x.$

3064. $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x.$

3065. $y''' + y'' + y' + y = xe^x.$

3066. $y''' + y' = \operatorname{tg} x \sec x.$

3067. Nađite partikularno rješenje jednadžbe

$$y''' + 2y'' + 2y' + y = x,$$

koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$

14. Eulerova jednadžba

Linearnu jednadžbu oblika

$$(ax+b)^n y^{(n)} + A_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1} (ax+b) y' + A_n y = f(x), \qquad (1)$$

gdje su a, b, $A_1, \ldots, A_{n-1}$ konstante, nazivamo *Eulerovom jednadžbom*.

Za područje $ax+b>0$ uvodimo novu nezavisnu varijablu t stavljajući

$$ax+b = e^t.$$

Tada je

$$y' = ae^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad y'' = a^2 e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

$$y''' = a^3 e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) \quad \text{itd.}$$

i Eulerova jednadžba se transformira u linearnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima.

Primjer 1. Riješimo jednadžbu $x^2y''+xy'+y=1$.

Rješenje. Stavivši $x=e^t$ dobivamo:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Prema tome zadana jednadžba prima oblik

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 1,$$

odakle je

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t = 1$$

ili

$$y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) + 1.$$

Za homogenu Eulerovu jednadžbu

$$x^n y^{(n)} + A_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1} x y' + A_n y = 0 \qquad (2)$$

kada je $x>0$ možemo rješenje tražiti u obliku

$$y = x^k. \qquad (3)$$

Uvrstimo li u (2) $y, y', \ldots, y^{(n)}$ koji se određuju iz relacije (3), dobivamo karakterističnu jednadžbu iz koje možemo naći eksponent k.

Ako je k realni korijen karakteristične jednadžbe višestrukosti m, onda mu odgovara m linearno nezavisnih rješenja

$$y_1 = x^k, \quad y_2 = x^k \ln x, \quad y_3 = x^k (\ln x)^2, \quad \ldots, \quad y_m = x^k (\ln x)^{m-1}.$$

Ako je $\alpha \pm \beta i$ par kompleksnih korijena višestrukosti m, onda mu odgovara $2m$ linearno nezavisnih rješenja

$$y_1 = x^\alpha \cos(\beta \ln x), \quad y_2 = x^\alpha \sin(\beta \ln x), \quad y_3 = x^\alpha \ln x \cos(\beta \ln x),$$

$$y_4 = x^\alpha \ln x \sin(\beta \ln x), \quad \ldots, \quad y_{2m-1} = x^\alpha (\ln x)^{m-1} \cos(\beta \ln x),$$

$$y_{2m} = x^\alpha (\ln x)^{m-1} \sin(\beta \ln x).$$

Primjer 2. Riješimo jednadžbu

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0.$$

Rješenje. Stavimo

$$y = x^k; \quad y' = kx^{k-1}, \quad y'' = k(k-1)x^{k-2}.$$

Uvrštenjem u zadanu jednadžbu nakon kraćenja sa x^k izlazi karakteristična jednadžba

$$k^2 - 4k + 4 = 0.$$

Kada je riješimo, dobijemo:

$$k_1 = k_2 = 2,$$

pa je prema tome opće rješenje

$$y = C_1x^2 + C_2x^2 \ln x.$$

Riješite jednadžbe:

3068. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3x\dfrac{dy}{dx} + y = 0.$

3069. $x^2y'' - xy' - 3y = 0.$

3070. $x^2y'' + xy' + 4y = 0.$

3071. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0.$

3072. $(3x+2)y'' + 7y' = 0.$

3073. $y'' = \dfrac{2y}{x^2}.$

3074. $y'' + \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = 0.$

3075. $x^2y'' - 4xy' + 6y = x.$

3076. $(1+x)^2y'' - 3(1+x)y' + 4y = (1+x)^3.$

3077. Nađite partikularno rješenje jednadžbe

$$x^2y'' - xy' + y = 2x,$$

koje zadovoljava početne uvjete: $y = 0$, $y' = 1$ za $x = 1$.

15. Sistemi diferencijalnih jednadžbi

Metoda eliminacije. Da nađemo rješenje, na primjer, normalnog sistema dviju diferencijalnih jednadžbi prvog reda, tj. sistema oblika

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\ y,\ z), \quad \frac{dz}{dx} = g(x,\ y,\ z), \tag{1}$$

riješenog s obzirom na derivacije traženih funkcija y i z, deriviramo jednu od njih po x. Imamo na primjer:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}f + \frac{\partial f}{\partial z}g. \tag{2}$$

Odredimo li z iz prve jednadžbe sistema (1) i uvrstimo nađeni izraz

$$z = \varphi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) \tag{3}$$

u jednadžbu (2), dobivamo jednadžbu drugog reda s jednom nepoznatom funkcijom y. Rješavanjem te jednadžbe izlazi:

$$y = \psi(x, C_1, C_2), \tag{4}$$

gdje su C_1 i C_2 po volji odaberive konstate. Uvrštenje funkcije (4) u formulu (3) daje funkciju z bez novih integracija. Formule (3) i (4) gdje je y u formuli (3) zamijenjen sa ψ, daju *opće rješenje sistema* (1).

Primjer 1. Riješimo sistem

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 2y + 4z = 1 + 4x, \\[2mm] \dfrac{dz}{dx} + y - z = \dfrac{3}{2}x^2. \end{cases}$$

Rješenje. Derivirajmo prvu jednadžbu po x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 4\frac{dz}{dx} = 4.$$

Iz prve jednadžbe izlazi $z = \dfrac{1}{4}\left(1 + 4x - \dfrac{dy}{dx} - 2y\right)$ i time ćemo iz druge dobiti: $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{3}{2}x^2 + x + \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{2}y - \dfrac{1}{4}\dfrac{dy}{dx}$. Uvrštenjem z i $\dfrac{dz}{dx}$ u jednadžbu koju smo dobili nakon deriviranja dolazimo do jednadžbe drugog stupnja s jednom nepoznanicom y:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = -6x^2 - 4x + 3.$$

Kada je riješimo, dobivamo

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} + x^2 + x,$$

i odatle

$$z = \frac{1}{4}\left(1 + 4x - \frac{dy}{dx} - 2y\right) = -C_1e^{2x} + \frac{C_2}{4}e^{-3x} - \frac{1}{2}x^2.$$

Analogno se može postupati kada se radi o sistemu s većim brojem jednadžbi.

Riješite sisteme:

3078. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z, \\[2mm] \dfrac{dz}{dx} = -y. \end{cases}$

3079. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + 5z, \\[2mm] \dfrac{dz}{dx} + y + 3z = 0. \end{cases}$

3080. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -3y - z, \\[2mm] \dfrac{dz}{dx} = y - z. \end{cases}$

3081. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = z, \\[2mm] \dfrac{dz}{dt} = x. \end{cases}$

3082. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y+z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x+z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x+y. \end{cases}$$

3083. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y+z, \\ \dfrac{dz}{dx} = x+y+z. \end{cases}$$

3084. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 2y+z = \sin x, \\ \dfrac{dz}{dx} - 4y-2z = \cos x. \end{cases}$$

3085. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 3y+4z = 2x, \\ \dfrac{dz}{dx} - y-z = x, \end{cases} \qquad y=0, \quad z=0 \text{ za } x=0.$$

3086. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 4x-y+36t = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x-y+2e^t = 0; \end{cases} \qquad x=0, \quad y=1 \text{ za } t=0.$$

3087. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{2}y. \end{cases}$$

3088*. a) $\dfrac{dx}{x^3+3xy^2} = \dfrac{dy}{2y^3} = \dfrac{dz}{2y^2z}$; b) $\dfrac{dx}{x-y} = \dfrac{dy}{x+y} = \dfrac{dz}{z}$;

c) $\dfrac{dx}{y-z} = \dfrac{dy}{z-x} = \dfrac{dz}{x-y}$, odvojite integralnu krivulju koja prolazi tačkom (1; 1; −2).

3089. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + z = 1, \\ \dfrac{dz}{dx} + \dfrac{2}{x^2}y = \ln x. \end{cases}$$

3090. $$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2y+4z = e^x, \\ \dfrac{d^2z}{dx^2} - y-3z = -x. \end{cases}$$

3091.** Tane izleti iz oruđa početnom brzinom v_0 pod kutom α prema horizontu. Nađite jednadžbu gibanja taneta uzevši da je otpor zraka proporcionalan brzini.

3092*. Materijalnu tačku M privlači središte O silom koja je proporcionalna udaljenosti. Gibanje započinje u tački A udaljenoj za a od središta, početnom brzinom v_0 koja je okomita na dužinu OA. Nađite trajektoriju tačke M.

16. Integriranje diferencijalnih jednadžbi pomoću redova potencija

Ako integriranje diferencijalnih jednadžbi elementarnim funkcijama nije provedivo, onda rješenje jednadžbe u nekim slučajevima možemo tražiti u obliku reda potencija

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n. \tag{1}$$

Neodređeni koeficijenti c_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ određuju se uvrštenjem reda (1) u jednadžbu i izjednačenjem koeficijenata uz jednake potencije binoma $x - x_0$ na lijevoj i desnoj strani dobivene jednadžbe.

Rješenje jednadžbe

$$y' = f(x, y); \tag{2}$$

gdje je $y(x_0) = y_0$, možemo također tražiti u obliku Taylorova reda

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \tag{2}$$

gdje je $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, i daljnje se derivacije $y^{(n)}(x_0)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ postepeno nalaze pomoću deriviranja jednadžbe (2) i uvrštenja x_0 umjesto x.

Primjer 1. Nađimo rješenje jednadžbe $y'' - xy = 0$, ako je $y = y_0$ i $y' = y_0'$ za $x = 0$.

Rješenje. Stavimo da je

$$y = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots,$$

odatle deriviranjem dobivamo:

$$y'' = 2 \cdot 1 c_2 + 3 \cdot 2 c_3 x + \ldots + n(n-1) c_n x^{n-2} + (n+1) n c_{n+1} x^{n-1} + (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + \ldots$$

Uvrštenjem y i y'' u zadanu jednadžbu izlazi identitet

$$[2 \cdot 1 c_2 + 3 \cdot 2 c_3 x + \ldots + n(n-1) c_n x^{n-2} + (n+1) n c_{n+1} x^{n-1} + \\ + (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + \ldots] - x[c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots] \equiv 0.$$

Kada na lijevoj strani dobivene jednadžbe zbrojimo članove s jednakim potencijama od x i koeficijente uz te potencije izjednačimo s nulom, imat ćemo:

$$c_2 = 0; \quad 3 \cdot 2 c_3 - c_0 = 0, \quad c_3 = \frac{c_0}{3 \cdot 2}; \quad 4 \cdot 3 c_4 - c_1 = 0, \quad c_4 = \frac{c_1}{4 \cdot 3};$$

$$5 \cdot 4 c_5 - c_2 = 0, \quad c_5 = \frac{c_2}{5 \cdot 4} \text{ itd.}$$

Općenito je

$$c_{3k} = \frac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (3k-1) 3k}, \quad c_{3k+1} = \frac{c_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 3k(3k+1)},$$

$$c_{3k+2} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Prema tome je

$$y = c_0 \left(1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots + \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (3k-1) 3k} + \ldots \right) + \\ + c_1 \left(x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots + \frac{x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 3k(3k+1)} + \ldots \right), \tag{4}$$

gdje je $c_0 = y_0$ i $c_1 = y_0'$.

Primijenivši D'Alembertov kriterij lako ćemo se uvjeriti da red (4) konvergira za $-\infty < x < +\infty$.

Primjer 2. Nađimo rješenje jednadžbe

$$y' = x + y; \quad y_0 = y(0) = 1.$$

Rješenje. Stavimo

$$y = y_0 + y'_0 x + \frac{y''_0}{2!} x^2 + \frac{y'''_0}{3!} x^3 + \dots$$

Imamo $y_0 = 1$, $y'_0 = 0 + 1 = 1$. Derivirajmo obje strane jednadžbe $y' = x + y$, pa ćemo redom dobiti $y'' = 1 + y'$, $y''_0 = 1 + 1 = 2$, $y''' = y''$, $y'''_0 = 2$ itd. Prema tome je

$$y = 1 + x + \frac{2}{2!} x^2 + \frac{2}{3!} x^3 + \dots$$

Rješenje analiziranog primjera možemo pisati u konačnom obliku

$$y = 1 + x + 2(e^x - 1 - x) \quad \text{ili} \quad y = 2e^x - 1 - x.$$

Analogno treba postupati u slučaju diferencijalnih jednadžbi višeg reda. Ispitivanje konvergencije dobivenih redova, općenito je složeno i pri rješavanju zadataka iz ovoga paragrafa nije obavezno.

Nađite pomoću redova potencija rješenja jednadžbi uz navedene početne uvjete.

U zadacima 3097, 3098, 3099, 3101 ispitajte konvergenciju dobivenih rješenja.

3093. $y' = y + x^2; \quad y = -2$ za $x = 0$.

3094. $y' = 2y + x - 1; \quad y = y_0$ za $x = 1$.

3095. $y' = y^2 + x^3; \quad y = \frac{1}{2}$ za $x = 0$.

3096. $y' = x^2 - y^2; \quad y = 0$ za $x = 0$.

3097. $(1 - x) y' = 1 + x - y; \quad y = 0$ za $x = 0$.

3098*. $x y'' + y = 0; \quad y = 0, \quad y' = 1$ za $x = 0$.

3099. $y'' + x y = 0; \quad y = 1, \quad y' = 0$ za $x = 0$.

3100*. $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0; \quad y = 1, \quad y' = 0$ za $x = 0$.

3101*. $y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0; \quad y = 1, \quad y' = 0$ za $x = 0$.

3102. $\frac{d^2 x}{dt^2} + x \cos t = 0; \quad x = a; \quad \frac{dx}{dt} = 0$ za $t = 0$.

17. Zadaci za Fourierovu metodu

Za traženje rješenja linearne homogene parcijalne diferencijalne jednadžbe po Fourierovoj metodi najprije tražimo partikularna rješenja specijalnog tipa te jednadžbe, od kojih je svako produkt funkcija ovisnih samo o jednom argumentu. U jednostavnom slučaju imamo beskonačan skup takvih rješenja u_n $(n = 1, 2, \ldots)$, linearno međusobno nezavisnih u bilo kojem konačnom broju, i koja zadovoljavaju zadane *rubne uvjete*. Traženo rješenje u predočujemo u obliku reda razvijenog po tim partikularnim rješenjima:

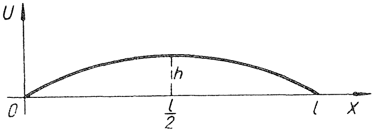
$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n. \tag{1}$$

Preostali neodređeni koeficijenti C_n određuju se iz *početnih uvjeta.*

Zadatak: Poprečni pomak $u = u(x, t)$ tačaka žice s apscisom x u trenutku t zadovoljava jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2}$$

gdje je $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ (T_0 je napetost, ρ je linearna gustoća žice). Nađimo oblik žice u trenutku t, ako su njeni krajevi $x = 0$ i $x = l$ učvršćeni, a u početnom trenutku $t = 0$ žica je imala oblik parabole $u = \frac{4h}{l^2} x(l-x)$ (sl. 107) i njene tačke imale su brzinu jednaku nuli.



Slika 107.

Rješenje. U skladu s uvjetima zadatka treba naći rješenje $u = u(x, t)$ jednadžbe (2) koje zadovoljava rubne uvjete:

$$u(0, t) = 0, \qquad u(l, t) = 0 \tag{3}$$

i početne uvjete:

$$u(x, 0) = \frac{4h}{l^2} x(l-x), \qquad u_t'(x, 0) = 0. \tag{4}$$

Tražimo netrivijalno rješenje jednadžbe (2) specijalnog oblika

$$u = X(x)\, T(t).$$

Kada taj izraz uvrstimo u jednadžbu (2) i separiramo varijable, dobivamo:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{5}$$

Kako su varijable x i t nezavisne, to je identitet (5) moguć samo tada, kada je zajednička vrijednost omjera (5) konstantna. Ako tu konstantu označimo sa $-\lambda^2$, dobivamo dvije obične diferencijalne jednadžbe:

$$T''(t) + (a\lambda)^2 \cdot T(t) = 0 \quad \text{i} \quad X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Rješenje tih jednadžbi daje:

$$T(t) + A \cos a\lambda t + B \sin a\lambda t,$$

$$X(x) = C \cos \lambda x + D \sin \lambda x,$$

gdje su A, B, C, D po volji odaberive konstante. Iz uvjeta (3) imamo: $X(0) = 0$ i $X(l) = 0$ iz čega slijedi da je $C = 0$ i $\sin \lambda l = 0$ (jer D ne može istodobno sa C biti jednak nuli). Prema tome je $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$ gdje je k cio broj.

Lako se možemo uvjeriti da ne smanjujemo općenitost ako za k uzmemo samo pozitivne vrijednosti ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Svakoj vrijednosti λ_k odgovara partikularno rješenje

$$u_k = \left(\mathrm{A}_k \cos \frac{ka\pi}{l} t + \mathrm{B}_k \sin \frac{ka\pi}{l} t \right) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

koje zadovoljava rubne uvjete (3).

Postavimo red

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathrm{A}_k \cos \frac{ka\pi t}{l} + \mathrm{B}_k \sin \frac{ka\pi t}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

kojeg suma, očigledno, zadovoljava jednadžbu (2) i rubne uvjete (3).

Izaberimo konstante A_k i B_k tako da suma reda zadovoljava početne uvjete (4). Kako je

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ka\pi}{l} \left(- \mathrm{A}_k \sin \frac{ka\pi t}{l} + \mathrm{B}_k \cos \frac{ka\pi t}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

to za $t = 0$ dobivamo

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}_k \sin \frac{k\pi x}{l} \equiv \frac{4h}{l^2} x(l - x)$$

i

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ka\pi}{l} \mathrm{B}_k \sin \frac{k\pi x}{l} \equiv 0.$$

Iz toga slijedi da za određivanje koeficijenata A_k i B_k treba razviti u Fourierov red po samim sinusima funkciju $u(x, 0) = \frac{4h}{l^2} x(l-x)$ i funkciju $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \equiv 0$.

Po poznatim formulama (glava VIII.4.3°) imamo:

$$\mathrm{A}_k = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{4h}{l^2} x(l - x) \sin \frac{k\pi x}{l} \, dx = \frac{32h}{\pi^3 k^3},$$

ako je k neparno, i $\mathrm{A}_k = 0$, ako je k parno;

$$\frac{ka\pi}{l} \mathrm{B}_k = \frac{2}{l} \int_0^l 0 \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \, dx = 0, \quad \mathrm{B}_k = 0.$$

Traženo rješenje će biti

$$u = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n+1) a\pi t}{l}}{(2n+1)^3} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

3103*. U početnom trenutku $t = 0$ je žica, koja je učvršćena na krajevima $x = 0$ i $x = l$, imala oblik sinusoide $u = A \sin \frac{\pi x}{l}$, pri čemu su brzine njenih tačaka bile jednake nuli. Nađite oblik žice u trenutku t.

3104*. U početnom trenutku $t=0$ tačke pravocrtne žice $0<x<l$ dobile su brzinu $\frac{\partial u}{\partial t}=1$. Nađite oblik žice u trenutku t, ako su njeni krajevi $x=0$ i $x=l$ učvršćeni (vidite zadatak 3103).

3105*. Žica duljine $l=100$ cm učvršćena na krajevima $x=0$ i $x=l$ u početnom trenutku potegnuta je u tački $x=50$ cm na udaljenost $h=2$ cm, a zatim ispuštena bez udarca. Odredite oblik žice u bilo kom trenutku t.

3106*. Pri uzdužnom titranju tanke homogene ravne šipke kojoj se os poklapa s osi OX, pomak $u=u(x, t)$ poprečnog presjeka šipke s apscisom x u trenutku t zadovoljava jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

gdje je $a^2=\frac{E}{\rho}$ (E je Youngov modul, ρ gustoća šipke). Odredite uzdužna titranja elastične horizontalne šipke duljine $l=100$ cm ukliještene na kraju $x=0$ i potegnute na kraju $x=100$ na duljinu $\Delta l=1$ cm, a zatim otpuštene bez udarca.

3107*. Za ravnu homogenu šipku kojoj se os poklapa s osi OX, temperatura $u=u(x, t)$ u presjeku s apscisom x u trenutku t kada nema izvora topline zadovoljava jednadžbu vođenja topline

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

gdje je a konstanta. Odredite raspored temperature za bilo koji trenutak t u šipki dugoj $l=100$ cm ako je poznata početna razdioba temperature

$$u(x,\ 0)=0{,}01x(100-x).$$

GLAVA X

PRIBLIŽNI RAČUN

1. Računanje s približnim vrijednostima

1° Apsolutna pogreška. *Apsolutnom pogreškom (apsolutnom greškom)* približnog broja a koji zamjenjuje tačan broj A, nazivamo apsolutnu vrijednost njihove međusobne razlike. Broj Δ, koji zadovoljava nejednadžbu

$$|A-a| \leqslant \Delta, \tag{1}$$

nazivamo *krajnjom apsolutnom pogreškom*. Tačni broj A nalazi se u granicama $a-\Delta \leqslant A \leqslant a+\Delta$ ili kraće $A = a \pm \Delta$.

2°. Relativna pogreška. Pod *relativnom pogreškom (relativnom greškom)* približnog broja a, koji zamjenjuje tačan broj A $(A > 0)$, razumijevamo omjer apsolutne pogreške broja a i tačnog broja A. Broj δ koji zadovoljava nejednadžbu

$$\frac{|A-a|}{A} \leqslant \delta, \tag{2}$$

nazivamo *krajnjom relativnom pogreškom* približnog broja a. Kako je u praksi $A \approx a$ to za krajnju relativnu pogrešku često uzimamo broj $\delta = \dfrac{\Delta}{a}$.

3 . Broj tačnih decimalnih znamenaka. Kažemo da pozitivan približan broj a, napisan u obliku decimalnog razvoja, ima *n tačnih decimalnih znamenaka* (brojaka) *u užem smislu*, ako apsolutna pogreška tog broja ne prelazi $\dfrac{1}{2}$ jedinice n-tog reda. Kada je $n > 1$ tada za krajnju relativnu pogrešku možemo uzeti broj

$$\delta = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1},$$

gdje je k prva značajna brojka broja a. Obrnuto, kada znamo da je $\delta \leqslant \dfrac{1}{2(k+1)}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$, tada broj a ima n tačnih decimalnih znamenaka u užem smislu. Napose će broj a bezuvjetno imati n tačnih znamenaka u užem smislu ako je $\delta \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n}$.

Ako apsolutna pogreška približnog broja a nije veća od jedinice posljednjeg reda (takvi su na primjer brojevi koji se pojavljuju pri mjerenju s tačnosti do odgovarajuće jedinice), onda kažemo da su sve decimalne znamenke tog približnog broja *tačne u širem smislu*. Kada u konačnom rezultatu približnog računa imamo više značajnih brojaka, tada obično posljednju brojku zaokružujemo tako da sve preostale brojke budu tačne u užem ili širem smislu.

U daljnjem ćemo pretpostaviti da su sve brojke napisanih početnih podataka tačne u užem smislu (ako nije drukčije dogovoreno). Rezultati međuračuna mogu međutim imati jednu do dvije rezervne brojke.

Napomenimo da su primjeri ovog paragrafa u pravilu konačni rezultati računa i prema tome su odgovori približni brojevi u kojima su sadržane samo tačne decimalne znamenke.

U daljnjim uvodnim izlaganjima bit će dane samo kratke upute: detaljnije treba potražiti u specijalnoj literaturi.

4°. Zbrajanje i oduzimanje približnih brojeva. Krajnja apsolutna pogreška algebarskog zbroja više brojeva jednaka je zbroju krajnjih apsolutnih pogrešaka tih brojeva. Prema tome, da bismo u zbroju malog broja približnih brojeva sa samim tačnim decimalnim znamenkama imali samo tačne brojke (barem u širem smislu) treba prikratiti sve pribrojnike po uzoru na onog pribbrojnika kojemu je decimalni zapis prekinut prije nego kod ostalih, sačuvavši u svakom od njih rezervnu znamenku. Nakon toga zbrojimo dobivene brojeve kao tačne i zaokružimo sumu na jednu znamenku.

Ako želimo zbrojiti nezaokružene približne brojeve, treba da ih zaokružimo tako da u svakom pribrojniku zadržimo jednu do dvije rezervne znamenke, a zatim, da se ravnamo prema prije navedenom pravilu zbrajanja, zadržavši odgovarajuće suvišne znamenke do kraja računa.

Primjer 1. $215{,}21+14{,}182+21{,}4=215{,}2(1)+14{,}1(8)+21{,}4=250{,}8.$

Relativna pogreška zbroja pozitivnih pribrojnika nije veća od najveće relativne pogreške pojedinih pribrojnika.

Relativna pogreška razlike ne pokorava se običnom odbijanju. U tome pogledu naročito je neugodna razlika dvaju bliskih brojeva.

Primjer 2. Pri oduzimanju približnih brojeva 6,135 i 6,131 sa četiri tačne decimalne znamenke dobivamo razliku 0,004. Krajnja relativna pogreška je $\delta=\dfrac{\frac{1}{2}\,0{,}001+\frac{1}{2}\,0{,}001}{0{,}004}=\dfrac{1}{4}=0{,}25$; prema tome ni jedna znamenka razlike nije pouzdana. Stoga po mogućnosti treba izbjegavati odbijanje međusobno bliskih približnih brojeva i u slučaju potrebe transformirati zadani izraz tako da se ta nepoželjna operacija izbjegne.

5°. Množenje i dijeljenje približnih brojeva. Krajnja relativna pogreška produkta i kvocijenta približnih brojeva jednaka je zbroju krajnjih relativnih pogrešaka tih brojeva. Na osnovu toga i primjenom pravila za broj tačnih znamenaka (3°), u rezultatu zadržimo samo određeni broj znamenaka.

Primjer 3. Produkt približnih brojeva $25{,}3\cdot 4{,}12=104{,}236$.

Pretpostavimo da su sve znamenke u faktorima tačne pa dobivamo da je krajnja relativna pogreška produkta

$$\delta=\frac{1}{2\cdot 2}\,0{,}01+\frac{1}{4\cdot 2}\,0{,}01\approx 0{,}003.$$

Odatle dobivamo da su u produktu tri tačne znamenke, i rezultat, ako je konačan, treba napisati ovako: $25{,}3\cdot 4{,}12=104$ ili tačnije $25{,}3\cdot 4{,}12=104{,}2\pm 0{,}3$.

6°. Potenciranje i korjenovanje približnih brojeva. Krajnja relativna pogreška m-te potencije približnog broja a je m-struka krajnja relativna pogreška tog broja.

Krajnja relativna pogreška m-tog korijena iz približnog broja a je $\dfrac{1}{m}$-ti dio krajnje relativne pogreške broja a.

7°. Određivanje pogreške rezultata raznih matematičkih operacija s približnim brojevima. Ako su $\Delta a_1,\ldots,\Delta a_n$ granične apsolutne pogreške približnih brojeva $a_1,\ldots,a_n$, onda graničnu apsolutnu pogrešku ΔS rezultata

$$S=f(a_1,\ \ldots,\ a_n)$$

možemo približno ocijeniti po formuli

$$\Delta S=\left|\frac{\partial f}{\partial a_1}\right|\Delta a_1+\ldots+\left|\frac{\partial f}{\partial a_n}\right|\Delta a_n.$$

Granična relativna pogreška za $S=0$ je tada

$$\delta S=\frac{\Delta S}{|S|}=\left|\frac{\partial f}{\partial a_1}\right|\cdot\frac{\Delta a_1}{|f|}+\ldots+\left|\frac{\partial f}{\partial a_n}\right|\frac{\Delta a_n}{|f|}=\left|\frac{\partial \ln f}{\partial a_1}\right|\Delta a_1+\ldots+\left|\frac{\partial \ln f}{\partial a_n}\right|\Delta a_n.$$

Primjer 4. Izračunajmo $S = \ln(10{,}3 + \sqrt{4{,}4})$; približni brojevi 10,3 i 4,4 tačni su u svim napisanim znamenkama.

Rješenje. Izračunajmo najprije krajnju apsolutnu pogrešku ΔS u obliku: $S = \ln(a + \sqrt{b})$,

$$\Delta S = \frac{1}{a + \sqrt{b}}\left(\Delta a + \frac{1}{2}\,\frac{\Delta b}{\sqrt{b}}\right). \quad \text{Imamo } \Delta a = \Delta b \approx \frac{1}{20}; \quad \sqrt{4{,}4} = 2{,}0976\ldots;$$

napišemo 2,1 jer je relativna pogreška približnog broja $\sqrt{4{,}4} \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{80}$;

apsolutna je pogreška tada $\approx 2 \cdot \frac{1}{80} = \frac{1}{40}$; za desetinke možemo jamčiti.

Prema tome je

$$\Delta S = \frac{1}{10{,}3 + 2{,}1}\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20 \cdot 2{,}1}\right) = \frac{1}{12{,}4 \cdot 20}\left(1 + \frac{1}{4{,}2}\right) = \frac{13}{2604} \approx 0{,}005.$$

Znači da će stotinke biti tačne.

Sada provedimo račun s jednom rezervnom znamenkom:

$$\lg(10{,}3 + \sqrt{4{,}4}) \approx \lg 12{,}4 = 1{,}093; \quad \ln(10{,}3 + \sqrt{4{,}4}) \approx 10{,}93 \cdot 2{,}303 = 2{,}517.$$

Dobivamo odgovor: 2,52.

8°. Utvrđivanje dopustivih pogrešaka približnih brojeva u matematičkim operacijama kada je zadana pogreška rezultata. Primjenom formula iz prethodnog stavka 7° kada su nam zadane vrijednosti ΔS ili δS smatrajući pri tome da su svi parcijalni diferencijali $\left|\frac{\partial f}{\partial a_k}\right| \Delta a_k$ ili vrijednosti $\left|\frac{\partial f}{\partial a_k}\right| \frac{\Delta a_k}{|f|}$ međusobno jednake, izračunamo dopustive apsolutne pogreške $\Delta a_1, \ldots, \Delta a_n, \ldots$ ili pripadno, relativne pogreške $\delta a_1, \ldots, \delta a_n$ približnih brojeva $a_1, \ldots, a_n \ldots$, koji ulaze u matematičku operaciju (*princip jednakih utjecaja*).

Treba napomenuti da pri računanju dopustivih pogrešaka argumenata funkcija ponekad nije pogodno primijeniti princip jednakih utjecaja jer to može značiti praktički neispunjive zahtjeve. U tim slučajevima preporuča se razumna raspodjela pogrešaka, po mogućnosti takva da sumarna pogreška ne bude veća od zadane vrijednosti. Na taj način je, strogo uzevši, postavljeni zadatak neodređen.

Primjer 5. Volumen »valjkastog odsječka« tj. tijela odsječenog iz kružnog valjka ravninom koja prolazi promjerom baze $2R$ pod kutom α prema bazi, računamo po formuli

$$V = \frac{2}{3} R^3 \operatorname{tg} \alpha.$$

S kakvom tačnošću treba izmjeriti polumjer $R \approx 60$ cm i prikloni kut α, da volumen valjkastog odsječka bude određen s tačnošću do 1%?

Rješenje: Ako su ΔV, ΔR i $\Delta\alpha$ granične apsolutne pogreške veličina V, R i α, onda je granična relativna pogreška izračunatog volumena V

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{3\Delta R}{R} + \frac{2\Delta\alpha}{\sin 2\alpha} \leqslant \frac{1}{100}.$$

Stavimo $\frac{3\Delta R}{R} \leqslant \frac{1}{200}$ i $\frac{2\Delta\alpha}{\sin 2\alpha} \leqslant \frac{1}{200}$. Odatle je

$$\Delta R \leqslant \frac{R}{600} \approx \frac{60\ \text{cm}}{600} = 1\ \text{mm}. \qquad \Delta\alpha \leqslant \frac{\sin 2\alpha}{400} \leqslant \frac{1}{400}\ \text{radijana} \approx 9'.$$

Prema tome potrebnu tačnost odgovora od 1% osigurat ćemo tako da polumjer izmjerimo s tačnošću do 1 mm, a prikloni kut α s tačnošću do $9'$

3108. U rezultatu mjerenja dobili ste ove približne brojeve, tačne u širem smislu u svim napisanim znamenkama:

a) $12^0\ 07'14''$; b) 38,5 cm; c) 62,215 kg.

Izračunajte njihove apsolutne i relativne pogreške.

3109. Izračunajte apsolutne i relativne pogreške približnih brojeva koji su tačni u užem smislu u svim napisanim znamenkama:

a) 241,7; b) 0,035; c) 3,14.

3110. Odredite broj tačnih znamenaka*) i prema tome napišite približne brojeve:

a) 48 361 pri tačnosti od 1%;
b) 14,9360 pri tačnosti od 1%.
c) 592,8 pri tačnosti od 2%;

3111. Zbrojite približne brojeve kojima su tačne sve napisane znamenke:

a) $25,386+0,49+3,10+0,5$; b) $1,2\cdot10^2+41,72+0,09$;

c) $38,1+2,0+3,124$.

3112. Oduzmite približne brojeve kojima su tačne sve napisane znamenke:

a) $148,1-63,871$; b) $29,72-11,25$; c) $34,22-34,21$.

3113*. Izračunajte razliku površina dvaju kvadrata kojima su izmjerene stranice sa 15,28 cm i 15,22 cm (s tačnošću do 0,05 mm).

3114. Izračunajte podukt približnih brojeva kojima su tačne sve napisane znamenke:

a) $3,49\cdot8,6$; b) $25,1\cdot1,743$; c) $0,02\cdot16,5$.

Navedite moguće granice rezultata.

3115. Stranice pravokutnika su 4,02 m i 4,96 m (s tačnošću do 1 cm). Izračunajte površinu pravokutnika.

3116. Izračunajte kvocijent približnih brojeva kojima su tačne sve napisane znamenke:

a) $5,684:5,032$; b) $0,144:1,2$; c) $216:4$.

3117. Katete pravokutnog trokuta su 12,10 cm i 25,21 cm (s tačnošću do 0,01 cm). Izračunajte tangens kuta nasuprot prve katete.

3118. Izračunajte navedene potencije približnih brojeva (baze potencija tačne su u svim znamenkama):

a) $0,4158^2$; b) $65,2^3$; c) $1,5^2$.

3119. Stranica kvadrata je 45,3 cm (s tačnošću do 1 mm). Nađite površinu kvadrata.

---

*) Tačnost znamenaka razumijeva se u užem smislu.

3120. Izračunajte vrijednosti korijena (sve napisane znamenke radikanda su tačne):

$$\text{a) } \sqrt{2{,}715}; \quad \text{b) } \sqrt[3]{65{,}2}; \quad \text{c) } \sqrt{81{,}1}.$$

3121. Polumjeri baza i izvodnica krnjeg stošca su $R = 23{,}64$ cm$\pm 0{,}01$ cm; $r = 17{,}31$ cm $\pm 0{,}01$ cm; $l = 10{,}21$ cm $\pm 0{,}01$ cm; $\pi = 3{,}14$. Prema tim podacima izračunajte ukupnu površinu krnjeg stošca. Ocijenite apsolutnu i relativnu pogrešku rezultata.

3122. Hipotenuza pravokutnog trokuta je 15,4 cm $\pm 0{,}1$ cm; jedna kateta je 6,8 cm $\pm 0{,}1$ cm. Kako tačno možete iz tih podataka odrediti drugu katetu i njoj susjedni šiljati kut? Nađite te vrijednosti.

3123. Izračunajte gustoću aluminija ako aluminijski valjak promjera 2 cm i visine 11 cm ima masu 93,4 g. Relativna pogreška mjerenja duljine je 0,01, a relativna pogreška mjerenja mase je 0,001.

3124. Izračunajte jakost struje ako je elektromotorna sila 221 V± 1 V, a otpor 809 Ω $+1$ Ω.

3125. Period titranja njihala duljine l jednak je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je g ubrzanje sile teže. S kakvom tačnošću treba izmjeriti duljinu njihala kojem je period titranja približno 2 s, da bi se dobio period titranja s relativnom pogreškom od 0,5%? Kako tačne moraju biti uzete vrijednosti π i g?

3126. Treba izmjeriti s tačnošću od 1% površinu plašta krnjeg stošca kojem su polumjeri baza 2 m i 1 m, a izvodnica 5 m (približno). Kako tačno treba izmjeriti polumjere i izvodnicu i s koliko znamenaka treba uzeti broj π?

3127. Za određivanje Youngova modula iz provjesa grede pravokutnog presjeka primjenuje se formula

$$E = \frac{1}{4}\cdot\frac{l^3 P}{d^3 b s},$$

gdje je l duljina grede, b je baza i d visina poprečnog presjeka grede, s je provjes, P je opterećenje. S kakvom tačnošću treba da izmjerite duljinu l i provjes s, da pogreška od E ne bude veća od 5,5% pod uvjetom da je P poznato s tačnošću do 0,1%, a vrijednosti d i b poznate su s tačnošću do 1%, $l \approx 50$ cm, $s \approx 2{,}5$ cm?

2. Interpolacija funkcija

1°. Newtonova formula interpolacije. Neka su $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tablične vrijednosti argumenta kojih je razlika $h = \Delta x_i$ ($\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$; $i = 0, 1, \ldots n-1$) konstantna (*korak tablice*) a $y_0, y_1, \ldots, y_n$ su pripadne vrijednosti funkcije y. Tada vrijednost funkcije y za međuvrijednost argumenta x približno daje *Newtonova formula interpolacije*

$$y = y_0 + q\cdot\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \tag{1}$$

gdje je

$$q = \frac{x - x_0}{h}; \quad \Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \text{a} \quad \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \ \ldots$$

znače uzastopne konačne diferencije funkcije y. Za $x=x_i$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ polinom (1) dobiva pripadne tablične vrijednosti y_i $(i=0, 1, \ldots, n)$. Kao poseban slučaj Newtonove formule dobivamo: za $n=1$ *linearnu interpolaciju*, za $n=2$ *kvadratnu interpolaciju*. Da bi se olakšala upotreba Newtonove formule preporučljivo je prethodno sastaviti tablicu konačnih diferencija.

Ako je $y=f(x)$ polinom n-tog stupnja, onda je

$$\Delta^n y_i = \text{cost} \quad \text{i} \quad \Delta^{n+1} y_i = 0$$

i prema tome je u tom slučaju formula (1) tačna.

U općem slučaju, kada $f(x)$ ima neprekinutu derivaciju $f^{(n+1)}(x)$ u intervalu $[a, b]$ koji sadrži tačke $x_0, x_1, \ldots, x_n$ i x, tada pogreška formule (1) iznosi

$$R_n(x) = y - \sum_{i=0}^{n} \frac{q(q-1)\ldots(q-i+1)}{i!}\Delta^i y_0 =$$

$$= h^{n+1}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \tag{2}$$

gdje je ξ neka međuvrijednost između x_i $(i=0, 1, \ldots, n)$ i x. U praksi je prikladnije upotrijebiti približnu formulu

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} q(q-1)\ldots(q-n).$$

Ako se n može po volji odabrati, onda ga treba odabrati tako da bude diferencija $\Delta^{n+1} y_0 \approx 0$ u granicama zadane tačnosti, drugim riječima diferencije $\Delta^n y_0$ moraju biti konstantne u okviru zadanog reda decimalnog mjesta.

Primjer 1. Nađimo sin 26°15′ koristeći se tabličnim podacima sin 26° = 0,438 37, sin 27° = 0,453 99, sin 28° = 0,469 47.

Rješenje. Sastavimo tablicu

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	26°	0,43837	1562	−14
1	27°	0,45399	1548	
2	28°	0,46947		

Ovdje je $h=60'$, $q=\dfrac{26°15'-26°}{60'}=\dfrac{1}{4}$.

Primijenimo formulu (1) i poslužimo se prvim redom tablice, pa imamo

$$\sin 26°\,15' = 0{,}43837 + \frac{1}{4}\,0{,}01562 + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2\,!}\cdot(-0{,}00014) = 0{,}44229.$$

Ocijenimo pogrešku R_2. Upotrijebimo formulu (2) i uzmimo u obzir da je $|y^{(n)}| \leqslant 1$ kada je $y=\sin x$, pa ćemo imati

$$|R_2| \leqslant \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)}{3\,!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 = \frac{7}{128}\cdot\frac{1}{57{,}33^3} \approx \frac{1}{4}\cdot 10^{-6}.$$

Tako su sve napisane znamenke sin 26°15′ tačne.

Pomoću Newtonove formule možemo također iz zadane međuvrijednosti funkcije y naći pripadnu vrijednost argumenta x (*obrnuta interpolacija*). U tu svrhu najprije određujemo pripadnu vrijednost q metodom postupnog približavanja stavljajući:

$$q^{(0)} = \frac{y-y_0}{\Delta y_0}$$

i

$$q^{(i+1)} = q^{(0)} - \frac{q^{(i)}(q^{(i)}-1)}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} \dots - \frac{q^{(i)}(q^{(i)}-1)\dots(q^{(i)}-n+1)}{n!} - \frac{\Delta^n y_0}{\Delta y_0} \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \dots)\ .$$

Za q uzimamo zajedničku vrijednost (sa zadanom tačnošću!) dviju posljednjih približenja $q^{(m)} = q^{(m+1)}$. Odatle je $x = x_0 + q \cdot h$.

Primjer 2. Upotrebom tablice

x	$y = \operatorname{sh} x$	Δy	$\Delta^2 y$
2,2	4,457	1,009	0,220
2,4	5,466	1,229	
2,6	6,695		

približno izračunajmo korijen jednadžbe sh $x = 5$.

Rješenje. Uzmimo da je $y_0 = 4{,}457$ pa imamo

$$q^{(0)} = \frac{5-4{,}457}{1{,}009} = \frac{0{,}543}{1{,}009} = 0{,}538;$$

$$q^{(1)} = q^{(0)} + \frac{q^{(0)}(1-q^{(0)})}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} = 0{,}538 + \frac{0{,}538 \cdot 0{,}462}{2} \cdot \frac{0{,}220}{1{,}009} = 0{,}538 + 0{,}027 = 0{,}565;$$

$$q^{(2)} = 0{,}538 + \frac{0{,}565 \cdot 0{,}435}{2} \cdot \frac{0{,}220}{1{,}009} = 0{,}538 + 0{,}027 = 0{,}565.$$

Na taj način možemo uzeti da je

$$x = 2{,}2 + 0{,}565 \cdot 0{,}2 = 2{,}2 + 0{,}113 = 2{,}313.$$

2°. Lagrangeova formula interpolacije. U općem slučaju polinom n-tog stupnja koji za $x = x_i$ dobiva zadane vrijednosti y_i $(i = 0,\ 1, \dots,\ n)$ daje *Lagrangeova formula interpolacije*:

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} y_1 + \dots$$

$$\dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} y_k + \dots$$

$$\dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} y_n.$$

3128. Zadana je tablica vrijednosti za x i y:

x	1	2	3	4	5	6
y	3	10	15	12	9	5

Sastavite tablicu konačnih diferencija funkcije y.

3129. Sastavite tablicu razlika funkcije $y = x^3 - 5x^2 + x - 1$ za vrijednosti $x = 1$, 3, 5, 7, 9, 11. Uvjerite se da su sve konačne diferencije trećeg reda međusobno jednake.

3130*. Koristeći se konstantnošću diferencija četvrtog reda sastavite tablicu razlika funkcije $y = x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 3x$ za cijele vrijednosti x, unutar intervala $1 \leqslant x \leqslant 10$.

3131. Zadana je tablica

$$\lg 1 = 0{,}000,$$
$$\lg 2 = 0{,}301,$$
$$\lg 3 = 0{,}477,$$
$$\lg 4 = 0{,}602,$$
$$\lg 5 = 0{,}699.$$

Izračunajte pomoću linearne interpolacije brojeve: lg 1,7; lg 2,5; lg 3,1; lg 4,6.

3132. Zadana je tablica

$$\sin 10^\circ = 0{,}1736, \qquad \sin 13^\circ = 0{,}2250,$$
$$\sin 11^\circ = 0{,}1908, \qquad \sin 14^\circ = 0{,}2419,$$
$$\sin 12^\circ = 0{,}2079, \qquad \sin 15^\circ = 0{,}2588.$$

Upotpunite tablicu izračunavši po Newtonovoj formuli (za $n = 2$) vrijednosti sinusa za polustupnjeve.

3133. Sastavite Newtonov interpolacioni polinom za funkciju zadanu tablicom

x	0	1	2	3	4
y	1	4	15	40	85

3134*. Sastavite Newtonov interpolacioni polinom za funkciju zadanu tablicom

x	2	4	6	8	10
y	3	11	27	50	83

Nađite y za $x = 5{,}5$. Pri kojem x je $y = 20$?

3135. Funkcija je zadana tablicom

x	-2	1	2	4
y	25	-8	-15	-23

Sastavite Lagrangeov interpolacioni polinom i nađite vrijednost y za $x = 0$.

3136. Pokusom su nađene vrijednosti skraćenja opruge (x mm) u ovisnosti o opterećenju (P kp) te opruge:

x	5	10	15	20	25	30	35	40
P	49	105	172	253	352	473	619	793

Nađite opterećenje koje skraćuje oprugu za 14 mm.

3137. Zadana je tablica vrijednosti x i y

x	0	1	3	4	5
y	1	-3	25	129	381

Izračunajte vrijednosti y za $x=0{,}5$ i za $x=2$:

a) pomoću linearne interpolacije;

b) pomoću Lagrangeove formule.

3. Određivanje realnih korijena jednadžbi i sistema jednadžbi

1. Utvrđivanje početnih približnih korijena. Približno određivanje korijena zadane jednadžbe

$$f(x)=0 \tag{1}$$

provodi se u dvije etape: 1) *razlučivanje korijena* tj. utvrđivanje po mogućnosti što manjih intervala u kojima se nalazi jedan i samo jedan korijen jednadžbe (1); 2) *izračunavanje korijena* sa zadanim stupnjem tačnosti.

Ako je funkcija $f(x)$ definirana i neprekinuta u intervalu $[a, b]$ i $f(a)\cdot f(b)<0$, onda se u intervalu $[a, b]$ nalazi bar jedan korijen ξ jednadžbe (1). Taj korijen je sigurno jedini, ako je $f'(x)>0$ ili $f'(x)<0$ kada je $a<x<b$.

Za približno računanje korijena ξ preporučljivo je na milimetarskom papiru nacrtati graf funkcije $y=f(x)$. Apscise tačaka u kojima graf funkcije siječe os OX korijeni su jednadžbe $f(x)=0$. Ponekad je zgodno da zadanu jednadžbu zamijenimo ekvivalentnom jednadžbom $\varphi(x)=\psi(x)$. Tada korijene jednadžbe nalazimo kao apscise sjecišta tačaka grafova $y=\varphi(x)$ i $y=\psi(x)$.

2°. Pravilo proporcionalnih dijelova (metoda tetiva). Ako se u intervalu $[a, b]$ nalazi jedini korijen ξ jednadžbe $f(x)=0$, a funkcija $f(x)$ neprekinuta je u intervalu $[a, b]$ i $f(a)f(b)<0$, onda, zamijenivši krivulju $y=f(x)$ tetivom koja prolazi tačkama $(a;f(a))$ i $(b;f(b))$, dobivamo prvu aproksimaciju korijena

$$c_1=a-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a). \tag{2}$$

Da bismo dobili drugu aproksimaciju c_2, formulu (2) primijenimo na onaj odsječak $[a, c_1]$ ili $[c_1, b]$ na čijim krajevima funkcija $f(x)$ ima vrijednosti suprotnih predznaka. Isto tako provodi se naredna aproksimacija. Niz brojeva c_n $(n=1, 2, \ldots)$ konvergira ka korijenu ξ tj.

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\xi.$$

Računanje aproksimacija $c_1, c_2, \ldots$ općenito treba provoditi sve dotle dok se ne prestanu mijenjati decimalne znamenke koje ćemo zadržati u rezultatu (suglasno sa zadanim stupnjem tačnosti!); za međuračune treba uzeti jednu do dvije rezervne znamenke. To je općenita napomena.

Ako funkcija $f(x)$ ima neprekinutu prvu derivaciju $f'(x)$ različitu od nule u intervalu $[a, b]$, onda za ocjenu apsolutne pogreške aproksimativnog korijena c_n možemo upotrijebiti formulu

$$|\xi - c_n| \leqslant \frac{|f(c_n)|}{\mu},$$

gdje je $\mu = \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|$.

3°. Newtonova metoda (metoda tangente). Ako je $f'(x) \neq 0$ i $f''(x) \neq 0$ za $a \leqslant x \leqslant b$, pri čemu je $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f(a) f''(a) > 0$, onda postupnu aproksimaciju x_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) korijena ξ jednadžbe $f(x) = 0$ provodimo po formulama

$$x_0 = a, \qquad x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Uz dane pretpostavke niz x_n ($n = 1, 2, \ldots$) je monoton i

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \xi.$$

Za ocjenu pogreške može nam poslužiti formula

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{\mu},$$

gdje je $\mu = \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|$.

Praktički je prikladnije uptrijebiti jednostavnije formule

$$x_0 = a, \qquad x_n = x_{n-1} - \alpha f(x_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3'}$$

gdje je $\alpha = \dfrac{1}{f'(a)}$, koje nam daju otprilike istu tačnost kao i formule (3).

Ako je $f(b) f''(b) > 0$, onda u formulama (3) i (3') treba staviti $x_0 = b$.

4°. Metoda iteracije. Neka je zadana jednadžba svedena na oblik

$$x = \varphi(x), \tag{4}$$

gdje je $|\varphi'(x)| \leqslant r < 1$ (r je konstanta) za $a \leqslant x \leqslant b$. Polazeći od početne vrijednosti x_0 koja pripada intervalu $[a, b]$ konstruirajmo niz brojeva $x_1, x_2, \ldots$ po ovom zakonu:

$$x_1 = \varphi(x_0), \quad x_2 = \varphi(x_1), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad \ldots \tag{5}$$

Ako je $a \leqslant x_n \leqslant b$ ($x = 1, 2, \ldots$), onda je limes

$$\xi = \lim_{n \to \infty} x_n$$

jedini korijen jednadžbe (4) u intervalu $[a, b]$, tj. x_n su *postupna približenja korijena* ξ.

Ocjenu apsolutne pogreške n-te aproksimacije x_n daje formula

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{|x_{n+1} - x_n|}{1 - r}.$$

Prema tome, ako se x_n i x_{n+1} podudaraju s tačnošću do ε, onda će krajnja apsolutna pogreška za x_n biti $\dfrac{\varepsilon}{1-r}$.

Za transformaciju jednadžbe $f(x) = 0$ u oblik (4) zamijenimo jednadžbu $f(x) = 0$ ekvivalentnom jednadžbom

$$x = x - \lambda f(x),$$

gdje broj $\lambda \neq 0$ odabiremo tako da funkcija $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x-\lambda f(x)] = 1-\lambda f'(x)$ bude po apsolutnoj vrijednosti mala u okolini tačke x_0 (na primjer možemo staviti $1-\lambda f'(x_0)=0$).

Primjer 1. Svedimo jednadžbu $2x-\ln x-4=0$ uz početnu aproksimaciju korijena $x_0=2,5$ na oblik (4).

Rješenje. Ovdje je $f(x)=2x-\ln x-4$; $f'(x)=2-\frac{1}{x}$. Napišimo ekvivalentnu jednadžbu $x=x-\lambda(2x-\ln x-4)$ i kao jednu od prikladnih vrijednosti λ odaberimo broj 0,5 koji je blizak korijenu jednadžbe

$$1-\lambda\left(2-\frac{1}{x}\right)\bigg|_{x=2,5}=0, \text{ tj. blizak } \frac{1}{1,6}\approx 0,6.$$

Prvotna jednadžba svodi se na oblik

$$x=x-0,5\,(2x-\ln x-4)$$

ili

$$x=2+\frac{1}{2}\ln x.$$

Primjer 2. Izračunajmo s tačnošću do 0,01 korijen ξ prethodne jednadžbe koji se nalazi između 2 i 3.

Izračunavanje korijena metodom iteracije. Koristeći se rezultatom primjera 1 uvrstimo $x_0=2,5$. Računamo po formulama (5) s jednom rezervnom znamenkom.

$$x_1=2+\frac{1}{2}\ln 2,5\approx 2,458,$$

$$x_2=2+\frac{1}{2}\ln 2,458\approx 2,450,$$

$$x_3=2+\frac{1}{2}\ln 2,450\approx 2,448,$$

$$x_4=2+\frac{1}{2}\ln 2,448\approx 2,448.$$

Tako je $\xi\approx 2,45$ (proces daljnje aproksimacije možemo skratiti jer se treća decimala (tisućinke) ustalila.

Ocijenimo pogrešku. Ovdje je

$$\varphi(x)=2+\frac{1}{2}\ln x \quad \text{i} \quad \varphi'(x)=\frac{1}{2x}.$$

Smatrajući da sva približenja leže u intervalu [2,4; 2,5] dobivamo:

$$r=\max\,|\varphi'(x)|=\frac{1}{2\cdot 2,4}=0,21.$$

Prema tome krajnja apsolutna pogreška aproksimacije x_3 na osnovu ranije navedene primjedbe je

$$\Delta=\frac{0,001}{1-0,21}=0,0012\approx 0,001.$$

Na taj način tačan korijen ξ jednadžbe nalazi se u granicama

$$2,447<\xi<2,449;$$

možemo uzeti da je $\xi\approx 2,45$ pri čemu će sve znamenke tog približnog broja biti tačne u užem smislu.

Izračunavanje korijena Newtonovom metodom. Ovdje je

$$f(x)=2x-\ln x-4, \qquad f'(x)=2-\frac{1}{x}, \quad f''(x)=\frac{1}{x^2}.$$

Na odsječku $2 \leq x \leq 3$ imamo: $f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$; $f(2)f(3) < 0$; $f(3)f''(3) > 0$. Prema tome su uvjeti iz tačke 3° za $x_0 = 3$ ispunjeni.

Uzmimo

$$\alpha = \left(2 - \frac{1}{3}\right)^{-1} = 0{,}6.$$

Računamo po formulama (3′) sa dvije rezervne znamenke

$$x_1 = 3 - 0{,}6(2 \cdot 3 - \ln 3 - 4) = 2{,}4592;$$
$$x_2 = 2{,}4592 - 0{,}6(2 \cdot 2{,}4592 - \ln 2{,}4592 - 4) = 2{,}4481;$$
$$x_3 = 2{,}4481 - 0{,}6(2 \cdot 2{,}4481 - \ln 2{,}4481 - 4) = 2{,}4477;$$
$$x_4 = 2{,}4477 - 0{,}6(2 \cdot 2{,}4477 - \ln 2{,}4477 - 4) = 2{,}4475.$$

U toj etapi prekidamo računanje jer se broj tisućinki više ne mijenja. Dajemo odgovor: korijen je $\xi \approx 2{,}45$. Ocjenu pogreške ne provodimo.

5. Sistem sa dvije jednadžbe. Recimo da treba sa zadanom tačnošću izračunati realne korijene sistema od dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

i neka početna aproksimacija jednog rješenja (ξ, η) tog sistema bude $x = x_0$, $y = y_0$, pri čemu su f i φ derivabilne u nekoj okolini tačke (x_0, y_0) koja sadrži tačku (ξ, η).

Tu početnu aproksimaciju možemo dobiti, na primjer, grafički konstrukcijom (u jednom te istom sistemu Descartesovih koordinata) krivulja $f(x, y) = 0$ i $\varphi(x, y) = 0$ i određivanjem koordinata tačaka u kojima se sijeku te krivulje.

a) **Newtonova metoda.** Pretpostavimo da se funkcionalna determinanta

$$I = \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(x, y)}$$

ne poništava u blizini početne aproksimacije $x = x_0$, $y = y_0$. Tada po Newtonovoj metodi prva aproksimacija rješenja sistema (6) ima oblik $x_1 = x_0 + \alpha_0$, $y_1 = y_0 + \beta_0$, gdje su α_0, β_0 rješenja sistema dviju linearnih jednadžbi

$$\begin{cases} f(x_0, y_0) + \alpha_0 f_x'(x_0, y_0) + \beta_0 f_y'(x_0, y_0) = 0, \\ \varphi(x_0, y_0) + \alpha_0 \varphi_x'(x_0, y_0) + \beta_0 \varphi_y'(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Drugu aproksimaciju dobivamo na isti način:

$$x_2 = x_1 + \alpha_1, \quad y_2 = y_1 + \beta_1,$$

gdje su $_1$, β_1 rješenja sistema linearnih jednadžbi

$$\begin{cases} f(x_1, y_1) + \alpha_1 f_x'(x_1, y_1) + \beta_1 f_y'(x_1, y_1) = 0, \\ \varphi(x_1\ y_1) + \alpha_1 \varphi_x'(x_1, y_1) + \beta_1 \varphi_y'(x_1, y_1) = 0. \end{cases}$$

Analogno dobivamo treću i daljnje aproksimacije.

b) **Metoda iteracije.** Za rješavanje sistema jednadžbi (6) možemo primijeniti i metodu iteracije, transformiranjem tog sistema u ekvivalentan oblik

$$\begin{cases} x = F(x, y), \\ y = \Phi(x, y), \end{cases} \tag{7}$$

uz pretpostavku da su F i Φ derivabilne i da je

$$|F_x'(x, y)| + |\Phi_x'(x, y)| \leq r < 1; \quad |F_y'(x, y)| + |\Phi_y'(x, y)| \leq r < 1 \tag{8}$$

u nekoj dvodimenzionalnoj okolini U početnog približenja (x_0, y_0) koja sadrži i tačno rješenje (ξ, η) sistema.

Niz približenja (x_n, y_n) $(n=1, 2, \ldots)$ koja konvergiraju k rješenju (7) ili, što je isto, k rješenju sistema (6), nastaje po ovom zakonu:

$$\begin{aligned} x_1 &= F(x_0, y_0), & y_1 &= \Phi(x_0, y_0), \\ x_2 &= F(x_1, y_1), & y_2 &= \Phi(x_1, y_1), \\ x_3 &= F(x_2, y_2), & y_3 &= \Phi(x_2, y_2), \\ &\ldots\ldots & &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots & &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ako svi (x_n, y_n) pripadaju U, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\eta$.

Za transformaciju sistema jednadžbi (6) u oblik (7) s poštivanjem uvjeta (8) taj je način preporučljiv. Razmotrimo sistem jednadžbi

$$\begin{cases} \alpha f(x, y) + \beta\varphi(x, y) = 0, \\ \gamma f(x, y) + \delta\varphi(x, y) = 0, \end{cases}$$

koji je ekvivalentan sistemu (6) pod uvjetom da je $\begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} \neq 0$. Pišemo ga u obliku:

$$x = x+\alpha f(x, y) + \beta\varphi(x, y) \equiv F(x, y),$$
$$y = y+\gamma f(x, y) + \delta\varphi(x, y) \equiv \Phi(x, y).$$

Izaberemo parametre $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tako, da parcijalne derivacije funkcija $F(x, y)$ i $\Phi(x, y)$ budu jednake ili bliske nuli uz početnu aproksimaciju, tj. nadimo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kao aproksimativna rješenja sistema jednadžbi

$$\begin{cases} 1+\alpha f'_x(x_0, y_0) + \beta\varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \\ \alpha f'_y(x_0, y_0) + \beta\varphi'_y(x_0, y_0) = 0, \\ \gamma f'_x(x_0, y_0) + \delta\varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \\ 1+\gamma f'_y(x_0, y_0) + \delta\varphi'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

S tako odabranim parametrima $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ uz pretpostavku da se parcijalne derivacije funckija $f(x, y)$ i $\varphi(x, y)$ ne mijenjaju vrlo brzo u okolini početne aproksimacije (x_0, y_0), uvjet (8) će biti ispunjen.

Primjer 3. Dovedimo sistem jednadžbi

$$\begin{cases} x^2+y^2-1=0, \\ x^3-x=0 \end{cases}$$

uz početnu aproksimaciju korijena $x_0=0{,}8$, $y_0=0{,}55$ na oblik (7).

Rješenje. Ovdje je $f(x,y) = x^2+y^2-1$, $\varphi(x, y) = x^3-y$; $f'_x(x_0,y_0) = 1{,}6$, $f'_y(x_0,y_0) = 1{,}1$; $\varphi'_x(x_0,y_0) = 1{,}92$, $\varphi'_y(x_0,y_0) = -1$.

Napišimo sistem koji je ekvivalentan početnom,

$$\begin{cases} \alpha(x^2+y^2-1)+\beta(x^3-y)=0, \\ \gamma(x^2+y^2-1)+\delta(x^3-y)=0 \end{cases} \quad \left(\begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} \neq 0 \right)$$

u obliku

$$x=x+\alpha(x^2+y^2-1)+\beta(x^3-y),$$
$$y=y+\gamma(x^2+y^2-1)+\delta(x^3-y).$$

Izaberimo kao pogodne brojčane vrijednosti α, β, γ i δ rješenje sistema jednadžbi

$$\begin{cases} 1+1{,}6\alpha+1{,}92\beta=0, \\ 1{,}1\alpha-\beta=0, \\ 1{,}6\gamma+1{,}92\delta=0, \\ 1+1{,}1\gamma-\delta=0, \end{cases}$$

tj. stavimo $\alpha\approx-0{,}3$, $\beta\approx-0{,}3$, $\gamma\approx-0{,}5$, $\delta\approx0{,}4$.

Tada sistem jednadžbi

$$\begin{cases} x=x-0{,}3\,(x^2+y^2-1)\ -0{,}3\,(x^3-y), \\ y=y-0{,}5\,(x^2+y^2-1)\ +0{,}4\,(x^3-y), \end{cases}$$

koji je ekvivalentan početnom, ima oblik (7) pri čemu će u dovoljno maloj okolini tačke $(x_0; y_0)$ uvjet (8) biti ispunjen.

Metodom pokusa razlučite realne korijene jednadžbi i pomoću pravila proporcionalnih dijelova izračunajte ih s tačnosti do 0,01.

3138. $x^3-x+1=0.$

3139. $x^4+0{,}5x-1{,}55=0.$

3140. $x^3-4x-1=0.$

Polazeći iz grafički nađenih početnih aproksimacija, Newtonovom metodom izračunajte s tačnošću do 0,01 realne korijene jednadžbi:

3141. $x^3-2x-5=0.$

3142. $2x-\ln x-4=0.$

3143. $2^x=4x.$

3144. $\lg x=\frac{1}{x}.$

Služeći se početnim aproksimacijama dobivenim grafičkim putem izračunajte metodom iteracije s tačnošću do 0,01 realne korijene jednadžbi:

3145. $x^3-5x+0{,}1=0.$

3146. $4x=\cos x.$

3147. $x^5-x-2=0.$

Nađite grafički početne aproksimacije i izračunajte s tačnošću do 0,01 realne korijene jednadžbi i sistema:

3148. $x^3-3x+1=0.$

3149. $x^3-2x^2+3x-5=0.$

3150. $x^4+x^2-2x-2=0.$

3151. $x\ln x-14=0.$

3152. $x^3+3x-0{,}5=0.$

3153. $4x-7\sin x=0.$

3154. $x^x+2x-6=0.$

3155. $e^x+e^{-3x}-4=0.$

3156. $\begin{cases} x^2+y^2-1=0, \\ x^3-y=0. \end{cases}$

3157. $\begin{cases} x^2+y-4=0, \\ y-\lg x-1=0. \end{cases}$

3158. Izračunajte s tačnošću do 0,001 najmanji pozitivni korijen jednadžbe $\operatorname{tg} x=x$.

3159. Izračunajte s tačnošću do 0,0001 korijene jednadžbe $x\cdot\operatorname{th} x=1$.

4. Numeričko integriranje funkcija

1°. Trapezna formula. Za aproksimativno izračunavanje integrala

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

($f(x)$ je neprekinuta funkcija na $[a, b]$) razdijelimo područje integriranja $[a, b]$ na n jednakih dijelova i izaberimo *korak izračunavanja* $h=\frac{b-a}{n}$. Neka su $x_i=x_0+ih$ $(x_0=a,\ x_n=b,\ i=0, 1, 2, \ldots, n)$ apscise djelišta a $y_i=f(x_i)$ pripadne vrijednosti podintegralne funkcije $y=f(x)$.

Tada po *trapeznoj formuli* imamo:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right) \tag{1}$$

s apsolutnom pogreškom

$$R_n \leqslant \frac{h^2}{12}(b-a)\cdot M_2,$$

gdje je $M_2=\max|f''(x)|$ za $a \leqslant x \leqslant b$.

Da postignemo zadanu tačnost ε pri računanju integrala, korak računanja h određujemo iz nejednadžbe

$$h^2 \leqslant \frac{12\varepsilon}{(b-a)M_2}, \tag{2}$$

tj. h mora imati red veličine $\sqrt{\varepsilon}$. Dobivenu vrijednost h zaokružujemo na manju vrijednost tako da

$$\frac{b-a}{h}=n$$

bude cio broj, i to nam daje broj razdjelaka n. Kada smo odredili h i n po formuli (1), izračunamo integral odabravši vrijednosti podintegralne funkcije s jednom ili dvije rezervne decimalne znamenke.

2°. **Simpsonova formula (formula parabole).** Ako je n paran broj, onda s oznakama prema 1° vrijedi *Simpsonova formula*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[(y_0+y_n)+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})\right] \tag{3}$$

s apsolutnom pogreškom

$$R_n \leqslant \frac{h^4}{180}(b-a)M_4, \tag{4}$$

gde je $M_4=\max|f^{IV}(x)|$ za $a \leqslant x \leqslant b$.

Da bi se osigurala zadana tačnost ε, pri računanju integrala korak računanja h treba odrediti iz nejednadžbe

$$\frac{h^4}{180}(b-a)M_4 \leqslant \varepsilon, \tag{5}$$

tj. korak h ima red veličine $\sqrt[4]{\varepsilon}$. Vrijednost h zaokružujemo na manju vrijednost, da $n=\frac{b-a}{n}$ bude cio paran broj.

Napomena. Kako je određivanje koraka računanja h i s njime vezanog broja n iz nejednadžbi (2) i (5) općenito dosta teško, u praksi se h određuje grubom procjenom. Zatim, kada dobijemo rezultat, udvostručimo vrijednost n, tj. raspolovimo korak h. Ako se novi rezultat podudara s prethodnim u decimalama koje smo zadržali, onda je račun završen. U protivnom slučaju taj postupak ponovimo itd.

Za aproksimativno računanje apsolutne pogreške R Simpsonove kvadraturne formule (3) možemo također upotrijebiti *Rungeov princip*, prema kome je

$$R=\frac{|\Sigma-\bar{\Sigma}|}{15},$$

gdje su Σ i $\bar{\Sigma}$ rezultati računanja po formuli (3) suglasni koracima h i $H=2h$.

3160. Pod djelovanjem promjenljive sile $\bar{F}$ u smjeru osi OX materijalna tačka se pomakla po osi OX iz položaja $x=0$ u položaj $x=4$. Izračunajte približno rad A sile $\bar{F}$ ako je zadana tablica vrijednosti njenih modula F:

x	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
F	1,50	0,75	0,50	0,75	1,50	2,75	4,50	6,75	10,00

Računajte po trapeznoj formuli i po Simpsonovoj formuli.

3161. Izračunajte približno $\int\limits_0^1 (3x^2-4x)\,dx$ po trapeznoj formuli uzevši $n=10$. Izračunajte taj integral tačno i nađite apsolutnu i relativnu pogrešku rezultata. Nađite gornju granicu Δ apsolutne pogreške računa kada je $n=10$ pomoću formule za pogrešku koja je navedena u tekstu.

3162. Izračunajte s tačnošću do 10^{-4} po Simpsonovoj formuli $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x+1}$ uzevši da je $n=10$. Ustanovite gornju granicu Δ apsolutne pogreške koristeći se formulom za pogreške koja je navedena u tekstu.

Izračunajte s tačnošću do 0,01 ove određene integrale:

3163. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

3164. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

3165. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$.

3166. $\int\limits_1^2 x \lg x\,dx$.

3167. $\int\limits_1^2 \frac{\lg x}{x}\,dx$.

3168. $\int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$.

3169. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

3170. $\int\limits_1^2 \frac{\cos x}{x}\,dx$.

3171. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x}\,dx$.

3172. $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

3173. Izračunajte s tačnošću do 0,01 nepravi integral $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ primjenom supstitucije $x=\frac{1}{t}$. Provjerite račun primjenom Simpsonove formule za integral $\int\limits_1^b \frac{dx}{1+x^2}$, gdje je b odabran tako da bude $\int\limits_b^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$.

3174. Ravninski lik omeđen poluvalom sinusoide $y=\sin x$ i osi OX rotira oko osi OX. Izračunajte po Simpsonovoj formuli s tačnošću do 0,01 volumen rotacionog tijela.

3175*. Izračunajte po Simpsonovoj formuli s tačnošću do 0,01 duljinu luka elipse $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{(0{,}6222)^2}=1$ koji se nalazi u prvom kvadrantu.

5. Numerička integracija običnih diferencijalnih jednadžbi

1°. Metoda postupnih približenja (Picardova metoda). Neka je zadana diferencijalna jednadžba prvog reda

$$y'=f(x,\ y) \tag{1}$$

s početnim uvjetom $y=y_0$ za $x=x_0$.

Rješenje $y(x)$ jednadžbe (1) koja zadovoljava zadani početni uvjet možemo općenito predočiti u obliku

$$y(x)=\lim_{i\to\infty} y_i(x), \tag{2}$$

gdje se *postupna približenja* $y_i(x)$ određuju po formulama

$$y_0(x)=y_0,$$

$$y_i(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f(x,\ y_{i-1}(x))\,dx$$

$$(i=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Ako je desna strana $f(x,y)$ definirana i neprekinuta u okolini

$$R\{|x-x_0|\leqslant a,\quad |y-y_0|\leqslant b\}$$

i u toj okolini zadovoljava *Lipschitzov uvjet*

$$|f(x,\ y_1)-f(x,\ y_2)|\leqslant L\,|y_1-y_2|$$

(L je konstanta), onda proces postupnih približenja (2) sigurno konvergira u intervalu

$$|x-x_0|\leqslant h,$$

gdje je

$$h=\min_R\left(a,\ \frac{b}{M}\right)$$

i

$$M=\max_R|f(x,\ y)|.$$

Pri tome je pogreška

$$R_n = |y(x) - y_n(x)| \leqslant ML^n \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

ako je samo

$$|x-x_0| \leqslant h.$$

Metodu postupnih približavanja (*Picardovu metodu*) s neznatnim promjenama oblika primjenjujemo također na normalne sisteme diferencijalnih jednadžbi. Što se tiče diferencijalnih jednadžbi viših redova, njih možemo napisati u obliku sistema diferencijalnih jednadžbi.

2°. Metoda Runge-Kutta. Neka u zadanom intervalu $x_0 \leqslant x \leqslant X$ treba naći rješenje $y(x)$ zadatka (1) sa zadanim stupnjem tačnosti ε.

Za to najprije odaberemo $h = \frac{X-x_0}{n}$ (*korak računanja*) podijelivši odsječak $[x_0, X]$ na n jednakih dijelova tako da bude $h^4 < \varepsilon$. Djelišta x_i određujemo po formuli

$$x_i = x_0 + ih \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Pripadne vrijednosti $y_i = y(x_i)$ tražene funkcije po metodi *Runge-Kutta* postupno se računaju po formulama

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}),$$

gdje je

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

i

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= f(x_i,\ y_i)\,h, \\ k_2^{(i)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right)h, \\ k_3^{(i)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right)h, \qquad (3) \\ k_4^{(i)} &= f(x_i + h,\ y_i + k_3^{(i)})\,h. \end{aligned}$$

Metoda Runge-Kutta ima red tačnosti h^4. Grubu ocjenu pogreške metode Runge-Kutta u zadanom području $[x_0, X]$ možemo dobiti polazeći od Rungeova principa:

$$R = \frac{|y_{2m} - \bar{y}_m|}{15},$$

gdje su $n = 2m$, y_{2m} i $\bar{y}_m$ rezultati računa po shemi (3) s korakom h i s korakom $2h$.

Metoda Runge-Kutta primjenljiva je također za rješavanje sistema diferencijalnih jednadžbi

$$y' = f(x,\ y,\ z), \qquad z' = \varphi(x,\ y,\ z) \qquad (4)$$

sa zadanim početnim uvjetima: $y = y_0$, $z = z_0$ za $x = x_0$.

3°. Milneova metoda. Za rješavanje zadatka (1) *Milneovom metodom*, polazeći od početnih podataka $y = y_0$ za $x = x_0$ nađu se na bilo koji način postupne vrijednosti

$$y_1 = y(x_1), \quad y_2 = y(x_2), \quad y_3 = y(x_3)$$

tražene funkcije $y(x)$ (na primjer, možemo se poslužiti razvojem rješenja $y(x)$ u red (gl. IX, 16) ili te vrijednosti možemo naći metodom postupnih približenja, ili primjenom metode Runge-Kutta itd.). Približenja $\bar{y}_i$ i $\bar{\bar{y}}_i$ za iduće vrijednosti y_i $(i=4,\ 5,\ \ldots,\ n)$ postupno nalazimo po formulama

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}_i &= y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2f_{i-3} - f_{i-2} + 2f_{i-1}), \\ \bar{\bar{y}}_i &= y_{i-2} + \frac{h}{3}(\bar{f}_i + 4f_{i-1} + f_{i-2}), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

gdje je

$$f_i = f(x_i,\ y_i) \quad \text{i} \quad \bar{f}_i = f(x_i,\ \bar{y}_i).$$

Radi kontrole izračunamo vrijednost

$$\varepsilon_i = \frac{1}{29} |\, \bar{y}_i - \bar{\bar{y}}_i \,|. \tag{6}$$

Ako ε_i nije veći od jedinice posljednjeg decimalnog mjesta 10^{-m} koje smo u odgovoru zadržali za $y\ (x)$, onda za y_i izaberemo $\bar{\bar{y}}_i$ i prijeđemo na računanje iduće vrijednosti y_{i+1} ponavljanjem postupka. Ako je pak $\varepsilon_i > 10^{-m}$ onda moramo početi ispočetka skrativši korak računanja. Veličina početnog koraka približno se određuje iz nejednadžbe $h^4 < 10^{-m}$.

Za rješavanje sistema (4) Milneove formule pišemo odvojeno za funkcije $y\ (x)$ i $z\ (x)$. Poređaj računanja isti je kao prethodni.

Primjer 1. Zadana je diferencijalna jednadžba $y' = y - x$ s početnim uvjetom $y\ (0) = 1{,}5$. Izračunajmo s tačnošću do 0,01 vrijednost rješenja te jednadžbe za vrijednost argumenta $x = 1{,}5$. Računat ćemo kombiniranom metodom Runge-Kutta i Milnea.

Rješenje. Izaberimo početni korak računanja h iz uvjeta $h^4 < 0{,}01$. Da izbjegnemo složeno pisanje za h, ostanimo kod $h = 0{,}25$. Tada čitavo područje integracije od $x = 0$ do $x = 1{,}5$ razdijelimo na šest jednakih dijelova duljine 0,25 pomoću tačaka x_i $(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$; pripadne vrijednosti rješenja y i derivacije y' označimo sa y_i i y_i'.

Prve tri vrijednosti y (bez početne) izračunamo metodom Runge-Kutta (po formulama (3)); ostale tri vrijednosti y_4, y_5 i y_6 metodom Milnea (po formulama (5)).

Vrijednost y_6 bit će očigledno odgovor na zadatak.

Račun ćemo provesti sa dvije rezervne znamenke po određenoj shemi sastavljenoj od tablice 1 i 2 (na str. 374 i 375). Na kraju tablice 2 dobivamo odgovor.

Izračunavanje vrijednosti y_1. Ovdje je

$$f\,(x, y) = -x + y, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1{,}5, \quad h = 0{,}25.$$

Imamo

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}\ (k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}) =$$

$$= \frac{1}{6}\ (0{,}3750 + 2\cdot 0{,}3906 + 2\cdot 0{,}3926 + 0{,}4106) = 0{,}3920;$$

$$k_1^{(0)} = f\,(x_0, y_0)\ h = (-0 + 1{,}5000)\ 0{,}25 = 0{,}3750;$$

$$k_2^{(0)} = f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) h = (-0{,}125 + 1{,}5000 + 0{,}1875)\ 0{,}25 = 0{,}3906;$$

$$k_3^{(0)} = f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) h = (-0{,}125 + 1{,}5000 + 0{,}1953)\ 0{,}25 = 0{,}3926;$$

$$k_4^{(0)} = f\,(x_0 + h,\quad y_0 + k_3^{(0)})\ h = (-0{,}25 + 1{,}5000 + 0{,}3926)\ 0{,}25 + 0{,}4106;$$

$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1{,}5000 + 0{,}3920 = 1{,}8920$ (prve tri znamenke u ovom približnom broju su pouzdane).

Analogno računamo vrijednosti y_2 i y_3. Rezultati računa uneseni su u tablicu 1.

Tablica 1. **Izračunavanje y_1, y_2, y_3 metodom Runge–Kutta**

$f(x, y) = -x + y;\quad h = 0{,}25$

Vrijednost i	x_i	y_i	$y_i' \equiv f(x_i, y_i)$	$k_1^{(i)}$	$f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right)$	$k_2^{(i)}$
0	0	1,5000	1,5000	0,3750	1,5625	0,3906
1	0,25	1,8920	1,6420	0,4105	1,7223	0,4306
2	0,50	2,3243	1,8243	0,4561	1,9273	0,4818
3	0,75	2,8084	2,0584	0,5146	2,1907	0,5477

Vrijednost i	$f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right)$	$k_3^{(i)}$	$f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)})$	$k_4^{(i)}$	Δy_i	y_{i+1}
0	1,5703	0,3926	1,6426	0,4106	0,3920	1,8920
1	1,7323	0,4331	1,8251	0,4562	0,4323	2,3243
2	1,9402	0,4850	2,0593	0,5148	0,4841	2,8084
3	2,2073	0,5518	2,3602	0,5900	0,5506	3,3590

Izračunavanje vrijednosti y_4. Imamo: $f(x, y) = -x + y$, $h = 0{,}25$, $x_4 = 1$;

$$y_0 = 1{,}5000,\quad y_1 = 1{,}8920,\quad y_2 = 2{,}3243,\quad y_3 = 2{,}8084;$$

$$y_0' = 1{,}5000,\quad y_1' = 1{,}6420,\quad y_2' = 1{,}8143,\quad y_3' = 2{,}0584.$$

Primjenom formule (5) dobivamo:

$$\overline{y}_4 = y_0 + \frac{4h}{3}(2y_1' - y_2' + 2y_3') = 1{,}5000 + \frac{4 \cdot 0{,}25}{3}(2 \cdot 1{,}6420 - 1{,}8243 + 2 \cdot 2{,}0584) = 3{,}3588;$$

$$\overline{y}_4' = f(x_4, \overline{y}_4) = -1 + 3{,}3588 = 2{,}3588;$$

$$\overline{\overline{y}}_4 = y_2 + \frac{h}{3}(\overline{y}_4' + 4y_3' + y_2') = 2{,}3243 + \frac{0{,}25}{3}(2{,}3588 + 4 \cdot 2{,}0584 + 1{,}8243) = 3{,}3590;$$

$$\varepsilon_4 = \frac{|\overline{y}_4 - \overline{\overline{y}}_4|}{29} = \frac{|3{,}3588 - 3{,}3590|}{29} = \frac{0{,}0002}{29} \approx 7 \cdot 10^{-6} < \frac{1}{2} \cdot 0{,}001;$$

prema tome nije potrebno revidirati korak računanja.

Dobivamo $y_4 = \overline{\overline{y}}_4 = 3{,}3590$ (prve tri znamenke u ovoj aproksimaciji su pouzdane).

Analogno ćemo računati vrijednosti y_5 i y_6. Rezultati računa uneseni su u tablicu 2.

Tako konačno imamo:

$$y(1{,}5) = 4{,}74.$$

Tablica 2. **Izračunavanje** y_4, y_5, y_6 **Milneovom metodom.** $f(x, y) = -x + y$; $h = 0,25$.
(kurzivom su označeni ulazni podaci)

i	x_i	y_i	$y_i' = f(x_i, y_i)$	$\overline{y}_i$	$\overline{y}_i' = f(x_i, \overline{y}_i)$	$\overline{\overline{y}}_i$	ε_i	y_i	$y_i' = f(x_i, y_i)$	Revizija koraka (prema formuli (6))
0	*0*	*1,5000*	*1,5000*							
1	*0,25*	*1,8920*	*1,6420*							
2	*0,50*	*2,3243*	*1,8243*							
3	*0,75*	*2,8084*	*2,0584*							
4	1,00			3,3588	2,3588	3,3590	$\approx 7 \cdot 10^{-5}$	3,3590	2,3590	nije potrebno
5	1,25			3,9947	2,7447	3,9950	$\approx 10^{-5}$	3,9950	2,7450	nije potrebno
6	1,50			4,7402	3,2402	4,7406	$\approx 1,4 \cdot 10^{-5}$	$\boxed{4,7406}$		nije potrebno
							Odgovor: $y(1,5) = 4,74$			

4°. Adamsova metoda. Za rješavanje zadatka (1) Adamsovom metodom polazimo od početnih podataka $y(x_0)=y_0$ i nađemo na bilo koji način ove tri vrijednosti tražene funkcije $y(x)$:

$$y_1=y(x_1)=y(x_0+h),\quad y_2=y(x_2)=y(x_0+2h),\quad y_3=y(x_3)=y(x_0+3h)$$

(te tri vrijednosti možemo naći, na primjer, pomoću razvoja $y(x)$ u red potencija (glava IX, 16) ili metodom postupnih približenja (1°) ili pak metodom Runge-Kutta (2°) i t. sl.).

Pomoću brojeva x_0, x_1, x_2, x_3 i y_0, y_1, y_2, y_3 izračunamo vrijednosti q_0, q_1, q_2, q_3, gdje su

$$q_0=hy_0'=hf(x_0,\ y_0),\qquad q_1=hy_1'=hf(x_1,\ y_1),$$
$$q_2=hy_2'=hf(x_2,\ y_2),\qquad q_3=hy_3'=hf(x_3,\ y_3).$$

Zatim sastavimo *dijagonalnu tablicu* konačnih diferencija veličina q:

x	y	$\Delta y=$ $=y_{n+1}-y_n$	$y'=f(x,y)$	$q=$ $=y'h$	$\Delta q=$ $=q_{n+1}-q_n$	$\Delta^2 q=$ $=\Delta q_{n+1}-\Delta q_n$	$\Delta^3 q=$ $=\Delta^2 q_{n+1}-\Delta^2 q_n$
x_0	y_0	Δy_0	$f(x_0,y_0)$	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
x_1	y_1	Δy_1	$f(x_1,y_1)$	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	$\Delta^3 q_1$
x_2	y_2	Δy_2	$f(x_2,y_2)$	q_2	Δq_2	$\Delta^2 q_2$	$\Delta^3 q_2$
x_3	y_3	Δy_3	$f(x_3,y_3)$	q_3	Δq_3	$\Delta^2 q_3$	
x_4	y_4	Δy_4	$f(x_4,y_4)$	q_4	Δq_4		
x_5	y_5	Δy_5	$f(x_5,y_5)$	q_5			
x_6	y_6						

Adamsova metoda sastoji se u produženju dijagonalne tablice diferencija pomoću *Adamsove formule*

$$\Delta y_n=q_n+\frac{1}{2}\Delta q_{n-1}+\frac{5}{12}\Delta^2 q_{n-2}+\frac{3}{8}\Delta^3 q_{n-3}. \tag{7}$$

Tako, upotrebom brojeva q_3, Δq_2, $\Delta^2 q_1$, $\Delta^3 q_0$ koji su u tablici diferencija raspoređeni po dijagonali, pomoću formule (7) u kojoj stavimo $n=3$, izračunamo $\Delta y_3=q_3+\frac{1}{2}\Delta q_2+\frac{5}{12}\Delta^2 q_1+$ $+\frac{3}{8}\Delta^3 q_0$. Kada smo našli vrijednost Δy_3, računamo $y_4=y_3+\Delta y_3$. Kada pak znamo x_4 i y_4, izračunamo $q_4=hf(x_4,y_4)$, unesemo y_4, Δy_3 i q_4 u tablicu diferencija i dopunimo je zatim konačnim diferencijama Δq_3, $\Delta^2 q_2$, $\Delta^3 q_1$ koje zajedno sa q_4 čine novu dijagonalu, paralelnu prethodnoj.

Zatim, upotrebom brojeva iz nove dijagonale pomoću formule (7) u kojoj stavimo $n=4$ izračunamo Δy_4, y_5 i q_5 i dobijemo daljnju dijagonalu q_5, Δq_4, $\Delta^2 q_3$, $\Delta^3 q_2$. Pomoću te dijagonale izračunamo vrijednost y_6 traženog rješenja $y(x)$ itd.

Adamsova formula (7) za izračunavanje Δy polazi od pretpostavke da su treće konačne diferencije $\Delta^3 q$ konstantne. Suglasno tome vrijednost h početnog koraka računanja određuje se iz nejednadžbe $h^4<10^{-m}$ (ako želimo dobiti vrijednost $y(x)$ s tačnošću do 10^{-m}).

U tome smislu je Adamsova formula (7) ekvivalentna formuli Milnea (5) i formulama Runge-Kutta (3).

Ocjena pogreške za Adamsovu metodu je složena i praktički nekorisna, jer općenito daje znatno previsoke vrijednosti. U praksi promatramo treće konačne diferencije i izaberemo korak h tako malen da se susjedne razlike $\Delta^3 q_i$ i $\Delta^3 q_{i+1}$ međusobno razlikuju najviše za jednu do dvije jedinice zadanog reda tačnosti (ne računajući rezervne znamenke).

Za povišenje tačnosti rezultata Adamsova formula se može dopuniti članovima s četvrtim i višim diferencijama veličine q. Pri tome raste broj prvih vrijednosti funkcije y koje su nam potrebne za početno popunjenje tablice. Adamsovu formulu povišene tačnosti nećemo razmatrati.

Primjer 2. Izračunajmo kombiniranom metodom Runge-Kutta i Adamsa s tačnošću do 0,01 vrijednosti rješenja diferencijalne jednadžbe $y' = y - x$ za $x = 1{,}5$ s početnim uvjetom $y(0) = 1{,}5$ (v. primjer 6).

Rješenje. Služimo se vrijednostima y_1, y_2, y_3, koje smo dobili u rješavanju primjera 1. Njihovo izračunavanje vidimo iz tablice 1. Iduće vrijednosti y_4, y_5, y_6 izračunat ćemo Adamsovom metodom (v. tablice 3 i 4).

Tablica 3. **Osnovna tablica za izračunavanje y_4, y_5, y_6 Adamsovom metodom**

$$f(x, y) = -x + y; \quad h = 0{,}25$$

(*kurzivom su označeni ulazni podaci*)

i	x_i	y_i	Δy_i	$y_i' = f(x_i, y_i)$	$q_i = y_i' h$	Δq_i	$\Delta^2 q_i$	$\Delta^3 q_i$
0	*0*	*1,5000*	▨	*1,5000*	0,3750	0,0355	0,0101	0,0028
1	*0,25*	*1,8920*	▨	*1,6420*	0,4105	0,0456	0,0129	0,0037
2	*0,50*	*2,3243*	▨	*1,8243*	0,4561	0,0585	0,0166	0,0047
3	*0,75*	*2,8084*	0,5504	2,0584	0,5146	0,0751	0,0213	
4	1,00	3,3588	0,6356	2,3588	0,5897	0,0964		
5	1,25	3,9944	0,7450	2,7444	0,6861			
6	1,50	$\boxed{4{,}7394}$						

Odgovor: 4,74

Tablica 4. **Pomoćna tablica za izračunavanje Adamsovom metodom**

$$\Delta y_i = q_i + \frac{1}{2}\Delta q_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{i-3}$$

Vrijednost i	q_i	$\frac{1}{2}\Delta q_{i-1}$	$\frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2}$	$\frac{3}{8}\Delta^3 q_{i-3}$	Δy_i
3	0,5146	0,0293	0,0054	0,0011	0,5504
4	0,5897	0,0376	0,0069	0,0014	0,6356
5	0,6861	0,0482	0,0089	0,0018	0,7450

Vrijednost $y_6 = 4{,}74$ bit će rezultat zadatka.

Kada rješavamo sistem (4), tada Adamsovu formulu (7) i shemu računa pokazanu u tablici 3 primjenjujemo odvojeno za obje funkcije $y(x)$ i $z(x)$.

Nađite tri uzastopna približna rješenja dalje navedenih diferencijalnih jednadžbi i sistema:

3176. $y' = x^2+y^2$; $y(0) = 0$.

3177. $y' = x+y+z$, $z' = y-z$; $y(0) = 1$, $x(0) = -2$.

3178. $y'' = -y$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Metodom Runge-Kutta, uzevši da je korak $h = 0{,}2$ izračunajte približno za navedene intervale rješenja zadanih diferencijalnih jednadžbi i sistema:

3179. $y' = y-x$; $y(0) = 1{,}5$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

3180. $y' = \dfrac{y}{x} - y^2$; $y(1) = 1$ $(1 \leqslant x \leqslant 2)$.

3181. $y' = z+1$, $z' = y-x$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

Primjenom kombinirane metode Runge-Kutta i Milnea ili Runge-Kutta i Adamsa, izračunajte s tačnošću do 0,01 vrijednosti rješenja dalje navedenih diferencijalnih jednadžbi i sistema uz naznačene vrijednosti argumenta:

3182. $y' = x+y$; $y = 1$ za $x = 0$. Izračunajte y za $x = 0{,}5$.

3183. $y' = x^2+y$; $y = 1$ za $x = 0$. Izračunajte y za $x = 1$.

3184. $y' = 2y-3$; $y = 1$ za $x = 0$. Izračunajte y za $x = 0{,}5$.

3185. $\begin{cases} y' = -x+2y+z, \\ z' = x+2y+3z; \quad y = 2, \quad z = -2 \text{ za } x = 0. \end{cases}$ Izračunajte y i z za $x = 0{,}5$.

3186. $\begin{cases} y' = -3y-z, \\ z' = y-z; \quad y = 2, \quad z = -1 \text{ za } x = 0. \end{cases}$ Izračunajte y i z za $x = 0{,}5$.

3187. $y'' = 2-y$; $y = 2$, $y' = -1$ za $x = 0$. Izračunajte y za $x = 1$.

3188. $y^3y''+1 = 0$; $y = 1$, $y' = 0$ za $x = 1$. Izračunajte y za $x = 1{,}5$.

3189. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{x}{2}\cos 2t = 0$; $x = 0$, $x' = 1$ za $t = 0$. Nađite $x(\pi)$ i $x'(\pi)$.

6. Približno izračunavanje Fourierovih koeficijenata

Shema 12 ordinata. Neka su $y_n = f(x_n)$ $(n = 0, 1, \ldots, 12)$ vrijednosti funkcije $y = f(x)$ u ekvidistantnim tačkama $x_n = \dfrac{\pi n}{6}$ odsječka $[0, 2\pi]$ pri čemu je $y_0 = y_{12}$. Sastavimo tablice:

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
		y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	
Suma (Σ)	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
Razlika (Δ)		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	

	u_0	u_1	u_2	u_3
	u_6	u_5	u_4	
Sume	s_0	s_1	s_2	s_3
Razlike	t_0	t_1	t_2	

	v_1	v_2	v_3
	v_5	v_4	
Sume	σ_1	σ_2	σ_3
Razlike	τ_1	τ_2	

Fourierovi koeficijenti a_n, b_n $(n=0, 1, 2, 3)$ funkcije $f(x)$ mogu se približno odrediti po formulama:

$$\begin{aligned} 6a_0 &= s_0+s_1+s_2+s_3, & 6b_1 &= 0{,}5\sigma_1+0{,}866\sigma_2+\sigma_3,\\ 6a_1 &= t_0+0{,}866t_1+0{,}5t_2, & 6b_2 &= 0{,}866\,(\tau_1+\tau_2),\\ 6a_2 &= s_0-s_3+0{,}5\,(s_1-s_2), & 6b_3 &= \sigma_1-\sigma_3, \qquad (1)\\ 6a_3 &= t_0-t_2, \end{aligned}$$

gdje je $0{,}866=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx 1-\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{30}$.

Imamo:

$$f\,(x)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{3}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

No mogu se upotrijebiti i druge sheme. Da bi olakšali računanje često se služimo *šablonama.*

Primjer. Nađimo Fourierov polinom za funkciju $y=f\,(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$ koja je zadana tablicom

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}
38	38	12	4	14	4	−18	−23	−27	−24	8	32

Rješenje. Sastavimo tablicu

$$\begin{array}{c|rrrrrrr} \multirow{2}{*}{y} & 38 & 38 & 12 & 4 & 14 & 4 & -18\\ & & 32 & 8 & -24 & -27 & -23 & \\ \hline u & 38 & 70 & 20 & -20 & -13 & -19 & -18\\ v & & 6 & 4 & 28 & 41 & 27 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|rrrr} u & 38 & 70 & 20 & -20\\ & -18 & -19 & -13 & \\ \hline s & 20 & 51 & 7 & -20\\ t & 56 & 89 & 33 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|rrr} v & 6 & 4 & 28\\ & 27 & 41 & \\ \hline \sigma & 33 & 45 & 28\\ \tau & -21 & -37 & \end{array}$$

Po formulama (1) imamo:

$$a_0=9{,}7;\quad a_1=24{,}9;\quad a_2=10{,}3;\quad a_3=3{,}8;$$
$$b_1=13{,}9;\quad b_2=-8{,}4;\quad b_3=0{,}8.$$

Prema tome je

$$f\,(x)\approx 4{,}8+(24{,}9\cos x+13{,}9\sin x)+(10{,}3\cos 2x-8{,}4\sin 2x)+(3{,}8\cos 3x+0{,}8\sin 3x).$$

Primjenom sheme sa 12 ordinata nađite Fourierove polinome za dalje navedene funkcije koje su zadane u intervalu $[0, 2\pi]$ tablicama svojih vrijednosti koje odgovaraju jednako udaljenim vrijednostima argumenta $(y_0=y_{12})$:

3190. $y_0=-7200$ $y_3=4300$ $y_6=7400$ $y_9=7600$
$y_1=300$ $y_4=0$ $y_7=-2250$ $y_{10}=4500$
$y_2=700$ $y_5=-5200$ $y_8=3850$ $y_{11}=250$

3191. $y_0=0$ $y_3=9{,}72$ $y_6=7{,}42$ $y_9=5{,}60$
$y_1=6{,}68$ $y_4=8{,}97$ $y_7=6{,}81$ $y_{10}=4{,}88$
$y_2=9{,}68$ $y_5=8{,}18$ $y_8=6{,}22$ $y_{11}=3{,}67$

3192. $y_0 = 2{,}714$ $y_3 = 1{,}273$ $y_6 = 0{,}370$ $y_9 = -0{,}357$
$y_1 = 3{,}042$ $y_4 = 0{,}788$ $y_7 = 0{,}540$ $y_{10} = -0{,}437$
$y_2 = 2{,}134$ $y_5 = 0{,}495$ $y_8 = 0{,}191$ $y_{11} = 0{,}767$

3193. Izračunajte nekoliko prvih Fourierovih koeficijenata po shemi sa 12 ordinata za ove funkcije:

a) $f(x) = \dfrac{1}{2\pi^2}(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi),$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\pi^2}(x - \pi)^2 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi).$

ODGOVORI

GLAVA I

1. *Rješenje.* Budući da je $a=(a-b)+b$, to je $|a| \leqslant |a-b|+|b|$. Odatle je $|a-b| \geqslant |a|-|b|$ i $|a-b|=|b-a| \geqslant |b|-|a|$. Prema tome je $|a-b| \geqslant \big||a|-|b|\big|$. Osim toga je $|a-b|=|a+(-b)| \leqslant |a|+|-b|=|a|+|b|$.

3. a) $-2<x<4$; b) $x<-3$, $x>1$; c) $-1<x<0$; d) $x>0$.

4. -24; -6; 0; 0; 0; 6.

5. 1; $1\frac{1}{4}$; $\sqrt{1+x^2}$; $|x|^{-1}\sqrt{1+x^2}$; $1/\sqrt{1+x^2}$. **6.** π; $\frac{\pi}{2}$; 0.

7. $f(x)=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$. **8.** $f(x)=\frac{7}{6}x^2-\frac{13}{6}x+1$.

9. 0,4. **10.** $\frac{1}{2}(x+|x|)$. **11.** a) $-1 \leqslant x<+\infty$; b) $-\infty<x<+\infty$.

12. $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, +\infty)$.

13. a) $-\infty<x \leqslant -\sqrt{2}$, $\sqrt{2} \leqslant x<+\infty$; b) $x=0$, $|x| \geqslant \sqrt{2}$.

14. $-1 \leqslant x \leqslant 2$. *Rješenje.* Mora biti $2+x-x^2 \geqslant 0$, ili $x^2-x-2 \leqslant 0$, tj. $(x+1)(x-2) \leqslant 0$. Odatle je $x+1 \geqslant 0$, $x-2 \leqslant 0$, tj. $-1 \leqslant x \leqslant 2$; ili $x+1 \leqslant 0$, $x-2 \geqslant 0$, tj. $x \leqslant -1$, $x \geqslant 2$ što nije moguće. Prema tome je $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

15. $-2<x \leqslant 0$. **16.** $-\infty<x \leqslant -1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. **17.** $-2<x<2$.

18. $-1<x<1$, $2<x<+\infty$. **19.** $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$. **20.** $1 \leqslant x \leqslant 100$.

21. $k\pi \leqslant x \leqslant k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **22.** $\varphi(x)=2x^4-5x^2-10$, $\psi(x)=-3x^3+6x$.

23. a) parna; b) neparna; c) parna; d) neparna; e) neparna.

24. *Uputa.* Upotrijebite identitet $f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$.

26. a) Periodična, $T=\frac{2}{3}\pi$; b) periodična, $T=\frac{2\pi}{\lambda}$; c) periodična, $T=\pi$; d) periodična, $T=\pi$; e) neperiodična.

27. $y=\frac{b}{c}x$, ako je $0 \leqslant x \leqslant c$; $y=b$, ako je $c<x \leqslant a$; $S=\frac{b}{2c}x^2$, ako je $0 \leqslant x \leqslant c$; $S=bx-\frac{bc}{2}$, ako je $c<x \leqslant a$.

28. $m=q_1x$ za $0 \leqslant x \leqslant l_1$; $m=q_1l_1+q_2(x-l_1)$ ako je $l_1<x \leqslant l_1+l_2$; $m=q_1l_1+q_2l_2+q_3(x-l_1-l_2)$ za $l_1+l_2<x \leqslant l_1+l_2+l_3=l$.

29. $\varphi(\psi(x))=2^{2x}$; $\psi(\varphi(x))=2^{x^2}$. **30.** x. **31.** $(x+2)^2$.

37. $-\frac{\pi}{2}$; 0; $\frac{\pi}{4}$.

38. a) $y=0$ za $x=-1$, $y>0$ za $x>-1$, $y<0$ za $x<-1$; b) $y=0$ za $x=-1$ i $x=2$, $y>0$ za $-1<x<2$, $y<0$ za $-\infty<x<-1$ i $2<x<+\infty$; c) $y>0$ za $-\infty<x<+\infty$; d) $y=0$ za $x=0$, $x=-\sqrt{3}$ i $x=\sqrt{3}$, $y>0$ za $-\sqrt{3}<x<0$ i $\sqrt{3}<x<+\infty$, $y<0$ ako je $-\infty<x<-\sqrt{3}$ i $0<x<\sqrt{3}$; e) $y=0$ ako je $x=1$, $y>0$ ako je $-\infty<x<-1$ i $1<x<+\infty$, $y<0$ ako je $0<x<1$.

39. a) $x=\frac{1}{2}(y-3)\ (-\infty<y<+\infty)$; b) $x=\sqrt{y+1}$ i $x=-\sqrt{y+1}\ (-1\leqslant y<+\infty)$;

c) $x=\sqrt[3]{1-y^3}\ (-\infty<y<+\infty)$; d) $x=2\cdot 10^y\ (-\infty<y<+\infty)$;

e) $x=\frac{1}{3}\operatorname{tg} y\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$.

40. $x=y$ ako je $-\infty<y\leqslant 0$; $x=\sqrt{y}$ ako je $0<y<+\infty$.

41. a) $y=u^{10}$, $u=2x-5$; b) $y=2^u$, $u=\cos x$; c) $y=\lg u$, $u=\operatorname{tg} v$, $v=\frac{x}{2}$; d) $y=\arcsin u$, $u=3^v$, $v=-x^2$.

42. a) $y=\sin^2 x$; b) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\lg x}$; c) $y=2(x^2-1)$, za $|x|\leqslant 1$, i $y=0$ ako je $|x|>1$.

43. a) $y=-\cos x^2$, $\sqrt{\pi}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2\pi}$; b) $y=\lg(10-10^x)$, $-\infty<x<1$; c) $y=\frac{x}{3}$ ako je $-\infty<x<0$ i $y=x$ ako je $0\leqslant x<+\infty$.

47. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 1.

51. *Uputa.* Dopunom kvadratnog trinoma na puni kvadrat, dobivamo $y=y_0+a(x-x_0)^2$, gdje je $x_0=-b/2a$ i $y_0=(4ac-b^2)/4a$. Odatle izlazi da je traženi graf parabola $y=ax^2$ pomaknuta u smjeru osi OX za x_0 i u smjeru osi OY za y_0.

53. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, slika 2.

58. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 3.

61. *Uputa.* Graf je hiperbola $y=\frac{m}{x}$, pomaknuta u smjeru osi OX za x_0 i u smjeru osi OY za y_0.

62. *Uputa.* Izdvojimo li cijeli dio, dobivamo $y=\frac{2}{3}-\frac{13}{9}\Big/\left(x+\frac{2}{3}\right)$ (vidjeti br. 61).

65. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 4.

67. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 5.

71. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 6.

72. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 7.

73. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 8

75. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 19.

78. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl 23.

80. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 9.

81. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 9.

82. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 10.

83. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 10.

84. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 11.

85. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 11.

87. *Uputa.* Period funkcije je $T=2\pi/n$.

89. *Uputa.* Traženi graf je sinusoida $y=5\sin 2x$ s amplitudom 5 i periodom π, pomaknuta udesno duž osi OX za $1\frac{1}{2}$.

90. *Uputa.* Staviviši $a=A\cos\varphi$ i $b=-A\sin\varphi$, dobit ćemo da je $y=A\sin(x-\varphi)$, gdje je $A=\sqrt{a^2+b^2}$ i $\varphi=\operatorname{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right)$. U našem primjeru je $A=10$, $\varphi=0{,}927$.

92. *Uputa.* $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

93. *Uputa.* Traženi graf je zbroj grafova $y_1=x$ i $y_2=\sin x$.

94. *Uputa.* Traženi graf je produkt grafova $y_1=x$ i $y_2=\sin x$.

99. *Uputa.* Funkcija je parna. Za $x>0$ odredimo tačke u kojima su 1) $y=0$; 2) $y=1$ i 3) $y=-1$. Kada $x\to+\infty$, $y\to 1$.

101. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 14. **102.** *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 15.

103. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 17. **104.** *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 17.

105. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 18. **107.** *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 16.

118. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 12. **119.** *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 12.

120. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 13. **121.** *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 13.

132. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 30. **133.** *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 32.

134. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 31. **138.** *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 33.

139. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 28. **140.** *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 25.

141. *Uputa.* Sastavimo tablicu vrijednosti

t	0	1	2	3	...	-1	-2	-3
x	0	1	8	27	...	-1	-8	-27
y	0	1	4	9	...	1	4	9

Konstruiramo li dobivene tačke (x, y) dobivamo traženu krivulju (vidjeti prilog VI, sl. 8). (Parametar t se pritom geometrijski ne odvaja!)

142. Vidjeti prilog VI, sl. 19. **143.** Vidjeti prilog VI, sl. 27.

144. Vidjeti prilog VI, sl. 29. **145.** Vidjeti prilog VI, sl. 22.

150. Vidjeti prilog VI, sl. 28.

151. *Uputa.* Riješimo li jednadžbu po y, dobivamo $y = \pm\sqrt{25-x^2}$. Sada je lako po tačkama konstruirati traženu krivulju.

153. Vidjeti prilog VI, sl. 21.

156. Vidjeti prilog VI, sl. 27. Dovoljno je konstruirati tačke (x, y) koje pripadaju apscisama $x=0, \pm\frac{a}{2}, \pm a$.

157. *Uputa.* Riješimo li jednadžbu po x, dobivamo $x = 10 \lg y - y^{(*)}$. Odatle dobivamo tačke (x, y) tražene krivulje dajući ordinatama y po volji odabrane vrijednosti $(y > 0)$ i prema formuli (*) izračunajući abscisu x. Treba imati na umu da $\lg y \to -\infty$ kada $y \to 0$.

159. *Uputa.* Prijelazom na polarne koordinate $r = \sqrt{x^2+y^2}$ i $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, dobivamo da je $r = e^{\varphi}$ (vidjeti prilog VI, sl. 32).

160. *Uputa.* Prijelazom na polarne koordinate $x = r\cos\varphi$ i $y = r\sin\varphi$, dobivamo $r = \frac{3\sin\varphi \quad \cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$ (vidjeti prilog VI, sl. 22).

161. $F = 32 + 1{,}8\,C$. **162.** $y = 0{,}6x\,(10-x)$; $y_{\max} = 15$ za $x = 5$.

163. $y = \frac{ab}{2}\sin x$; $y_{\max} = \frac{ab}{2}$ za $x = \frac{\pi}{2}$.

164. a) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$; b) $x = 0{,}68$; c) $x_1 = 1{,}37$, $x_2 = 10$; d) $x = 0{,}40$; e) $x = 1{,}50$; f) $x = 0{,}86$.

165. a) $x_1 = 2, y_1 = 5$; $x_2 = 5, y_2 = 2$; b) $x_1 = -3, y_1 = -2$; $x_2 = -2, y_2 = -3$; $x_3 = 2, y_3 = 3$; $x_4 = 3, y_4 = 2$; c) $x_1 = 2, y_1 = 2$; $x_2 \approx 3{,}1, y_2 \approx -2{,}5$; d) $x_1 \approx -3{,}6, y_1 \approx -3{,}1$; $x_2 \approx -2{,}7, y_2 \approx 2{,}9$; $x_3 \approx 2{,}9, y_3 \approx 1{,}8$,; $x_4 \approx 3{,}4, y_4 \approx -1{,}6$; e) $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2 = \frac{5\pi}{4}$, $y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

166. $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. a) $n \geqslant 4$; b) $n > 10$; c) $n \geqslant 32$.

167. $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N$. a) $N = 9$; b) $N = 99$; c) $N = 999$.

168. $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ $(\varepsilon < 1)$. a) 0,02; b) 0,002; c) 0,0002.

169. a) $\lg x < -N$ ako je $0 < x < \delta(N)$; b) $2^x > N$ ako je $x > X(N)$; c) $|f(x)| > N$ za $|x| > X(N)$.

170. a) 0; b) 1; c) 2; d) $\frac{7}{30}$.

171. $\frac{1}{2}$.

172. 1.

173. $-\frac{3}{2}$.

174. 1.

175. 3.

176. 1.

177. $\frac{3}{4}$.

178. $\frac{1}{3}$ *Uputa.* Upotrijebite: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

179. 0.

180. 0.

181. 1.

182. 0.

183. ∞.

184. 0.

185. 72.

186. 2.

187. 2.

188. ∞.

189. 0.

190. 1.

191. 0.

192. ∞.

193. -2.

194. ∞.

195. $\frac{1}{2}$.

196. $\frac{a-1}{3a^2}$.

197. $3x^2$.

198. -1.

199. $\frac{1}{2}$.

200. 3.

201. $\frac{4}{3}$.

202. $\frac{1}{9}$.

203. $-\frac{1}{56}$.

204. 12.

205. $\frac{3}{2}$.

206. $-\frac{1}{3}$.

207. 1.

208. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

209. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

210. $-\frac{1}{3}$.

211. 0.

212. $\frac{a}{2}$.

213. $-\frac{5}{2}$.

214. $\frac{1}{2}$.

215. 0.

216. a) $\frac{1}{2}\sin 2$; b) 0.

217. 3.

218. $\frac{5}{2}$.

219. $\frac{1}{3}$.

220. π.

221. $\frac{1}{2}$.

222. $\cos a$.

223. $-\sin a$.

224. π.

225. $\cos x$.

226. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

227. a) 0; b) 1.

228. $\frac{2}{\pi}$.

229. $\frac{1}{2}$.

230. 0.

231. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

232. $\frac{1}{2}(n^2 - m^2)$.

233. $\frac{1}{2}$.

234. 1.

235. $\frac{2}{3}$.

236. $\frac{2}{\pi}$.

237. $-\frac{1}{4}$.

238. π.

239. $\frac{1}{4}$.

240. 1.

241. 1.

242. $\frac{1}{4}$.

243. 0.

244. $\frac{3}{2}$.

245. 0.

246. e^{-1}.

247. e^3.

248. e^{-1}.

249. e^{-4}.

250. e^x.

251. e.

252. a) 1. *Rješenje.* $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}[1-(1-\cos x)]^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right)}$. Budući da je

$\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right) = -2\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{x^2}{4x}\right] = -2\cdot 1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{4} = 0$, to je $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} =$

$= e^{\circ} = 1$; b) $\frac{1}{\sqrt{e}}$. *Rješenje.* Analogno naprijed pokazanom (primjer a) imamo,

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)}$. Budući da je $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right) = -2\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{x^2}{4x^2}\right] =$

$= -\frac{1}{2}$, to je $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

253. ln 2. **254.** 10 lg e. **255.** 1. **256.** 1.

257. $-\frac{1}{2}$. **258.** 1. *Uputa.* Uzmimo da je $e^x - 1 = \alpha$, gdje $\alpha\to 0$.

259. ln a. *Uputa.* Poslužimo se identitetom $a = e^{\ln a}$.

260. ln a. *Uputa.* Stavimo $\frac{1}{n} = \alpha$, gdje $\alpha\to 0$ (vidjeti primjer 259). **261.** $a-b$.

262. 1. **263.** a) 1; b) $\frac{1}{2}$. **264.** a) -1; b) 1. **265.** a) -1; b) 1.

266. a) 1; b) 0. **267.** a) 0; b) 1. **268.** a) -1; b) 1. **269.** a) -1; b) 1.

270. a) $-\infty$; b) $+\infty$.

271. *Rješenje.* Ako je $x \neq k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, onda je $\cos^2 x < 1$ i $y = 0$; ako je pak $x = k\pi$, onda je $\cos^2 x = 1$ i $y = 1$.

272. $y = x$ za $0 \leqslant x < 1$; $y = \frac{1}{2}$ za $x = 1$; $y = 0$ za $x > 1$. **273.** $y = |x|$.

274. $y = -\frac{\pi}{2}$ za $x < 0$; $y = 0$ za $x = 0$; $y = \frac{\pi}{2}$ za $x > 0$.

275. $y = 1$ za $0 \leqslant x \leqslant 1$; $y = x$ za $1 < x < +\infty$. **276.** $\frac{61}{450}$.

277. $x_1 \to -\frac{c}{b}$; $x_2 \to \infty$. **278.** π. **279.** $2\pi R$.

280. $\frac{e}{e-1}$. **281.** $1\frac{1}{3}$. **282.** $\frac{\sqrt{e^{\pi}+1}}{e^{\frac{\pi}{2}}-1}$. **284.** $\lim\limits_{n\to\infty} AC_n = \frac{l}{3}$.

285. $\frac{ab}{2}$. **286.** $k = 1$, $b = 0$; pravac $y = x$ je asimptota krivulje $y = \frac{x^3+1}{x^2+1}$.

287. $Q_t^{(n)} = Q_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)^n$, gdje je k koeficijent proporcionalnosti („zakon složenih kamata"); $Q_t = Q_0 e^{kt}$.

288. $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$; a) $|x|>10$; b) $|x|>100$; c) $|x|>1000$.

289. $|x-\quad|<\frac{\varepsilon}{2}$ ako je $0<\varepsilon<1$; a) $|x-1|<0{,}05$; b) $|x-1|<0{,}005$; c) $|x-1|<0{,}0005$.

290. $|x-2|<\frac{1}{N}=\delta$; a) $\delta=0{,}1$; b) $\delta=0{,}01$; c) $\delta=0{,}001$. **291.** a) Drugi; b) treći, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$.

292. a) 1; b) 2; c) 3. **293.** a) 1; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{2}{3}$; d) 2; e) 3. **295.** Ne.

296. 15. **297.** -1. **298.** -1. **299.** 3.

300. a) 1,03 (1,0296); b) 0,985 (0,9849); c) 3,167 (3,1623). *Uputa.* $\sqrt{10}=\sqrt{9+1}=3\sqrt{1+\frac{1}{9}}$; d) 10,954 (10,954).

301. 1) 0,98 (0,9804); 2) 1,03 (1,0309); 3) 0,0095 (0,00952); 4) 3,875 (3,8730); 5) 1,12 (1,125); 6) 0,72 (0,7480); 7) 0,043 (0,04139).

303. a) 2; b) 4; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{2}{3}$.

307. *Uputa.* Ako je $x>0$ onda za $|\Delta x|<x$ imamo $|\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}|=|\Delta x|/(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})\leqslant\leqslant|\Delta x|/\sqrt{x}$.

309. *Uputa.* Upotrijebite nejednadžbu $|\cos(x+\Delta x)-\cos x|\leqslant|\Delta x|$.

310. a) $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, gdje je k cio broj; b) $x\neq k\pi$, gdje je k cio broj.

311. *Uputa.* Upotrijebite nejednadžbu $||x+\Delta x|-|x||\leqslant|\Delta x|$.

313. $A=4$. **314.** $f(0)=1$. **315.** Ne.

316. a) $f(0)=n$; b) $f(0)=\frac{1}{2}$; c) $f(0)=2$; d) $f(0)=2$; e) $f(0)=0$; f) $f(0)=1$.

317. $x=2$, tačka prekinutosti druge vrste. **318.** $x=-1$, tačka uklonjive prekinutosti.

319. $x=-2$, tačka prekinutosti druge vrste; $x=2$, tačka uklonjive prekinutosti.

320. $x=0$, tačka prekinutosti prve vrste.

321. a) $x=0$, tačka prekinutosti druge vrste; b) $x=0$, tačka uklonjive prekinutosti.

322. $x=0$, tačka uklonjive prekinutosti, a $x=k\pi$ $(k=\pm1, \pm2, \ldots)$ su tačke neizmjerne prekinutosti.

323. $x=2\pi k\pm\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$ su tačke neizmjerne prekinutosti.

324. $x=k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$ su tačke neizmjerne prekinutosti.

325. $x=0$, tačka prekinutosti prve vrste.

326. $x=-1$, tačka uklonjive prekinutosti; $x=1$, tačka prekinutosti prve vrsti.

327. $x=-1$, tačka prekinutosti druge vrsti.

328. $x=0$, tačka uklonjive prekinutosti. **329.** $x=1$, tačka prekinutosti prve vrste.

330. $x=3$, tačka prekinutosti prve vrste. **332.** $x=1$, tačka prekinutosti prve vrste.

333. Funkcija je neprekinuta.

334. a) $x=0$, tačka prekinutosti prve vrsti; b) funkcija je neprekinuta; c) $x=k\pi$ (k je cio broj), tačke prekinutosti prve vrste.

335. a) $x = k$ (k je cijeli broj), tačke prekinutosti prve vrste; b) $x = k$ ($k \neq 0$ je cijeli broj), tačke prekinutosti prve vrste.

337. Ne, jer je funkcija $y = E(x)$ prekinuta za $x = 1$. **338.** 1,53.

339. *Uputa.* Pokažite da pri dovoljno velikom x_0 imamo $P(-x_0)\,P(x_0) < 0$.

GLAVA II

341. a) 3; b) 0,21; c) $2h + h^2$. **342.** a) 0,1; b) -3; c) $\sqrt[3]{a+h} - \sqrt[3]{a}$.

344. a) 624; 1560; b) 0,01; 100; c) -1; 0,000011.

345. a) $a\Delta x$; a; b) $3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$; $3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$;

c) $-\dfrac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2}$; $-\dfrac{2x+\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$; d) $\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$; $\dfrac{1}{\sqrt{x-\Delta x}+\sqrt{x}}$;

e) $2^x(2^{\Delta x} - 1)$; $\dfrac{2^x(2^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$; f) $\ln\dfrac{x+\Delta x}{x}$; $\dfrac{1}{\Delta x}\ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)$.

346. a) -1; b) 0,1; c) $-h$; 0. **347.** 21. **348.** 15 cm/s.

349. 7,5. **350.** $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. **351.** $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

352. a) $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$; b) $\dfrac{d\varphi}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, gdje je φ veličina kuta vrtnje u trenutku t.

353. a) $\dfrac{\Delta T}{\Delta t}$; b) $\dfrac{dT}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta T}{\Delta t}$, gdje je T temperatura u trenutku t.

354. $\dfrac{dQ}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$, gdje je Q količina tvari u trenutku t.

355. a) $\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$; b) $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$.

356. a) $-\dfrac{1}{6} \approx -0{,}16$; b) $-\dfrac{5}{21} \approx -0{,}238$; c) $-\dfrac{50}{201} \approx -0{,}249$; $y'_{x=2} = -0{,}25$.

357. $\sec^2 x$. *Rješenje.* $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(x+\Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x\cos x\cos(x+\Delta x)} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\cos x\cos(x+\Delta x)} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

358. a) $3x^2$; b) $-\dfrac{2}{x^3}$; c) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; d) $\dfrac{-1}{\sin^2 x}$.

359. $\dfrac{1}{12}$. *Rješenje.* $f'(8) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(8+\Delta x) - f(8)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+\Delta x} - \sqrt[3]{8}}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{8+\Delta x - 8}{\Delta x\left[\sqrt[3]{(8+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{(8+\Delta x)8} + \sqrt[3]{8^2}\right]} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(8+\Delta x)^2} + 2\sqrt[3]{8+\Delta x} + 4} = \frac{1}{12}.$$

360. $f'(0) = -8$, $f'(1) = 0$, $f'(2) = 0$.

361. $x_1 = 0$; $x_2 = 3$. *Uputa.* Jednadžba $f'(x) = f(x)$ za zadanu funkciju ima oblik $3x^2 = x^3$.

362. 30 m/s.

363. 1,2.

364. -1.

365. $f'(x_0) = \frac{-1}{x_0^2}$.

366. -1; 2; $\operatorname{tg}\varphi = 3$. *Uputa.* Koristimo se rezultatima primjera 3 i zadatka 365.

367. *Rješenje.* a) $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = \infty$;

b) $f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[5]{1+\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[5]{(\Delta x)^4}} = +\infty$;

c) $f'_-\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\left|\cos\left(\frac{2k+1}{2}\pi + \Delta x\right)\right|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{|\sin \Delta x|}{\Delta x} = -1$;

$f'_+\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{|\sin \Delta x|}{\Delta x} = 1$.

368. $5x^4 - 12x^2 + 2$.

369. $-\frac{1}{3} + 2x - 2x^3$.

370. $2ax + b$.

371. $-\frac{15x^2}{a}$.

372. $mat^{m-1} + b(m+n)t^{m+n-1}$.

373. $\frac{6ax^5}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

374. $-\frac{\pi}{x^2}$.

375. $2x^{-\frac{1}{3}} - 5x^{\frac{3}{2}} - 3x^{-4}$.

376. $\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}$. *Uputa.* $y = x^2 x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{8}{3}}$.

377. $\frac{4b}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2a}{3x\sqrt[3]{x^2}}$.

378. $\frac{bc-ad}{(c+dx)^2}$.

379. $\frac{-2x^2 - 6x + 25}{(x^2-5x+5)^2}$.

380. $\frac{1-4x}{x^2(2x-1)^2}$.

381. $\frac{1}{\sqrt{z}(1-\sqrt{z})^2}$.

382. $5\cos x - 3\sin x$.

383. $\frac{4}{\sin^2 2x}$.

384. $\frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$.

385. $t^2 \sin t$.

386. $y' = 0$.

387. $\operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x}$.

388. $\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

389. $x \operatorname{arctg} x$.

390. $x^6 e^x (x+7)$.

391. xe^x.

392. $e^x \frac{x-2}{x^3}$.

393. $\frac{5x^4 - x^5}{e^x}$.

394. $e^x(\cos x - \sin x)$.

395. $x^2 e^x$.

396. $e^x\left(\arcsin + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

397. $\frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$.

398. $3x^2 \ln x.$

399. $\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x^2}-\frac{2}{x^2}.$

400. $\frac{2 \ln x}{x \ln 10}-\frac{1}{x}.$

401. $\operatorname{sh} x+x \operatorname{ch} x.$

402. $\frac{2x \operatorname{ch} x-x^2 \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}.$

403. $-\operatorname{th}^2 x.$

404. $\frac{-3\,(x \ln x+\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x)}{x \ln^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 x}.$

405. $\frac{-2x^2}{1-x^4}.$

406. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arsh} x+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \arcsin x.$

407. $\frac{x-\sqrt{x^2-1} \operatorname{Arch} x}{x^2 \sqrt{x^2-1}}.$

408. $\frac{1+2x \operatorname{Arcth} x}{(1-x^2)^2}.$

410. $\frac{3a}{c}\left(\frac{ax+b}{c}\right)^2.$

411. $12ab+18b^2y.$

412. $16x\,(3+2x^2)^3.$

413. $\frac{x^2-1}{(2x-1)^8}.$

414. $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$

415. $\frac{bx^2}{\sqrt[3]{(a+bx^3)^2}}.$

416. $-\sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}-1}.$

418. $\frac{1-\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}.$

419. $\frac{-1}{2 \sin^2 x \sqrt{\operatorname{ctg} x}}.$

420. $2-15 \cos^2 x \sin x.$

421. $\frac{-16 \cos 2t}{\sin^3 2t}$. *Uputa.* $x=\sin^{-2}t+\cos^{-2} t.$

422. $\frac{\sin x}{(1-3 \cos x)^3}.$

423. $\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}.$

424. $\frac{3 \cos x+2 \sin x}{2 \sqrt{15 \sin x-10 \cos x}}.$

425. $\frac{2 \cos x}{3 \sqrt[3]{\sin x}}+\frac{3 \sin x}{\cos^4 x}.$

426. $\frac{1}{2 \sqrt{1-x^2} \sqrt{1+\arcsin x}}.$

427. $\frac{1}{2\,(1+x^2) \sqrt{\operatorname{arctg} x}}-\frac{3\,(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}.$

428. $\frac{-1}{(1+x^2)\,(\operatorname{arctg} x)^2}.$

429. $\frac{e^x+xe^x+1}{2 \sqrt{xe^x+x}}.$

430. $\frac{2e^x-2^x \ln 2}{3 \sqrt[3]{(2e^x-2^x+1)^2}}+\frac{5 \ln^4 x}{x}.$

432. $(2x-5) \times \cos\,(x^5-5x+1)-\frac{a}{x^2 \cos^2 \frac{a}{x}}.$

433. $-\alpha \sin\,(\alpha x+\beta).$

434. $\sin\,(2t+\varphi).$

435. $-2 \frac{\cos x}{\sin^3 x}.$

436. $\frac{-1}{\sin^2 \frac{x}{a}}.$

437. $x \cos 2x^2 \sin 3x^2.$

439. $\frac{-2}{x \sqrt{x^4-1}}.$

440. $\frac{-1}{2 \sqrt{x-x^2}}.$

441. $\frac{-1}{1+x^2}.$

442. $\frac{-1}{1+x^2}$. **443.** $-10xe^{-x^2}$.

444. $-2x\,5^{-x^2}\ln 5$. **445.** $2x\,10^{2x}(1+x\ln 10)$.

446. $\sin 2^t+2^t\,t\cos 2^t\ln 2$. **447.** $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. **448.** $\frac{2}{2x+7}$.

449. $\operatorname{ctg} x \lg e$. **450.** $\frac{-2x}{1-x^2}$. **451.** $\frac{2\ln x}{x}-\frac{1}{x\ln x}$.

452. $\frac{(e^x+5\cos x)\sqrt{1-x^2}-4}{(e^x+5\sin x-4\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}$. **453.** $\frac{1}{(1+\ln^2 x)x}+\frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$.

454. $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x+1}}+\frac{1}{2(\sqrt{x}+x)}$.

455. *Rješenje.* $y'=(\sin^3 5x)'\cos^2\frac{x}{3}+\sin^3 5x\left(\cos^2\frac{x}{3}\right)'=3\sin^2 5x\cos 5x\cdot 5\cos^2\frac{x}{3}+$

$+\sin^3 5x\cdot 2\cos\frac{x}{3}\left(-\sin\frac{x}{3}\right)\frac{1}{3}=15\sin^2 5x\cos 5x\cos^2\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\sin^3 5x\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}$.

456. $\frac{4x+3}{(x-2)^3}$. **457.** $\frac{x^2+4x-6}{(x-3)^5}$. **458.** $\frac{x^7}{(1-x^2)^5}$. **459.** $\frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$.

460. $\frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. **461.** $\frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$. **462.** $\frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}$. **463.** $x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}$.

464. $\frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$. **465.** $4x^3(a-2x^3)(a-5x^3)$.

466. $\frac{2abmnx^{n-1}(a+bx^n)^{m-1}}{(a-bx^n)^{m+1}}$. **467.** $\frac{x^3-1}{(x+2)^6}$. **468.** $\frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$.

469. $\frac{3x^2+2(a+b+c)x+ab+bc+ac}{2\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}}$. **470.** $\frac{1+2\sqrt{y}}{6\sqrt{y}\sqrt[3]{(y+\sqrt{y})^2}}$.

471. $2(7t+4)\sqrt[3]{3t+2}$. **472.** $\frac{y-a}{\sqrt{(2ay-y^2)^3}}$. **473.** $\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}$.

474. $\sin^3 x\cos^2 x$. **475.** $\frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}$. **476.** $10\operatorname{tg} 5x\sec^2 5x$. **477.** $x\cos x^2$.

478. $3t^2\sin 2t^3$. **479.** $3\cos x\cos 2x$. **480.** $\operatorname{tg}^4 x$. **481.** $\frac{\cos 2x}{\sin^4 x}$.

482. $\frac{(\alpha-\beta)\sin 2x}{2\sqrt{\alpha\sin^2 x+\beta\cos^2 x}}$. **483.** 0.

484. $\frac{1}{2}\,\frac{\arcsin x\,(2\arccos x-\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$ **485.** $\frac{2}{x\sqrt{2x^2-1}}$.

486. $\frac{1}{1+x^2}$.

487. $\frac{x\arccos x-\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^{3/2}}$.

488. $\frac{1}{\sqrt{a-bx^2}}$.

489. $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ $(a>0)$.

490. $2\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$.

491. $\frac{-x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

492. $\arcsin\sqrt{x}$.

493. $\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x}$.

494. $\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

495. $\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

496. $\frac{1}{5+4\sin x}$.

497. $4x\sqrt{\frac{x}{b-x}}$.

498. $\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$.

499. $\frac{a}{2}\sqrt{e^{ax}}$.

500. $\sin 2x e^{\sin^2 x}$.

501. $2m^2p\,(2ma^{mx}+b)^{p-1}\,a^{mx}\ln a$.

502. $e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t-\beta\sin\beta t)$.

503. $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

504. $e^{-x}\cos 3x$.

505. $x^{n-1}a^{-x^2}(n-2x^2\ln a)$.

506. $-\frac{1}{2}\,y\operatorname{tg} x\,(1+\sqrt{\cos x}\ln a)$.

507. $\frac{3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}\ln 3}{\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^2}$.

508. $\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$.

509. $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

510. $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

511. $\frac{1}{\sqrt{2ax+x^2}}$.

512. $\frac{-2}{x\ln^3 x}$.

513. $-\frac{1}{x^2}\operatorname{tg}\frac{x-1}{x}$.

514. $\frac{2x+11}{x^2-x-2}$. *Uputa.* $y=5\ln(x-2)-3\ln(x+1)$.

515. $\frac{3x^2-16x+19}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

516. $\frac{1}{\sin^3 x\cos x}$.

517. $\sqrt{x^2-a^2}$.

518. $\frac{-6x^2}{(3-2x^3)\ln(3-2x^3)}$.

519. $\frac{15a\ln^2(ax+b)}{ax+b}$.

520. $\frac{2}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

521. $\frac{mx+n}{x^2-a^2}$.

522. $\sqrt{2}\sin\ln x$.

523. $\frac{1}{\sin^3 x}$.

524. $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

525. $\frac{x+1}{x^3-1}$.

526. $\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\left[2^{\arcsin 3x}\ln 2+2(1-\arccos 3x)\right]$.

527. $\left(3^{\frac{\sin ax}{\cos bx}}\ln 3+\frac{\sin^2 ax}{\cos^2 bx}\right)\cdot\frac{a\cos ax\cos bx+b\sin ax\sin bx}{\cos^2 bx}$.

528. $\frac{1}{1+2\sin x}$.

529. $\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$.

530. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}+\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

531. $-\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$.

532. $\frac{x^2}{x^4+x^2-2}$.

533. $\frac{1}{\cos x\sqrt{\sin x}}$.

534. $\frac{x^2-3x}{x^4-1}$.

535. $\frac{1}{1+x^3}$.

536. $\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$.

537. $6\operatorname{sh}^2 2x\cdot\operatorname{ch} 2x$.

538. $e^{\alpha x}(\alpha\operatorname{ch}\beta x+\beta\operatorname{sh}\beta x)$.

539. $6\operatorname{th}^2 2x\,(1-\operatorname{th}^2 2x)$.

540. $2 \operatorname{cth} 2x$. **541.** $\dfrac{2x}{\sqrt{a^4+x^4}}$. **542.** $\dfrac{1}{x\sqrt{\ln^2 x-1}}$. **543.** $\dfrac{1}{\cos 2x}$.

544. $\dfrac{-1}{\sin x}$. **545.** $\dfrac{2}{1-x^2}$. **546.** $x \operatorname{Arth} x$. **547.** $x \operatorname{Arsh} x$.

548. a) $y'=1$ za $x>0$; $y'=-1$ za $x<0$; $y'(0)$ ne egzistira; b) $y'=|2x|$. **549.** $y'=\dfrac{1}{x}$.

550. $f'(x)=\begin{cases}-1 & \text{za } x\leqslant 0,\\ -e^{-x} & \text{za } x>0.\end{cases}$ **552.** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **553.** 6π.

554. a) $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$; b) $f'_-(0)=\dfrac{2}{a}$, $f'_+(0)=\dfrac{-2}{a}$; c) $f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=0$; d) $f'_-(0)=f'_+(0)=0$; e) $f'_-(0)$ i $f'_+(0)$ ne egzistiraju.

555. $1-x$. **556.** $2+\dfrac{x-3}{4}$. **557.** -1. **558.** 0.

561. *Rješenje.* Imamo $y'=e^{-x}(1-x)$. Budući da je $e^{-x}=\dfrac{y}{x}$, to je $y'=\dfrac{y}{x}(1-x)$ ili $xy'=y(1-x)$.

566. $(1+2x)(1+3x)+2(1+x)(1+3x)+3(x+1)(1+2x)$.

567. $-\dfrac{(x+2)(5x^2+19x+20)}{(x+1)^4(x+3)^5}$. **568.** $\dfrac{x^2-4x+2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}$.

569. $\dfrac{3x^2+5}{3(x^2+1)}\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$. **570.** $\dfrac{(x-2)^8(x^2-7x+1)}{(x-1)(x-3)\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$

571. $-\dfrac{5x^2+x-24}{3(x-1)^{1/2}(x+2)^{5/3}(x+3)^{5/2}}$. **572.** $x^x(1+\ln x)$. **573.** $x^{x^2+1}(1+2\ln x)$.

574. $\sqrt[x]{x}\,\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. **575.** $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\left(1+\dfrac{1}{2}\ln x\right)$.

576. $x^{x^x}x^x\left(\dfrac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right)$. **577.** $x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x}+\cos x \ln x\right)$.

578. $(\cos x)^{\sin x}(\cos x \ln \cos x-\sin x \operatorname{tg} x)$. **579.** $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}\right]$.

580. $(\operatorname{arctg} x)^x\left[\ln \operatorname{arctg} x+\dfrac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\right]$.

581. a) $x'_y=\dfrac{1}{3(1+x^2)}$; b) $x'_y=\dfrac{2}{2-\cos x}$; c) $x'_y=\dfrac{10}{1+5e^{\frac{x}{2}}}$.

582. $\dfrac{3}{2}t^2$. **583.** $\dfrac{-2t}{t+1}$. **584.** $\dfrac{-2t}{1-t^2}$. **585.** $\dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$.

586. $\dfrac{2}{3\sqrt[6]{t}}$. **587.** $\dfrac{t+1}{t(t^2+1)}$. **588.** $\operatorname{tg} t$. **589.** $-\dfrac{b}{a}$.

590. $-\dfrac{b}{a}\operatorname{tg} t$. **591.** $-\operatorname{tg} 3t$. **592.** $y'_x=\begin{cases}-1 & \text{za } t<0,\\ 1 & \text{za } t>0.\end{cases}$

593. $-2e^{3t}$. **594.** tg t. **596.** 1. **597.** ∞.

599. Ne. **600.** Da, jer je jednadžba identitet. **601.** $\frac{2}{5}$.

602. $-\frac{b^2x}{a^2y}$. **603.** $-\frac{x^2}{y^2}$. **604.** $-\frac{x(3x+2y)}{x^2+2y}$. **605.** $-\sqrt{\frac{y}{x}}$.

606. $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. **607.** $\frac{2y^2}{3(x^2-y^2)+2xy}=\frac{1-y^3}{1+3xy^2+4y^3}$. **608.** $\frac{10}{10-3\cos y}$.

609. -1. **610.** $\frac{y\cos^2 y}{1-x\cos^2 y}$. **611.** $\frac{y}{x}\,\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$. **612.** $(x+y)^2$.

613. $y'=\frac{1}{e^y-1}=\frac{1}{x+y-1}$. **614.** $\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$. **615.** $\frac{y}{x-y}$.

616. $\frac{x+y}{x-y}$. **617.** $\frac{cy+x\sqrt{x^2+y^2}}{cx-y\sqrt{x^2+y^2}}$. **618.** $\frac{x\ln y-y}{y\ln x-x}\,\frac{y}{x}$. **620.** a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) 0.

622. 45°; arctg $2\approx 63°26'$. **623.** 45°. **624.** arctg $\frac{2}{e}\approx 36°21'$.

625. $(0;\ 20)$; $(1;\ 15)$; $(-2;\ -12)$. **626.** $(1;\ -3)$. **627.** $y=x^2-x+1$.

628. $k=\frac{-1}{11}$. **629.** $\left(\frac{1}{8};\ -\frac{1}{16}\right)$. **631.** $y-5=0$; $x+2=0$.

632. $x-1=0$; $y=0$.

633. a) $y=2x$; $y=-\frac{1}{2}x$; b) $x-2y-1=0$; $2x+y-2=0$; c) $6x+2y-\pi=0$; $2x-6y+3\pi=0$; d) $y=x-1$; $y=1-x$; e) $2x+y-3=0$; $x-2y+1=0$ za tačke $(1;\ 1)$; $2x-y+3=0$; $x+2y-1=0$ za tačke $(-1;\ 1)$.

634. $7x-10y+6=0$, $10x+7y-34=0$.

635. $y=0$; $(\pi+4)\,x+(\pi-4)\,y-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}=0$.

636. $5x+6y-13=0$, $6x-5y+21=0$. **637.** $x+y-2=0$.

638. U tački $(1;\ 0)$: $y=2x-2$; $y=\frac{1-x}{2}$; u tački $(2;\ 0)$: $y=-x+2$; $y=x-2$; u tački $(3;\ 0)$: $y=2x-6$; $y=\frac{3-x}{2}$.

639. $14x-13y+12=0$; $13x+14y-41=0$.

640. *Uputa.* Jednadžba tangente je $\frac{x}{2x_0}+\frac{y}{2y_0}=1$. Prema tome tangenta siječe os OX u tački $A\,(2x_0,\ 0)$ i os OY u tački $B\,(0, 2y_0)$. Nađemo li polovište odsječka AB, dobijemo tačku $(x_0,\ y_0)$.

643. $40°36'$.

644. U tački (0, 0) parabole se dodiruju; u tački (1, 1) se sijeku pod kutom arctg $\frac{1}{7}\approx 8°8'$.

647. $S_t=S_n=2$; $t=n=2\sqrt{2}$. **648.** $\frac{1}{\ln 2}$.

652. $T=2a\sin\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{t}{2}$; $N=2a\sin\frac{t}{2}$; $S_t=2a\sin^2\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{t}{2}$; $S_n=a\sin t$.

653. $\operatorname{arctg}\frac{1}{k}$. **654.** $\frac{\pi}{2}+2\varphi$.

655. $S_t=4\pi^2 a$; $S_n=a$; $t=2\pi a\sqrt{1+4\pi^2}$; $n=a\sqrt{1+4\pi^2}$; $\operatorname{tg}\mu=2\pi$.

656. $S_t=a$; $S_n=\frac{a}{\varphi_0^2}$; $t=\sqrt{a^2+r_0^2}$; $n=\frac{r_0}{a}\sqrt{a^2+r_0^2}$; $\operatorname{tg}\mu=-\varphi_0$.

657. 3 cm/s; 0; -9 cm/s. **658.** 15 cm/s. **659.** $-\frac{3}{2}$ m/s.

660. Jednadžba trajektorije je $y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$. Domet je $\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$. Brzina iznosi $\sqrt{v_0^2-2v_0 gt\sin\alpha+g^2t^2}$; koeficijent smjera vektora brzine je $\frac{v_0\sin\alpha-gt}{v_0\cos\alpha}$. *Uputa.* Da bismo odredili trajektoriju, potrebno je eliminirati parametar t iz zadanog sistema. Domet je apscisa tačke A (sl. 17). Projekcije brzina na osi jesu: $\frac{dx}{dt}$ i $\frac{dy}{dt}$. Brzina je $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$; vektor brzine ima smjer tangente trajektorije.

661. Smanjuje se brzinom 0,4. **662.** $\left(\frac{9}{8},\frac{9}{2}\right)$.

663. Dijagonala raste s brzinom ~3,8 cm/s, a površina brzinom od 40 cm²/s.

664. Površina plohe raste brzinom od 0,2 π m²/s, a volumen brzinom od 0,05 π m³/s.

665. $\frac{\pi}{3}$ cm/s.

666. Masa cijelog štapa iznosi 360 g, gustoća u tački M jednaka je $5x$ g/cm, gustoća u tački A je 0 i gustoća u tački B je 60 g/cm.

667. $56x^6+210x^4$. **668.** $e^{x^2}(4x^2+2)$. **669.** $2\cos 2x$. **670.** $\frac{2(1-x^2)}{3(1+x^2)^2}$.

671. $\frac{-x}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. **672.** $2\operatorname{arctg}x+\frac{2x}{1+x^2}$. **673.** $\frac{2}{1-x^2}+\frac{2x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$.

674. $\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}$. **679.** $y'''=6$. **680.** $f'''(3)=4320$. **681.** $y^{V}=\frac{24}{(x+1)^5}$.

682. $y^{VI}=-64\sin 2x$. **684.** 0; 1; 2; 2.

685. Brzina $v=5$; 4,997; 4,7. Ubrzanje $a=0$; $-0{,}006$; $-0{,}06$.

686. Zakon po kome se tačka M_1 giba glasi $x=a\cos\omega t$; brzina u trenutku t je $-a\omega\sin\omega t$; ubrzanje u trenutku t je $-a\omega^2\cos\omega t$. Početna brzina je 0; početno ubrzanje je $-a\omega^2$; brzina za $x=0$ je $\mp a\omega$; ubrzanje za $x=0$ je 0. Maksimalna vrijednost apsolutne vrijednosti brzine je $a\omega$. Maksimalna vrijednost apsolutne vrijednosti ubrzanja je $a\omega^2$.

687. $y^{(n)}=n!\,a^n$. **688.** a) $n!\,(1-x)^{-(n+1)}$, b) $(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^n\cdot x^{n-\frac{1}{2}}}$.

689. a) $\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$; b) $2^n\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$; c) $(-3)^n e^{-3x}$; d) $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$; e) $\frac{(-1)^{n+1}n!}{(1+x)^{n+1}}$; f) $\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$; g) $2^{n-1}\sin\left[2x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]$; h) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,a^n}{(ax+b)^n}$.

690. a) $x \cdot e^x + ne^x$; b) $2^{n-1}e^{-2x}\left[2(-1)^n x^2 + 2n(-1)^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}\right]$;

c) $(1-x^2)\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - 2nx\cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right) - n(n-1)\cos\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)$;

d) $\frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^n x^{\frac{2n+1}{2}}}[x-(2n-1)]$; e) $\frac{(-1)^n\, 6\,(n-4)!}{x^{n-3}}$ za $n \geqslant 4$.

691. $y^{(n)}(0) = (n-1)!$

692. a) $9t^3$; b) $2t^2+2$; c) $-\sqrt{1-t^2}$.

693. a) $\frac{-1}{a\sin^3 t}$; b) $\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$; c) $\frac{-1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$; d) $\frac{-1}{at\sin^3 t}$.

694. a) 0; b) $2e^{3at}$.

695. a) $(1+t^2)(1+3t^2)$; b) $\frac{t(1+t)}{(1-t)^3}$.

696. $\frac{-2e^{-t}}{(\cos t+\sin t)^3}$.

697. Imamo $y = e^x - 1$ i $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = 1$. Obično pravilo deriviranja ovdje nije primjenljivo.

699. $\frac{3\operatorname{ctg}^4 t}{\sin t}$.

700. $\frac{4e^{2t}(2\sin t-\cos t)}{(\sin t+\cos t)^5}$.

701. $-6e^{3t}(1+3t+t^2)$.

702. $m^n t^m$.

703. $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{-f''(x)}{[f'(x)]^3}$; $\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3[f''(x)]^2 - f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}$.

705. $-\frac{p^2}{y^3}$.

706. $-\frac{b^4}{a^2y^3}$.

707. $-\frac{2y^2+2}{y^5}$.

708. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{(1-y)^3}$; $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{y^2}$.

709. $\frac{111}{256}$.

710. $-\frac{1}{16}$.

711. a) $\frac{1}{3}$; b) $-\frac{3a^2x}{y^5}$.

712. $\Delta y = 0{,}009001$; $dy = 0{,}009$.

713. $d(1-x^3) = 1$ za $x = 1$ i $\Delta x = -\frac{1}{3}$.

714. $dS = 2x\Delta x$, $\Delta S = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.

717. Za $x = 0$.

718. Ne.

719. $dy = -\frac{\pi}{72} \approx -0{,}0436$.

720. $dy = \frac{1}{2700} \approx 0{,}00037$.

721. $dy = \frac{\pi}{45} \approx 0{,}0698$.

722. $\frac{-m\,dx}{x^{m+1}}$.

723. $\frac{dx}{(1-x)^2}$.

724. $\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

725. $\frac{a\,dx}{x^2+a^2}$.

726. $-2xe^{-x^2}\,dx$.

727. $\ln x \, dx$. **728.** $\frac{-2dx}{1-x^2}$. **729.** $-\frac{1+\cos\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi$. **730.** $-\frac{e^t\,dt}{1+e^{2t}}$.

732. $-\frac{10x+8y}{7x+5y}dx$. **733.** $\frac{-ye^{-\frac{x}{y}}dx}{y^2-xe^{-\frac{x}{y}}}=\frac{y}{x-y}dx$.

734. $\frac{x+y}{x-y}dx$. **735.** $\frac{12}{11}dx$.

737. a) 0,485; b) 0,965; c) 1,2; d) $-0{,}045$; e) $\frac{\pi}{4}+0{,}025\approx 0{,}81$.

738. 565 cm^3.

739. $\sqrt{5}\approx 2{,}25$; $\sqrt{17}\approx 4{,}13$; $\sqrt{70}\approx 8{,}38$; $\sqrt{640}\approx 25{,}3$.

740. $\sqrt[3]{10}\approx 2{,}16$; $\sqrt[3]{70}\approx 4{,}13$; $\sqrt[3]{200}\approx 5{,}85$. **741.** a) 5; b) 1,1; c) 0,93; d) 0,9.

742. 1,0019. **743.** 0,57. **744.** 2,03. **748.** $\frac{-(dx)^2}{(1-x^2)^{3/2}}$.

749. $\frac{-x\,(dx)^2}{(1-x^2)^{3/2}}$. **750.** $\left(-\sin x\ln x+\frac{2\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\right)(dx)^2$. **751.** $\frac{2\ln x-3}{x^3}(dx)^2$.

752. $-e^{-x}(x^2-6x+6)(dx)^3$. **753.** $\frac{384\,(dx)^4}{(2-x)^5}$.

754. $3\cdot 2^n\sin\left(2x+5+\frac{n\pi}{2}\right)(dx)^n$. **755.** $e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha+n\alpha)\,(dx)^n$.

757. Ne, jer $f'(2)$ ne postoji.

758. Ne. Tačka $x=\frac{\pi}{2}$ je tačka prekinutosti funkcije. **762.** $\xi=0$.

763. (2, 4). **765.** a) $\xi=\frac{14}{9}$; b) $\xi=\frac{\pi}{4}$.

768. $\ln x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{2\,(x-1)^3}{3!\;\xi^3}$, gdje je $\xi=1+\Theta(x-1)$, $0<\Theta<1$.

769. $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cos\xi_1$, gdje je $\xi_1=\Theta_1 x$, $0<\Theta_1<1$; $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\cos\xi_2$, gdje je $\xi_2=\Theta_2 x$, $0<\Theta_2<1$.

770. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}e^{\xi}$, gdje je $\xi=\Theta x$, $0<\Theta<1$.

772. Pogreška: a) $\frac{1}{16}\frac{x^3}{(1+\xi)^{5/2}}$; b) $\frac{5}{81}\frac{x^3}{(1+\xi)^{8/3}}$; u oba slučaja je $\xi=\Theta x$; $0<\Theta<1$.

773. Pogreška je manja od $\frac{3}{5!}=\frac{1}{40}$.

775. *Rješenje.* Imamo $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Razvojem oba multiplikatora po potencijama od x, dobivamo: $\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\approx 1+\frac{1}{2}\frac{x}{a}-\frac{1}{8}\frac{x^2}{a^2}$; $\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}\approx 1+\frac{1}{2}\frac{x}{a}+\frac{3}{8}\cdot\frac{x^2}{a^2}$. Nakon množenja imamo: $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\approx 1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2a^2}$. Nadalje razvojem $e^{\frac{x}{a}}$ po potencijama od $\frac{x}{a}$, dobivamo isti polinom $e^{\frac{x}{a}}\approx 1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2a^2}$.

777. $-\frac{1}{3}$.

778. ∞.

779. 1.

780. 3.

781. $\frac{1}{2}$.

782. 5.

783. ∞.

784. 0.

785. $\frac{\pi^2}{2}$.

786. 1.

788. $\frac{2}{\pi}$.

789. 1.

790. 0.

791. a.

792. ∞ za $n>1$; a za $n=1$; 0 za $n<1$.

793. 0.

795. $\frac{1}{5}$.

796. $\frac{1}{12}$.

797. -1.

799. 1.

800. e^3.

801. 1.

802. 1.

803. 1.

804. $\frac{1}{e}$.

805. $\frac{1}{e}$.

806. $\frac{1}{e}$.

807. 1.

808. 1.

810. *Uputa.* Nađimo $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{S}{\frac{2}{3}bh}$, gdje je $S=\frac{R^2}{2}(\alpha-\sin\alpha)$ tačan izraz površine segmenta (R je polumjer odgovarajuće kružnice).

GLAVA III

811. $(-\infty, -2)$, uzlazna; $(-2, \infty)$, silazna.

812. $(-\infty, 2)$, silazna; $(2, \infty)$, uzlazna.

813. $(-\infty, \infty)$, uzlazna.

814. $(-\infty, 0)$ i $(2, \infty)$, uzlazna; $(0, 2)$, silazna.

815. $(-\infty, 2)$ i $(2, \infty)$, silazna.

816. $(-\infty, 1)$, uzlazna; $(1, \infty)$, silazna.

817. $(-\infty, -2)$, $(-2, 8)$ i $(8, \infty)$, silazna.

818. $(0, 1)$, silazna; $(1, \infty)$, uzlazna.

819. $(-\infty, -1)$ i $(1, \infty)$, uzlazna; $(-1, 1)$, silazna.

820. $(-\infty, \infty)$, uzlazna.

821. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, silazna; $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$, uzlazna.

822. $(-2, 0)$, uzlazna.

823. $(-\infty, 2)$, silazna; $(2, \infty)$, uzlazna.

824. $(-\infty, a)$ i (a, ∞), silazna.

825. $(-\infty, 0)$ i $(0, 1)$, silazna; $(1, \infty)$, uzlazna.

827. $y_{\max} = \frac{9}{4}$ za $x = \frac{1}{2}$.

828. Nema ekstrema.

830. $y_{\min} = 0$ za $x = 0$; $y_{\min} = 0$ za $x = 12$; $y_{\max} = 1296$ za $x = 6$.

831. $y_{\min} \approx -0{,}76$ za $x \approx 0{,}23$; $y_{\max} = 0$ za $x = 1$; $y_{\min} \approx -0{,}05$ za $x \approx 1{,}43$. Za $x = 2$ nema ekstrema.

832. Nema ekstrema.

833. $y_{\max} = -2$ za $x = 0$; $y_{\min} = 2$ za $x = 2$.

834. $y_{\max} = \frac{9}{16}$ za $x = 3{,}2$.

835. $y_{\max} = -3\sqrt{3}$ za $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$; $y_{\min} = 3\sqrt{3}$ za $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

836. $y_{\max} = \sqrt{2}$ za $x = 0$.

837. $y_{\max} = -\sqrt{3}$ za $x = -2\sqrt{3}$; $y_{\min} = \sqrt{3}$ za $x = 2\sqrt{3}$.

838. $y_{\min} = 0$ za $x = \pm 1$; $y_{\max} = 1$ za $x = 0$.

839. $y_{\min} = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$ za $x = \left(k - \frac{1}{6}\right)\pi$; $y_{\max} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ za $x = \left(k + \frac{1}{6}\pi\right)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

840. $y_{\max} = 5$ za $x = 12\,k\pi$; $y_{\max} = 5\cos\frac{2\pi}{5}$ za $x = 12\left(k \pm \frac{2}{5}\right)\pi$;

$y_{\min} = -5\cos\frac{\pi}{5}$ za $x = 12\left(k \pm \frac{1}{5}\right)\pi$; $y_{\min} = 1$ za $x = 6\,(2k+1)\,\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

841. $y_{\min} = 0$ za $x = 0$.

842. $y_{\min} = -\frac{1}{e}$ za $x = \frac{1}{e}$.

843. $y_{\max} = \frac{4}{e^2}$ za $x = \frac{1}{e^2}$; $y_{\min} = 0$ za $x = 1$.

844. $y_{\min} = 1$ za $x = 0$.

845. $y_{\min} = -\frac{1}{e}$ za $x = -1$.

846. $y_{\min} = 0$ za $x = 0$; $y_{\max} = \frac{4}{e^2}$ za $x = 2$.

847. $y_{\min} = e$ za $x = 1$.

848. Nema ekstrema.

849. Najmanja vrijednost $m = -\frac{1}{2}$ za $x = -1$; najveća vrijednost $M = \frac{1}{2}$ za $x = 1$.

850. $m = 0$ za $x = 0$ i $x = 10$; $M = 5$ za $x = 5$.

851. $m = \frac{1}{2}$ za $x = (2k+1)\,\frac{\pi}{4}$; $M = 1$ za $x = \frac{k\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

852. $m = 0$ za $x = 1$; $M = \pi$ za $x = -1$.

853. $m = -1$ za $x = -1$; $M = 27$ za $x = 3$.

854. a) $m = -6$ za $x = 1$; $M = 266$ za $x = 5$; b) $m = -1579$ za $x = -10$; $M = 3745$ za $x = 12$.

856. $p = -2$, $q = 4$.

861. Svaki od pribojnika mora biti jednak $\frac{a}{2}$.

862. Pravokutnik mora biti kvadrat kojemu je stranica $\frac{l}{4}$.

863. Istokračan.

864. Stranica terena uz stijenu mora biti dva puta veća od druge stranice.

865. Stranica izrezanog kvadrata mora biti $\frac{a}{6}$.

866. Visina mora biti dva puta manja od baze.

867. Takav, kojemu je visina jednaka promjeru baze.

868. Visina valjka je $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, a promjer njegove baze $R\sqrt{\frac{2}{3}}$; R je polumjer zadane kugle.

869. Visina valjka je $R\sqrt{2}$, gdje je R polumjer zadane kugle.

870. Visina stošca je $\frac{4}{3}R$, gdje je R polumjer zadane kugle.

871. Visina stošca je $\frac{4}{3}R$, gdje je R polumjer zadane kugle.

872. Polumjer baze stošca je $\frac{3}{2}r$, gdje je r polumjer baze zadanog valjka.

873. Takav, kojemu je visina dva put veća od promjera kugle.

874. $\varphi=\pi$, tj. presjek žljeba je polukrug. **875.** Središnji kut isječka je $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

876. Visina valjkastog dijela mora biti jednaka nuli, tj. posuda mora imati oblik polukugle.

877. $h=\left(l^{\frac{2}{3}}-d^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. **878.** $\frac{x}{2x_0}+\frac{y}{2y_0}=1$.

879. Stranice pravokutnika su $a\sqrt{2}$ i $b\sqrt{2}$, gdje su a i b odgovarajuće poluosi elipse.

880. Koordinate vrhova pravokutnika koji leže na paraboli su $\left(\frac{2}{3}a, \pm 2\sqrt{\frac{pa}{3}}\right)$.

881. $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$.

882. Kut je jednak najvećoj od dviju vrijednosti arccos $\frac{1}{k}$ i arctg $\frac{h}{d}$.

883. $AM=a\frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}}$. **884.** $\frac{r}{\sqrt{2}}$.

885. a) $x=y=\frac{d}{\sqrt{2}}$; b) $x=\frac{d}{\sqrt{3}}$; $y=d\sqrt{\frac{2}{3}}$. **886.** $x=\sqrt{\frac{2aQ}{q}}$; $P_{\min}=\sqrt{2aqQ}$.

887. $\sqrt{Mm}$. *Uputa.* Pri potpuno elastičnom udaru dviju kugala brzina koju dobiva nepomična kugla mase m_1 nakon što u nju udari kugla mase m_2, kojoj je brzina gibanja v, jednaka je $\frac{2m_2v}{m_1+m_2}$.

888. $n=\sqrt{\frac{NR}{r}}$ (ako taj broj nije cio ili nije djeljiv s brojem N, uzima se cijeli broj najbliži nađenoj vrijednosti, koji je djeljiv s brojem N). Budući da je unutarnji otpor baterije jednak $\frac{n^2r}{N}$, to je fizikalni smisao nađenog riješenja ovaj: unutarnji otpor baterije mora biti po mogućnosti što bliže vanjskom otporu.

889. $y=\frac{H}{2}$. *Uputa.* $x=2\sqrt{y(H-y)}$.

891. $(-\infty, 2)$, konkavan nadolje, $(2, \infty)$, konkavan nagore; $M(2; 12)$ je tačka infleksije.

892. $(-\infty, \infty)$, konkavan nagore.

893. $(-\infty, -3)$, konkavan nadolje, $(-3, \infty)$, konkavan nagore; tačaka infleksije nema.

894. $(-\infty, -6)$ i $(0, 6)$, konkavan nagore, $(-6, 0)$ i $(6, \infty)$, konkavan nadolje; tačke infleksije su $M_1\left(-6; -\frac{9}{2}\right)$, $O(0; 0)$, $M_2\left(6; \frac{9}{2}\right)$.

895. $(-\infty, -\sqrt{3})$ i $(0, \sqrt{3})$, konkavan nagore; $(-\sqrt{3}, 0)$ i $(\sqrt{3}, \infty)$, konkavan nadolje; tačke infleksije su $M_{1,2}(\pm\sqrt{3}; 0)$ i $O(0; 0)$.

896. $\left((4k+1)\frac{\pi}{2}, (4k+3)\frac{\pi}{2}\right)$, konkavan nagore, $\left((4k+3)\frac{\pi}{2}, (4k+5)\frac{\pi}{2}\right)$, konkavan nadolje ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$); tačke infleksije su $\left((2k+1)\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

897. $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, konkavan nagore, $((2k-1)\pi, 2k\pi)$, konkavan nadolje ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$); apscise tačaka infleksije jednake su $x=k\pi$.

898. $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$, konkavan nadolje, $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, \infty\right)$, konkavan nagore; $M\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}; -\frac{3}{2e^3}\right)$ su tačke infleksije.

899. $(-\infty, 0)$, konkavan nagore, $(0, \infty)$, konkavan nadolje; $O\,(0, 0)$ su tačke infleksije.

900. $(-\infty, -3)$ i $(-1, \infty)$, konkavan nagore, $(-3, -1)$, konkavan nadolje; tačke infleksije su $M_1\left(-3;\ \frac{10}{e^3}\right)$ i $M_2\left(-1;\ \frac{2}{e}\right)$.

901. $x=2$; $y=0$.

902. $x=1$, $x=3$; $y=0$.

903. $x=\pm 2$; $y=1$.

904. $y=x$.

905. $y=-x$ (lijeva), $y=x$ (desna).

906. $y=-1$ (lijeva), $y=1$ (desna).

907. $x=\pm 1$, $y=-x$ (lijeva), $y=x$ (desna).

908. $y=-2$ (lijeva), $y=2x-2$ (desna).

909. $y=2$.

910. $x=0$, $y=1$ (lijeva), $y=0$ (desna).

911. $x=0$, $y=1$.

912. $y=0$.

913. $x=-1$.

914. $y=x-\pi$ (lijeva); $y=x+\pi$ (desna).

915. $y=a$.

916. $y_{\max}=0$ za $x=0$; $y_{\min}=-4$ za $x=2$; tačka infleksije $M_1\,(1,-2)$.

917. $y_{\max}=1$ za $x=\pm\sqrt{3}$; $y_{\min}=0$ za $x=0$; tačke infleksije su $M_{1,2}\left(\pm 1;\ \frac{5}{9}\right)$.

918. $y_{\max}=4$ za $x=-1$; $y_{\min}=0$ za $x=1$; tačka infleksije $M_1\,(0;\ 2)$.

919. $y_{\max}=8$ za $x=-2$; $y_{\min}=0$ za $x=2$; tačka infleksije $M\,(0;\ 4)$.

920. $y_{\min}=-1$ za $x=0$; tačke infleksije su $M_{1,2}(\pm\sqrt{5};\ 0)$ i $M_{3,4}\left(\pm 1;\ -\frac{64}{125}\right)$.

921. $y_{\max}=-2$ za $x=0$; $y_{\min}=2$ za $x=2$; asimptote su $x=1$, $y=x-1$.

922. Tačke infleksije su $M_{1,2}\,(\pm 1,\ \mp 2)$; asimptota $x=0$.

923. $y_{\max}=-4$ za $x=-1$; $y_{\min}=4$ za $x=1$; asimptota $x=0$.

924. $y_{\min}=3$ za $x=1$; tačka infleksije $M(-\sqrt[3]{2};\ 0)$; asimptota $x=0$.

925. $y_{\max}=\frac{1}{3}$ za $x=0$; tačke infleksije $M_{1,2}\left(\pm 1;\ \frac{1}{4}\right)$; asimptota $y=0$.

926. $y_{\max}=-2$ za $x=0$; asimptote su $x=\pm 2$ i $y=0$.

927. $y_{\min}=-1$ za $x=-2$; $y_{\max}=1$ za $x=2$; tačke infleksije su $O\,(0;\ 0)$ i $M_{1,2}\left(\pm 2\sqrt{3};\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; asimptota $y=0$.

928. $y_{\max}=1$ za $x=4$; tačka infleksije $M\left(5;\ \frac{8}{9}\right)$; asimptote su $x=2$ i $y=0$.

929. Tačka infleksije $O\,(0;\ 0)$; asimptote $x=\pm 2$ i $y=0$.

930. $y_{\max}=-\frac{27}{16}$ za $x=\frac{8}{3}$; asimptote $x=0$, $x=4$ i $y=0$.

931. $y_{\max}=-4$ za $x=-1$; $y_{\min}=4$ za $x=1$; asimptote su $x=0$ i $y=3x$.

932. $A\,(0;\ 2)$ i $B\,(4;\ 2)$ krajnje tačke $y_{\max}=2\sqrt{2}$ za $x=2$.

933. $A\,(-8;\ -4)$ i $B\,(8;\ 4)$ su krajnje tačke. Tačka infleksije je $O\,(0;\ 0)$.

934. Krajnje tačke su $A\,(-3;\ 0)$; $y_{\min}=-2$ za $x=-2$.

935. Krajnje tačke su $A\,(-\sqrt{3};\ 0)$, $O\,(0;\ 0)$ i $B\,(\sqrt{3};\ 0)$; $y_{\max}=\sqrt{2}$ za $x=-1$; tačka infleksije je $M\left(\sqrt{3+2\sqrt{3}},\ \sqrt{6\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}}\right)$.

936. $y_{\max}=1$ za $x=0$; tačke infleksije su $M_{1,2}\,(\pm 1;\ 0)$.

937. Tačke infleksije su $M_1\,(0;\ 1)$ i $M_2\,(1;\ 0)$; asimptota $y=-x$.

938. $y_{\max}=0$ za $x=-1$; $y_{\min}=-1$ (za $x=0$).

939. $y_{\max}=2$ za $x=0$; tačke infleksije su $M_{1,2}(\pm 1;\ \sqrt[3]{2})$; asimptota $y=0$.

940. $y_{\min}=-4$ za $x=-4$; $y_{\max}=4$ za $x=4$; tačka infleksije je $O\ (0;\ 0)$; asimptota $y=0$.

941. $y_{\min}=\sqrt[3]{4}$ za $x=2$, $y_{\min}=\sqrt[3]{4}$ za $x=4$; $y_{\max}=2$ za $x=3$.

942. $y_{\min}=2$ za $x=0$; asimptote $x=\pm 2$. **943.** Asimptote za $x=\pm 2$ i $y=0$.

944. $y_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ za $x=\sqrt{3}$; $y_{\max}=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ za $x=-\sqrt{3}$; tačke infleksije su $M_1\left(-3;-\dfrac{3}{2}\right)$, $O\ (0;\ 0)$ i $M_2\left(3;\ \dfrac{3}{2}\right)$; asimptote su $x=\pm 1$.

945. $y_{\min}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$ za $x=6$; tačka infleksije $M\left(12;\dfrac{12}{\sqrt[3]{100}}\right)$; asimptota $x=2$.

946. $y_{\max}=\dfrac{1}{e}$ za $x=1$; tačka infleksije $M\left(2;\ \dfrac{2}{e^2}\right)$; asimptota $y=0$.

947. Tačke infleksije su $M_1\left(-3a;\ \dfrac{10a}{e^3}\right)$ i $M_2\left(-a,\ \dfrac{2a}{e}\right)$; asimptota $y=0$.

948. $y_{\max}=e^2$ za $x=4$; tačke infleksije su $M_{1,2}\left(\dfrac{8\pm 2\sqrt{2}}{2};\ e^{\frac{3}{2}}\right)$ asimptota $y=0$.

949. $y_{\max}=2$ za $x=0$; tačke infleksije su $M_{1,2}\left(\pm 1;\ \dfrac{3}{e}\right)$; asimptota $y=0$.

950. $y_{\max}=1$ za $x=\pm 1$; $y_{\min}=0$ za $x=0$.

951. $y_{\max}=0{,}74$ za $x=e^2\approx 7{,}39$; tačka infleksije je $M\ (e^{\frac{8}{3}}\approx 14{,}39;\ 0{,}70)$; asimptote su $x=0$ i $y=0$.

952. $y_{\min}=-\dfrac{a^2}{4e}$ za $x=\dfrac{a}{\sqrt{e}}$; tačka infleksije je $M\left(\dfrac{a}{\sqrt{e^3}};\ -\dfrac{3a^2}{4e^3}\right)$.

953. $y_{\min}=e$ za $x=e$; tačka infleksije je $M\left(e^2;\ \dfrac{e^2}{2}\right)$; asimptota je $x=1$; $y\to 0$ kada $x\to 0$.

954. $y_{\max}=\dfrac{4}{e^2}\approx 0{,}54$ za $x=\dfrac{1}{e^2}-1\approx -0{,}86$; $y_{\min}=0$ za $x=0$; tačka infleksije je $M\left(\dfrac{1}{e}-1\approx -0{,}63;\ \dfrac{1}{e}\approx 0{,}37\right)$; $y\to 0$ kada $x\to -1+0$ (krajnja tačka limesa).

955. $y_{\min}=1$ za $x=\pm\sqrt{2}$; tačke infleksije su $M_{1,2}\ (\pm 1{,}89;\ 1{,}33)$; asimptote su $x=\pm 1$.

956. Asimptota je $y=0$.

957. Asimptote su $y=0$ (kada $x\to +\infty$) i $y=-x$ (kada $x\to -\infty$).

958. Asimptote su $x=-\dfrac{1}{e}$; $x=0$; $y=1$; funkcija nije definirana na odsječku $\left[-\dfrac{1}{e},0\right]$.

959. Periodična funkcija s periodom 2π; $y_{\min}=-\sqrt{2}$ za $x=\dfrac{5}{4}\pi+2k\pi$; $y_{\max}=\sqrt{2}$ za $x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$; tačke infleksije su $M_k\left(\dfrac{3}{4}\pi+k\pi;\ 0\right)$.

960. Periodična funkcija s periodom 2π; $y_{\min} = -\frac{3}{4}\sqrt{3}$ za $x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$; $y_{\max} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$ za $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; tačke infleksije su $M_k(k\pi; 0)$ i $N_k\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2k\pi; \frac{3}{16}\sqrt{15}\right)$.

961. Periodična funkcija s periodom 2π. Na odsječku $[-\pi, \pi]$ je $y_{\max} = \frac{1}{4}$ za $x = \pm\frac{\pi}{3}$; $y_{\min} = -2$ za $x = \pm\pi$; $y_{\min} = 0$ za $x = 0$; tačke infleksije su $M_{1,2}(\pm 0{,}57; 0{,}13)$ i $M_{3,4}(\pm 2{,}20; -0{,}95)$.

962. Neparna periodična funkcija s periodom 2π. Na odsječku $[0, 2\pi]$: $y_{\max} = 1$ za $x = 0$; $y_{\min} = 0{,}71$ za $x = \frac{\pi}{4}$; $y_{\max} = 1$ za $x = \frac{\pi}{2}$; $y_{\min} = -1$ za $x = \pi$; $y_{\max} = -0{,}71$ za $x = \frac{5}{4}\pi$; $y_{\min} = -1$ za $x = \frac{3}{2}\pi$; $y_{\max} = 1$ za $x = 2\pi$; tačke infleksije su $M_1(0{,}36; 0{,}86)$; $M_2(1{,}21; 0{,}86)$; $M_3(2{,}36; 0)$; $M_4(3{,}51; -0{,}86)$; $M_5(4{,}35; -0{,}86)$; $M_6(5{,}50; 0)$.

963. Periodična funkcija s periodom 2π. $y_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ za $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $y_{\max} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ za $x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; asimptote su $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$.

964. Periodična funkcija s periodom π; tačke infleksije su $M_k\left(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; asimptote su $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$.

965. Parna periodična funkcija s periodom 2π. Na odsječku $[0, \pi]$ je: $y_{\max} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$ za $x = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$; $y_{\max} = 0$ za $x = \pi$; $y_{\min} = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$ za $x = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $y_{\min} = 0$ za $x = 0$; tačke infleksije su $M_1\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$; $M_2\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{4\sqrt{7}}{27}\right)$; $M_3\left(\pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}; -\frac{4\sqrt{7}}{27}\right)$.

966. Parna periodična funkcija s periodom 2π. Na odsječku $[0, \pi]$ je: $y_{\max} = 1$ za $x = 0$; $y_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{6}}$ za $x = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; $y_{\min} = -\frac{2}{3\sqrt{6}}$ za $x = \arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$; $y_{\min} = -1$ za $x = \pi$; tačke infleksije su $M_1\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$; $M_2\left(\arccos\sqrt{\frac{13}{18}}; \frac{4}{9}\sqrt{\frac{13}{18}}\right)$; $M_3\left(\arccos\left(-\sqrt{\frac{13}{18}}\right); -\frac{4}{9}\sqrt{\frac{13}{18}}\right)$.

967. Funkcija je neparna. Tačke infleksije su $M_k(k\pi; k\pi)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

968. Parna funkcija. Krajnje tačke su $A_{1,2}(\pm 2{,}83, -1{,}57)$; $y_{\max} \approx 1{,}57$ za $x = 0$ (šiljci); tačke infleksije su $M_{1,2}(\pm 1{,}54; -0{,}34)$.

969. Neparna funkcija. Područje definicije je $-1 < x < 1$. Tačka infleksije je $O(0; 0)$; asimptote su $x = \pm 1$.

970. Neparna funkcija. $y_{\max}=\frac{\pi}{2}-1+2k\pi$ za $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$; $y_{\min}=\frac{3}{2}\pi+1+2k\pi$ za $x=\frac{3}{4}\pi+k\pi$; tačke infleksije su M_k $(k\pi,\ 2k\pi)$; asimptote su $x=\frac{2k+1}{2}\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$.

971. Parna funkcija: $y_{\min}=0$ za $x=0$; asimptote su $y=-\frac{\pi}{2}x-1$ (kada $x\to-\infty$) i $y=\frac{\pi}{2}x-1$ (kada $x\to+\infty$).

972. $y_{\min}=0$ za $x=0$ (kutna tačka); asimptota je $y=1$.

973. $y_{\min}=1+\frac{\pi}{2}$ za $x=1$; $y_{\max}=\frac{3\pi}{2}-1$ za $x=-1$; tačka infleksije (središte simetrije) je $(0,\ \pi)$; asimptote su $y=x+2\pi$ (lijeva) i $y=x$ (desna).

974. Neparna funkcija: $y_{\min}\approx 1{,}285$ za $x=1$; $y_{\max}\approx 1{,}856$ za $x=-1$; tačka infleksije je $M\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$; asimptote su $y=\frac{x}{2}+\pi$ (kada $x\to-\infty$) i $y=\frac{x}{2}$ (kada $x\to+\infty$).

975. Asimptote su $x=0$ i $y=x-\ln 2$.

976. $y_{\min}\approx 1{,}32$ za $x=1$; asimptota je $x=0$.

977. Periodična funkcija s periodom 2π. $y_{\min}=\frac{1}{6}$ za $x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$; $y_{\max}=e$ za $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$; tačke infleksije su $M_k\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2k\pi;\ e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$ i $N_k\left(-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+(2k+1)\pi;\ e^{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)$.

978. Krajnje tačke su $A\,(0;\ 1)$ i $B\,(1;\ 4{,}81)$. Tačka infleksije je $M\,(0{,}28;\ 1{,}74)$.

979. Tačke infleksije su $M\,(0{,}5;\ 1{,}59)$; asimptote su $y\approx 0{,}21$ (kada $x\to-\infty$) i $y\approx 4{,}81$ (kada $x\to+\infty$).

980. Područje definicije funkcije je unija intervala $(2k\pi,\ 2k\pi+\pi)$, gdje je $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$ Funkcija je periodična s periodom 2π; $y_{\max}=0$ za $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$; asimptote su $x=k\pi$.

981. Područje definicije je unija intervala $\left(\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi,\right)$ gdje je k cio broj. Funkcija je periodična s periodom 2π. Tačke infleksije su $M_k\,(2k\pi;\ 0)$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$; asimptote su $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

982. Područje definicije je za $x>0$; funkcija je monotono uzlazna; asimptota je $x=0$.

983. Područje definicije je $|x-2k\pi|<\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\ \pm 1\ \pm 2,\ldots)$. Funkcija je periodična s periodom 2π; $y_{\min}=1$ za $x=2k\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$; asimptote su $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

984. Asimptota je $y\approx 1{,}57$; $y\to-\frac{\pi}{2}$ za $x\to 0$ (granična krajnja tačka).

985. Krajnje tačke su $A_{1,2}\,(\pm 1{,}31;\ 1{,}57)$; $y_{\min}=0$ za $x=0$.

986. $y_{\min}=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}\approx 0{,}69$ za $x=\frac{1}{e}\approx 0{,}37$; $y\to 1$ kada $x\to+0$.

987. Granična krajnja tačka je $A\,(+0;\ 0)$; $y_{\max}=e^{\frac{1}{e}}\approx 1{,}44$ za $x=e\approx 2{,}72$; asimptota je $y=1$; tačka infleksije je $M_1\,(0{,}58;\ 0{,}12)$ i $M_2\,(4{,}35;\ 1{,}40)$.

988. $x_{\min}=-1$ za $t=1\ (y=3)$; $y_{\min}=-1$ za $t=-1\ (x=3)$.

989. Za konstrukciju grafa dovoljno je mijenjati t u području od 0 do 2π; $x_{\min}=-a$ za $t=\pi$ $(y=0)$; $x_{\max}=a$ za $t=0\ (y=0)$; $y_{\min}=-a$ (šiljak) za $t=+\frac{3\pi}{2}\ (x=0)$; $y_{\max}=+a$ (šiljak) za $t=\frac{\pi}{2}\ (x=0)$; tačke infleksije su za $t=\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}\left(x=\pm\frac{a}{2\sqrt{2}},\ y=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$.

990. $x_{\min}=-\frac{1}{e}$ za $t=-1\ (y=-e)$; $y_{\max}=\frac{1}{e}$ za $t=1\ (x=e)$; tačke infleksije su $\left(-\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}},\ -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\right)$ za $t=-\sqrt{2}$ i $\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}};\ \frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\right)$ za $t=\sqrt{2}$; asimptote su $x=0$ i $y=0$.

991. $x_{\min}=1$ i $y_{\min}=1$ za $t=0$ (šiljak); asimptota je $y=2x$ kada $t\to+\infty$.

992. $y_{\min}=0$ za $t=0$.

993. $ds=\frac{a}{y}\,dx$; $\cos\alpha=\frac{y}{a}$; $\sin\alpha=-\frac{x}{a}$.

994. $ds=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-c^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx$; $\cos\alpha=\frac{a\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^4-c^2x^2}}$; $\sin\alpha=-\frac{bx}{\sqrt{a^4-c^2x^2}}$, gdje je $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

995. $ds=\frac{1}{y}\sqrt{p^2+y^2}\,dx$; $\cos\alpha=\frac{y}{\sqrt{p^2+y^2}}$; $\sin\alpha=\frac{p}{\sqrt{p^2+y^2}}$.

996. $ds=\sqrt[3]{\frac{a}{x}}\,dx$; $\cos\alpha=\sqrt[3]{\frac{x}{a}}$; $\sin\alpha=-\sqrt[3]{\frac{y}{a}}$.

997. $ds=\operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx$; $\cos\alpha=\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{a}}$; $\sin\alpha=\operatorname{th}\frac{x}{a}$.

998. $ds=2a\sin\frac{t}{2}\,dt$; $\cos\alpha=\sin\frac{t}{2}$; $\sin\alpha=\cos\frac{t}{2}$.

999. $ds=3a\sin t\cos t\,dt$; $\cos\alpha=-\cos t$; $\sin\alpha=\sin t$.

1000. $ds=a\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi$; $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$.

1001. $ds=\frac{a}{\varphi^2}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi$; $\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$.

1002. $ds=\frac{a}{\cos^3\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi$; $\sin\beta=\cos\frac{\varphi}{2}$.

1003. $ds=a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$; $\sin\beta=\cos\frac{\varphi}{2}$.

1004. $ds=r\sqrt{1+(\ln a)^2}\,d\varphi$; $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{1+(\ln a)^2}}$

1005. $ds=\frac{a^2}{r}\,d\varphi$; $\sin\beta=\cos 2\varphi$.

1006. $K=36$.

1007. $K=\frac{1}{3\sqrt{2}}$.

1008. $K_A=\frac{a}{b^2}$; $K_B=\frac{b}{a^2}$.

1009. $K=\frac{6}{13\sqrt{13}}$.

1010. $K=\dfrac{3}{a\sqrt{2}}$ za oba tjemena.

1011. $\left(\dfrac{9}{8};\ 3\right)$ i $\left(\dfrac{9}{8};\ -3\right)$.

1012. $\left(-\dfrac{\ln 2}{2};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

1013. $R=\left|\dfrac{(1+9x^4)^{3/2}}{6x}\right|$.

1014. $R=\dfrac{(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2}}{a^4b^4}$.

1015. $R=\dfrac{(y^2+1)^2}{4y}$.

1016. $R=\left|\dfrac{3}{2}\ a\sin 2t\right|$.

1017. $R=|at|$.

1018. $R=|r\sqrt{1+k^2}|$.

1019. $R=\left|\dfrac{4}{3}\ a\cos\dfrac{\varphi}{2}\right|$.

1020. $R_{\text{najm.}}=|p|$.

1022. $(2;\ 2)$.

1023. $\left(-\dfrac{11}{2}a;\ \dfrac{16}{3}a\right)$.

1024. $(x-3)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

1025. $(x+2)^2+(y-3)^2=8$.

1026. $pY^2=\dfrac{8}{27}(X-p)^3$ (semikubna parabola).

1027. $(aX)^{\frac{2}{3}}+(bY)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}$, gdje je $c^2=a^2-b^2$.

GLAVA IV

U odgovorima je radi jednostavnosti ispuštena konstanta C.

1031. $\dfrac{5}{7}\,a^2x^7$.

1032. $2x^3+4x^2+3x$.

1033. $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{(a+b)\,x^3}{3}+\dfrac{abx^3}{2}$.

1034. $a^2x+\dfrac{abx^4}{2}+\dfrac{b^2x^7}{7}$.

1035. $\dfrac{2x}{3}\sqrt{2px}$.

1036. $\dfrac{nx^{\frac{n-1}{n}}}{n-1}$.

1037. $\sqrt[n]{nx}$.

1038. $a^2x-\dfrac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}+\dfrac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}}-\dfrac{x^3}{3}$.

1039. $\dfrac{2x^2\sqrt{x}}{5}+x$.

1040. $\dfrac{3x^4\sqrt[3]{x}}{13}-\dfrac{3x^2\sqrt[3]{x}}{7}-6\sqrt[3]{x}$.

1041. $\dfrac{2x^{2m}\sqrt{x}}{4m+1}-\dfrac{4x^{m+n}\sqrt{x}}{2m+2n+1}+\dfrac{2x^{2n}\sqrt{x}}{4n+1}$.

1042. $2a\sqrt{ax}-4ax+4x\sqrt{ax}-2x^2+\dfrac{2x^3}{5\sqrt{ax}}$.

1043. $\dfrac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{7}}$.

1044. $\dfrac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right|$.

1045. $\ln(x+\sqrt{4+x^2})$.

1046. $\arcsin\dfrac{x}{2\sqrt{2}}$.

1047. $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{2}}-\ln(x+\sqrt{x^2+2})$.

1048 . a) $\operatorname{tg} x - x$. *Uputa.* Staviti $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$; b) $x - \operatorname{th} x$. *Uputa.* Staviti $\operatorname{th}^2 x = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

1049. a) $-\operatorname{ctg} x - x$; b) $x - \operatorname{cth} x$. **1050.** $\frac{(3e)^x}{\ln 3 + 1}$.

1051. $a \ln \left| \frac{C}{a-x} \right|$. *Rješenje.* $\int \frac{a}{a-x} dx = -a \int \frac{d(a-x)}{a-x} = -a \ln |a-x| + a \ln C = a \ln \left| \frac{C}{a-x} \right|$.

1052. $x + \ln |2x+1|$. *Rješenje.* Podijelimo li brojnik s nazivnikom, dobivamo $\frac{2x+3}{2x+1} = 1 + \frac{2}{2x+1}$. Odatle je $\int \frac{2x+3}{2x+1} dx = \int dx + \int \frac{2dx}{2x+1} = x + \int \frac{d(2x+1)}{2x+1} = x + \ln |2x+1|$.

1053. $-\frac{3}{2}x + \frac{11}{4} \ln |3+2x|$. **1054.** $\frac{x}{b} - \frac{a}{b^2} \ln |a+bx|$.

1055. $\frac{a}{\alpha}x + \frac{b\alpha - a\beta}{\alpha^2} \ln |\alpha x + \beta|$. **1056.** $\frac{x^2}{2} + x + 2 \ln |x-1|$.

1057. $\frac{x^2}{2} + 2x + \ln |x+3|$. **1058.** $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + 3 \ln |x-1|$.

1059. $a^2 x + 2ab \ln |x-a| - \frac{b^2}{x-a}$.

1060. $\ln |x+1| + \frac{1}{x+1}$. *Uputa.* $\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2} = \int \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2}$.

1061. $-2b\sqrt{1-y}$. **1062.** $-\frac{2}{3b}\sqrt{(a-bx)^3}$.

1063. $\sqrt{x^2+1}$. *Rješenje* $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}$.

1064. $2\sqrt{x} + \frac{\ln^2 x}{2}$. **1065.** $\frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$.

1066. $\frac{1}{4\sqrt{14}} \ln \left| \frac{x\sqrt{7} - 2\sqrt{2}}{x\sqrt{7} + 2\sqrt{2}} \right|$. **1067.** $\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+b} + x\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} - x\sqrt{a-b}} \right|$.

1068. $x - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$. **1069.** $-\left(\frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2} \ln |a^2 - x^2|\right)$.

1070. $x - \frac{5}{2} \ln (x^2+4) + \operatorname{arctg}\frac{x}{2}$. **1071.** $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln (2\sqrt{2}x + \sqrt{7+8x^2})$.

1072. $\frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin\left(x\sqrt{\frac{5}{7}}\right)$. **1073.** $\frac{1}{3} \ln |3x^2-2| - \frac{5}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x\sqrt{3} - \sqrt{2}}{x\sqrt{3} + \sqrt{2}} \right|$.

1074. $\frac{3}{\sqrt{35}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{7}}x\right) - \frac{1}{5} \ln (5x^2+7)$.

1075. $\frac{3}{5}\sqrt{5x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \ln (x\sqrt{5} + \sqrt{5x^2+1})$. **1076.** $\sqrt{x^2-4} + 3 \ln |x + \sqrt{x^2-4}|$.

1077. $\frac{1}{2} \ln |x^2-5|$. **1078.** $\frac{1}{4} \ln (2x^2+3)$.

1079. $\frac{1}{2a} \ln (a^2x^2 + b^2) + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{ax}{b}$.

1080. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{a^2}$.

1081. $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3$.

1082. $\frac{1}{3} \ln |x^3 + \sqrt{x^6-1}|$.

1083. $\frac{2}{3} \sqrt{(\arcsin x)^3}$.

1084. $\frac{\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{2}\right)^2}{4}$.

1085. $\frac{1}{8} \ln (1+4x^2) - \frac{\sqrt{(\operatorname{arctg} 2x)^3}}{3}$.

1086. $2 \sqrt{\ln (x + \sqrt{1+x^2})}$.

1087. $-\frac{a}{m} e^{-mx}$

1088. $-\frac{1}{3 \ln 4} 4^{2-3x}$.

1089. e^t+e^{-t}.

1090. $\frac{a}{2} e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2} e^{-\frac{2x}{a}}$.

1091. $\frac{1}{\ln a - \ln b} \left(\frac{a^x}{b^x} - \frac{b^x}{a^x}\right) - 2x$.

1092. $\frac{2}{\ln a} \left(\frac{1}{3} a^{\frac{3}{2}x} + a^{-\frac{1}{2}x}\right)$.

1093. $-\frac{1}{2e^{x^2+1}}$.

1094. $\frac{1}{2 \ln 7} 7^{x^2}$.

1095. $-e^{\frac{1}{x}}$

1096. $\frac{2}{\ln 5} 5^{\sqrt{x}}$.

1097. $\ln |e^x - 1|$.

1098. $-\frac{2}{3b} \sqrt{(a-be^x)^3}$.

1099. $\frac{3a}{4} \left(e^{\frac{x}{a}} + 1\right)^{\frac{4}{3}}$.

1100. $\frac{x}{3} - \frac{1}{3 \ln 2} \ln (2^x + 3)$. *Uputa.* $\frac{1}{2^x+3} \equiv \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2^x}{2^x+3}\right)$.

1101. $\frac{1}{\ln a} \operatorname{arctg} (a^x)$.

1102. $-\frac{1}{2b} \ln \left|\frac{1+e^{-bx}}{1-e^{-bx}}\right|$.

1103. $\arcsin e^t$.

1104. $-\frac{1}{b} \cos (a+bx)$.

1105. $\sqrt{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}}$.

1106. $x - \frac{1}{2a} \cos 2ax$.

1107. $2 \sin \sqrt{x}$.

1108. $-\ln 10 \cdot \cos (\lg x)$.

1109. $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$. *Uputa.* Stavimo $\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$.

1110. $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$. *Uputa.* Vidite uputu za zadatak 1109.

1111. $\frac{1}{a} \operatorname{tg} (ax+b)$.

1112. $-\frac{\operatorname{ctg} ax}{a} - x$.

1113. $a \ln \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2a}\right|$.

1114. $\frac{1}{15} \ln \left|\operatorname{tg}\left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right|$.

1115. $\frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{ax+b}{2}\right|.$ **1116.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}(x^2).$

1117. $\frac{1}{2}\cos(1-x^2).$ **1118.** $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{ctg}x\sqrt{2}-\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x\sqrt{2}}{2}\right|.$

1119. $-\ln|\cos x|.$ **1120.** $\ln|\sin x|.$

1121. $(a-b)\ln\left|\sin\frac{x}{a-b}\right|.$ **1122.** $5\ln\left|\sin\frac{x}{5}\right|.$

1123. $-2\ln|\cos\sqrt{x}|.$ **1124.** $\frac{1}{2}\ln|\sin(x^2+1)|.$

1125. $\ln|\operatorname{tg}x|.$ **1126.** $\frac{a}{2}\sin^2\frac{x}{a}.$ **1127.** $\frac{\sin^4 6x}{24}.$ **1128.** $-\frac{1}{4a\sin^4 ax}.$

1129. $-\frac{1}{3}\ln(3+\cos 3x).$ **1130.** $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos 2x}.$

1131. $-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3}.$ **1132.** $\frac{3}{4}\operatorname{tg}^4\frac{x}{3}.$ **1133.** $\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}.$

1134. $-\frac{3\operatorname{ctg}^{\frac{5}{3}}x}{5}.$ **1135.** $\frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}3x+\frac{1}{\cos 3x}\right).$

1136. $\frac{1}{a}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right|+2\sin ax\right).$ **1137.** $\frac{1}{3a}\ln|b-a\operatorname{ctg}3x|.$

1138. $\frac{2}{5}\operatorname{ch}5x-\frac{3}{5}\operatorname{sh}5x.$ **1139.** $-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x.$ **1140.** $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|.$

1141. $2\operatorname{arctg}e^x.$ **1142.** $\ln|\operatorname{th}x|.$ **1143.** $\ln\operatorname{ch}x.$ **1144.** $\ln|\operatorname{sh}x|.$

1145. $-\frac{5}{12}\sqrt[5]{(5-x^2)^6}.$ **1146.** $\frac{1}{4}\ln|x^4-4x+1|.$ **1147.** $\frac{1}{4\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{5}}.$

1148. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}.$ **1149.** $\sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln(x\sqrt{3}+\sqrt{2+3x^2}).$

1150. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x+1|.$ **1151.** $-\frac{2}{\sqrt{e^x}}.$

1152. $\ln|x+\cos x|.$ **1153.** $\frac{1}{3}\left(\ln|\sec 3x+\operatorname{tg}3x|+\frac{1}{\sin 3x}\right).$

1154. $-\frac{1}{\ln x}.$ **1155.** $\ln|\operatorname{tg}x+\sqrt{\operatorname{tg}^2x-2}|.$

1156. $\sqrt{2}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2})-\frac{1}{4(2x^2+1)}.$ **1157.** $\frac{a^{\sin x}}{\ln a}.$

1158. $\frac{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}{2}.$ **1159.** $\frac{1}{2}\arcsin(x^2).$ **1160.** $\frac{1}{a}\operatorname{tg}ax-x.$ **1161.** $\frac{x}{2}-\frac{\sin x.}{2}.$

1162. $\arcsin\frac{\operatorname{tg}x}{2}.$ **1163.** $a\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2a}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$

1164. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}.$ **1165.** $-2\ln|\cos\sqrt{x-1}|.$

1166. $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x^2}{2}\right|$. **1167.** $e^{\operatorname{arctg} x}+\frac{\ln^2(1+x^2)}{4}+\operatorname{arctg} x$. **1168.** $-\ln|\sin x+\cos x|$.

1169. $\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2\sqrt{2}}\right|-2x-\sqrt{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$. **1170.** $x+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|$.

1171. $\ln|x|+2\operatorname{arctg} x$. **1172.** $e^{\sin^2 x}$.

1173. $\frac{5}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{2}+\sqrt{4-3x^2}$. **1174.** $x-\ln(1+e^x)$.

1175. $\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}$ ([illegible])

1176. $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-2})$. **1177.** $\frac{1}{a}\ln|\operatorname{tg} ax|$.

1178. $-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right)$. **1179.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\ln x}{2-\ln x}\right|$. **1180.** $-\frac{\left(\arccos\frac{x}{2}\right)^2}{2}$.

1181. $-e^{-\operatorname{tg} x}$. **1182.** $\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right)$. **1183.** $-2\operatorname{ctg} 2x$.

1184. $\frac{(\arcsin x)^2}{2}-\sqrt{1-x^2}$. **1185.** $\ln(\sec x+\sqrt{\sec^2 x+1}$.

1186. $\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+\sin 2x}{\sqrt{5}-\sin 2x}\right|$.

1187. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)$. *Uputa.* $\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x+2}$

1188. $\frac{2}{3}\sqrt{[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^3}$. **1189.** $\frac{1}{3}\operatorname{sh}(x^3+3)$. **1190.** $\frac{1}{\ln 3}3^{\operatorname{th} x}$.

1191. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}}{x}$ za $x>\sqrt{2}$;

b) $-\ln(1+e^{-x})$; c) $\frac{1}{80}5x^2-3)^8$; d) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}$; e) $\ln(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x})$.

1192. $\frac{1}{4}\left[\frac{(2x+5)^{12}}{12}-\frac{5(2x+5)^{11}}{11}\right]$ **1193.** $2\left(\frac{\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-2\ln|1+\sqrt{x}|\right)$.

1194. $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|$. **1195.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}$.

1196. $\ln x-\ln 2\ln|\ln x+2\ln 2|$. **1197.** $\frac{(\arcsin x)^3}{3}$. **1198.** $\frac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{e^x+1}$.

1199. $\frac{2}{5}(\cos^2 x-5)\sqrt{\cos x}$.

1200. $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|$. *Uputa.* Pretpostavimo da je $x=\frac{1}{t}$.

1201. $-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x.$ **1202.** $-\frac{x^2}{3}\sqrt{2-x^2}-\frac{4}{3}\sqrt{2-x^2}.$

1203. $\sqrt{x^2-a^2}-|a|\arccos\frac{|a|}{x}.$

1204. $\arccos\frac{1}{|x|}$, za $x\neq 0$ *). *Uputa.* Stavite $x=\frac{1}{t}$.

1205. $\sqrt{x^2+1}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|.$

1206. $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}$. *Napomena.* Umjesto trigonometrijske supstitucije možemo primijeniti i supstituciju $x=\frac{1}{z}$. **1207.** $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x.$

1208. $2\arcsin\sqrt{x}.$ **1210.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|.$ **1211.** $x\ln x-x.$

1212. $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$ **1213.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}.$

1214. $\sin x-x\cos x.$ **1215.** $\frac{x\sin 3x}{3}+\frac{\cos 3x}{9}.$

1216. $-\frac{x+1}{e^x}.$ **1217.** $-\frac{x\ln 2+1}{2^x\ln^2 2}.$

1218. $\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)$. *Rješenje.* Umjesto višestruke parcijalne integracije možemo primijeniti ovaj postupak neodređenih koeficijenata:

$$\int x^2e^{3x}dx=(Ax^2+Bx+C)\,e^{3x}$$

ili nakon deriviranja

$$x^2e^{3x}=(Ax^2+Bx+C)\,3e^{3x}+(2Ax+B)\,e^{3x}.$$

Skratimo li sa e^{3x} i izjednačimo li koeficijente uz jednake potencije od x, dobijemo:

$$1=3A;\ 0=3B+2A;\ 0=3C+B,$$

odakle je $A=\frac{1}{3}$; $B=-\frac{2}{9}$; $C=\frac{2}{27}$. Općenito je $\int P_n(x)\,e^{ax}dx=Q_n(x)\,e^{ax}$, gdje je $P_n(x)$ zadani polinom n-tog stupnja, a $Q_n(x)$ polinom n-tog stupnja s neodređenim koeficijentima.

1219. $-e^{-x}(x^2+5)$. *Uputa.* Vidite zadatak 1218*.

1220. $-3e^{-\frac{x}{3}}(x^3+9x^2+54x+162)$. *Uputa.* Vidite zadatak 1218*.

1221. $-\frac{x\cos 2x}{4}+\frac{\sin 2x}{8}.$

1222. $\frac{2x^2+10x+11}{4}\sin 2x+\frac{2x+5}{4}\cos 2x$. *Uputa.* Preporučamo upotrebu metode neodređenih koeficijenata u obliku

$\int P_n(x)\cos\beta x\,dx=Q_n(x)\cos\beta x+R_n(x)\sin\beta x$, gdje je $P_n(x)$ zadani polinom n-tog stupnja, $Q_n(x)$ i $R_n(x)$ su polinomi n-tog stupnja, s neodređenim koeficijentima (vidite zadatak 1218*).

---

*) U daljnjem kod analognih slučajeva ponekad ćemo dati rješenje koje odgovara samo za izvjesne dijelove područja postojanja podintegralne funkcije.

1223. $\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$.

1224. $x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$.

1225. $-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}$.

1226. $2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}$.

1227. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$.

1228. $\frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{4}\arcsin x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$.

1229. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$.

1230. $-x\operatorname{ctg} x + \ln|\sin x|$.

1231. $-\frac{x}{\sin x} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

1232. $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$.

1233. $\frac{3^x(\sin x + \cos x\ln 3)}{1+(\ln 3)^2}$.

1234. $\frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}$.

1235. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$.

1236. $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1)$.

1237. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$.

1238. $\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - 3x$.

1239. $\frac{x^2-1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| - x$.

1240. $-\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x}$.

1241. $[\ln(\ln x) - 1]\cdot\ln x$.

1242. $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} 3x - \frac{x^2}{18} + \frac{1}{162}\ln(9x^2+1)$.

1243. $\frac{1+x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - x\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

1244. $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x$.

1245. $-\frac{\arcsin x}{x} + \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|$.

1246. $-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$.

1247. $\frac{x\operatorname{tg} 2x}{2} + \frac{\ln|\cos 2x|}{4} - \frac{x^2}{2}$.

1248. $\frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{\cos 2x - 2\sin 2x}{5} - 1\right)$.

1249. $\frac{x}{2} + \frac{x\cos(2\ln x) + 2x\sin(2\ln x)}{10}$.

1250. $-\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$. *Rješenje.* Stavivši $u = x$ i $dv = \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$, dobijemo $du = dx$ i $v = -\frac{1}{2(x^2+1)}$. Odatle je $\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \int\frac{dx}{2(x^2+1)} = -\frac{x}{(2x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$.

1251. $\frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{x^2+a^2}\right)$. *Uputa.* Koristimo se identitetom $1 \equiv \frac{1}{a^2}[(x^2+a^2) - x^2]$.

1252. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$. *Rješenje.* Stavimo $u = \sqrt{a^2-x^2}$ i $dv = dx$; odatle je $du = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ i $v = x$; imamo $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\frac{-x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Dobivamo, $2\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}$.

1253. $\frac{x}{2}\sqrt{A+x^2}+\frac{A}{2}\ln|x+\sqrt{A+x^2}|$. *Uputa.* Vidjeti zadatak 1252*.

1254. $-\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}$. *Uputa.* Vidjeti zadatak 1252*.

1255. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}$.

1256. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|$.

1257. $\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6x-1}{\sqrt{11}}$.

1258. $\frac{1}{2}\ln(x^2-7x+13)+\frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-7}{\sqrt{3}}$.

1259. $\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+5)+4\operatorname{arctg}(x-2)$.

1260. $x-\frac{5}{2}\ln(x^2+3x+4)+\frac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}$.

1261. $x+3\ln(x^2-6x+10)+8\operatorname{arctg}(x-3)$.

1262. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}$.

1263. $\arcsin(2x-1)$.

1264. $\ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right|$.

1265. $3\sqrt{x^2-4x+5}$.

1266. $-2\sqrt{1-x-x^2}-9\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}$.

1267. $\frac{1}{5}\sqrt{5x^2-2x+1}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\ln\left(x\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\sqrt{5x^2-2x+1}\right)$.

1268. $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|$.

1269. $-\operatorname{arc\,sin}\frac{2-x}{x\sqrt{5}}$.

1270. $\arcsin\frac{2-x}{(1-x)\sqrt{2}}\,(x>\sqrt{2})$.

1271. $-\arcsin\frac{1}{x+1}$.

1272. $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2+2x+5}+2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})$.

1273. $\frac{2x+1}{4}\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{8}\arcsin(2x-1)$.

1274. $\frac{2x+1}{4}\sqrt{2-x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x+1}{3}$.

1275. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2-1}\right|$.

1276. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{3-\sin x}{\sqrt{3}}$.

1277. $\ln\left(e^x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+e^x+e^{2x}}\right)$.

1278. $-\ln|\cos x+2+\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}|$.

1279. $-\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}-2\arcsin\frac{2+\ln x}{\sqrt{5}}$.

1280. $\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|\ (a\neq b)$.

1281. $x+3\ln|x-3|-3\ln|x-2|$.

1282. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\right|$.

1283. $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|$.

1284. $5x+\ln\left|\frac{x^{\frac{1}{2}}(x-4)^{\frac{161}{6}}}{(x-1)^{\frac{7}{3}}}\right|$.

1285. $\frac{1}{1+x}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$.

1286. $\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^{16}}{(2x-1)^7(2x+1)^9}\right|$.

1287. $\frac{x^2}{2}-\frac{11}{(x-2)^2}-\frac{8}{x-2}$.

1288. $-\frac{9}{2(x-3)}-\frac{1}{2(x+1)}$.

1289. $\frac{8}{49(x-5)}-\frac{27}{49(x+2)}+\frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right|$.

1290. $-\frac{1}{2(x^2-3x+2)^2}$.

1291. $x+\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|$.

1292. $x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

1293. $\frac{1}{52}\ln|x-3|-\frac{1}{20}\ln|x-1|+\frac{1}{65}\ln(x^2+4x+5)+\frac{7}{130}\operatorname{arctg}(x+2)$.

1294. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

1295. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.

1296. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$.

1297. $\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{\operatorname{arctg} x}{2}$.

1298. $\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+\operatorname{arctg}(x+1)$.

1299. $\ln|x+1|+\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{5}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$.

1300. $\frac{3x-17}{2(x^2-4x+5)}+\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)+\frac{15}{2}\operatorname{arctg}(x-2)$.

1301. $\frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{4}\operatorname{arctg} x$.

1302. $-\frac{3}{8}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{4(x^4-1)}+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

1303. $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3}+\frac{15}{48}\operatorname{arctg} x$.

1304. $x-\frac{x-3}{x^2-2x+2}+2\ln(x^2-2x+2)+$ [illegible] $\operatorname{arctg}(x-1)$.

1305. $\frac{1}{21}(8\ln|x^3+8|-\ln|x^3+1|)$.

1306. $\frac{1}{2}\ln|x^4-1|-\frac{1}{4}\ln|x^8+x^4-1|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x^4+1-\sqrt{5}}{2x^4+1+\sqrt{5}}\right|$.

1307. $-\frac{13}{2(x-4)^2}+\frac{3}{x-4}+2\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|$.

1308. $\frac{1}{3}\left(2\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right|-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^3+1}\right)$.

1309. $\frac{1}{x-1}+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$.

1310. $\ln|x|-\frac{1}{7}\ln|x^7+1|$. *Uputa.* Stavite $1=(x^7+1)-x^7$.

1311. $\ln|x|-\frac{1}{5}\ln|x^5+1|+\frac{1}{5(x^5+1)}$.

1312. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}$.

1313. $-\frac{1}{9(x-1)^9}-\frac{1}{4(x-1)^8}-\frac{1}{7(x-1)^7}.$

1314. $-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg} x.$

1315. $2\sqrt{x-1}\left[\frac{(x-1)^3}{7}+\frac{3(x-1)^2}{5}+x\right].$

1316. $\frac{3}{10a^2}\left[2\sqrt[3]{(ax+b)^5}-5b\sqrt[3]{(ax+b)^2}\right].$

1317. $2 \operatorname{arctg}\sqrt{x+1}.$

1318. $6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x}).$

1319. $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}-3\ln|1+\sqrt[3]{x}|+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}.$

1320. $\ln\left|\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+2+\sqrt{x+1}}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}.$

1321. $2\sqrt{x}-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2}}.$

1322. $-2\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}.$

1323. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2)+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|.$

1324. $\frac{1}{3}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}+\frac{2z}{z^3-1}$, gdje je $z=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$

1325. $-\frac{\sqrt{2x+3}}{x}.$

1326. $\frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2-x+1}-\frac{1}{8}\ln(2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}).$

1327. $-\frac{8+4x^2+3x^4}{15}\sqrt{1-x^2}.$

1328. $\left(\frac{5}{16}x-\frac{5}{24}x^3+\frac{1}{6}x^5\right)\sqrt{1+x^2}-\frac{5}{16}\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$

1329. $\left(\frac{1}{4x^4}+\frac{3}{8x^2}\right)\sqrt{x^2-1}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x}.$

1330. $\frac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x+1}.$

1331. $R+\ln|x|+\frac{3}{2}\ln\left(x-\frac{1}{2}+R\right)-\ln\left(1-\frac{x}{2}+R\right)$, gdje je $R=\sqrt{x^2-x+1}.$

1332. $\frac{1}{2}\frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}}.$

1333. $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^{-4}+1}.$

1334. $\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}.$

1335. $\frac{1}{10}\ln\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, gdje je $z=\sqrt[3]{1+x^5}$,

1336. $-\frac{1}{8}\frac{4+3x^3}{x(2+x^3)^{2/3}}.$

1337. $-2\sqrt[3]{(x^{-\frac{3}{4}}+1)^2}.$

1338. $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x.$

1339. $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x.$

1340. $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}$

1341. $\frac{1}{4}\cos^8\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cos^6\frac{x}{2}.$

1342. $\frac{\sin^2 x}{2}-\frac{1}{2\sin^2 x}-2\ln|\sin x|.$

1343. $\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}.$

1344. $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}.$

1345. $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}.$

1346. $\frac{5}{16}x+\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{64}\sin 12x+\frac{1}{144}\sin^3 6x.$

1347. $-\operatorname{ctg} x-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}.$

1348. $\operatorname{tg} x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x.$

1349. $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}.$

1350. $\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}\ 2\operatorname{ctg} 2x.$

1351. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+3\ln|\operatorname{tg} x|-\frac{3}{2\operatorname{tg}^2 x}-\frac{1}{4\operatorname{tg}^4 x}.$

1352. $\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}+2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$

1353. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right].$

1354. $\frac{-\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$

1355. $\frac{\sin 4x}{16\cos^4 4x}+\frac{3\sin 4x}{32\cos^2 4x}+\frac{3}{32}\ln\left|\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$

1356. $\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x-x.$

1357. $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}-\ln|\sin x|.$

1358. $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+x.$

1359. $\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}+\operatorname{tg}^3\frac{x}{3}-3\operatorname{tg}\frac{x}{3}+3\ln\left|\cos\frac{x}{3}\right|+x.$

1360. $\frac{x^2}{4}-\frac{\sin 2x^2}{8}.$

1361. $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}.$

1362. $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4 x}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^{10} x}-\frac{3}{16}\sqrt[3]{\cos^{16} x}.$

1363. $2\sqrt{\operatorname{tg} x}.$

1364. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{z^2+z\sqrt{2}+1}{z^2-z\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{2}}{z^2-1}$, gdje je $z=\sqrt{\operatorname{tg} x}$.

1365. $-\frac{\cos 8x}{16}+\frac{\cos 2x}{4}.$

1366. $-\frac{\sin 25x}{50}+\frac{\sin 5x}{10}.$

1367. $\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+3\sin\frac{x}{6}.$

1368. $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos x.$

1369. $\frac{\sin 2ax}{4a}+\frac{x\cos 2b.}{2}$

1370. $\frac{t\cos\varphi}{2}-\frac{\sin(2\omega t+\varphi)}{4\omega}.$

1371. $\frac{\sin x}{2}-\frac{\sin 5x}{20}+\frac{\sin 7x}{28}.$

1372. $\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x.$

1373. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|.$

1374. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|.$

1375. $x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

1376. $-x+\operatorname{tg}x+\sec x$.

1377. $\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|$.

1378. $\operatorname{arctg}\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$.

1379. $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|$. *Rješenje.* Stavimo $3\sin x+2\cos x\equiv\alpha(2\sin x+3\cos x)+$ $+\beta(2\sin x+3\cos x)'$. Odatle je $2\alpha-3\beta=3$, $3\alpha+2\beta=2$ i prema tome, $\alpha=\frac{12}{13}$, $\beta=-\frac{5}{13}$. Imamo da je

$$\int\frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx=\frac{12}{13}\int dx-\frac{5}{13}\int\frac{(2\sin x+3\cos x)'}{2\sin x+3\cos x}dx=$$
$$=\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|.$$

1380. $-\ln|\cos x-\sin x|$.

1381. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{2}\right)$. *Uputa.* Brojnik i nazivnik razlomka razdijelimo na $\cos^2 x$.

1382. $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}x}{\sqrt{5}}\right)$. *Uputa.* Vidjeti zadatak br. 1381.

1383. $\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}x+3-\sqrt{13}}{2\operatorname{tg}x+3+\sqrt{13}}\right|$. *Uputa.* Vidjeti zadatak br. 1381.

1384. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x-5}{\operatorname{tg}x}\right|$. *Uputa.* Vidjeti zadatak br. 1381.

1385. $-\frac{1}{2(1-\cos x)^2}$.

1386. $\ln(1+\sin^2 x)$.

1387. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}$.

1388. $\frac{1}{4}\ln\frac{5-\sin x}{1-\sin x}$.

1389. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{2\sqrt{2}}$. *Uputa.* Upotrijebimo identitet

$$\frac{1}{(2-\sin x)(3-\sin x)}\equiv\frac{1}{2-\sin x}-\frac{1}{3-\sin x}.$$

1390. $-x+2\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|$. *Uputa.* Upotrijebimo identitet

$$\frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}\equiv-1+\frac{2}{1+\sin x-\cos x}.$$

1391. $\frac{\operatorname{ch}^3 x}{3}-\operatorname{ch}x$.

1392. $\frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sh}2x}{4}+\frac{\operatorname{sh}4x}{32}$.

1393. $\frac{\operatorname{sh}^4 x}{4}$.

1394. $-\frac{x}{8}+\frac{\operatorname{sh} 4x}{32}$.

1395. $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{\operatorname{ch} x}$.

1396. $-2\operatorname{cth} 2x$.

1397. $\ln(\operatorname{ch} x)-\frac{\operatorname{th}^2 x}{2}$.

1398. $x-\operatorname{cth} x-\frac{\operatorname{cth}^3 x}{3}$.

1399. $\operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$.

1400. $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{th}\frac{x}{2}+2}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\text{ili } \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}(e^x\sqrt{5})\right)$.

1401. $-\frac{\operatorname{sh}^2 x}{2}-\frac{\operatorname{sh} 2x}{4}-\frac{x}{2}$. *Uputa.* Upotrijebimo identitet $\frac{-1}{\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x}\equiv\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x$.

1402. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\operatorname{ch} x+\sqrt{\operatorname{ch} 2x})$.

1403. $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{2}$.

1404. $\frac{x}{2}\sqrt{2+x^2}+\ln(x+\sqrt{2+x^2})$.

1405. $\frac{x}{2}\sqrt{9+x^2}-\frac{9}{2}\ln(x+\sqrt{9+x^2})$.

1406. $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2}+\frac{1}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})$.

1407. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\ln|x+\sqrt{x^2-4}|$.

1408. $\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x}-\frac{1}{8}\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x}|$.

1409. $\frac{x-3}{2}\sqrt{x^2-6x-7}-8\ln|x-3+\sqrt{x^2-6x-7}|$.

1410. $\frac{1}{64}(2x+1)(8x^2+8x+17)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{27}{128}\ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1})$.

1411. $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$.

1412. $\frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}}$.

1413. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

1414. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|$.

1415. $\frac{e^{2x}}{2}\left(x^4-2x^3+5x^2-5x+\frac{7}{2}\right)$.

1416. $\frac{1}{6}\left(x^3+\frac{x^2}{2}\sin 6x+\frac{x}{6}\cos 6x-\frac{1}{36}\sin 6x\right)$.

1417. $-\frac{x\cos 3x}{6}+\frac{\sin 3x}{18}+\frac{x\cos x}{2}-\frac{\sin x}{2}$.

1418. $\frac{e^{2x}}{8}(2-\sin 2x-\cos 2x)$.

1419. $\frac{e^x}{2}\left(\frac{2\sin 2x+\cos 2x}{5}-\frac{4\sin 4x+\cos 4x}{17}\right)$.

1420. $\frac{e^x}{2}[x(\sin x+\cos x)-\sin x]$.

1421. $-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\ln|e^x-1|+\frac{1}{6}\ln(e^x+2)$.

1422. $c-\ln(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+x+1})$.

1423. $\frac{1}{3}\left[x^3 \ln\frac{1+x}{1-x}+\ln(1-x^2)+x^2\right].$

1424. $x \ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x.$

1425. $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{9}{100}\right)\arccos(5x-2)-\frac{5x+6}{100}\sqrt{20x-25x^2-3}.$

1426. $\frac{\sin x \operatorname{ch} x-\cos x \operatorname{sh} x}{2}.$

1427. $I_n=\frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}-(2n-3)\,I_{n-1}\right];\qquad I_2=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right);$
$I_3=\frac{1}{4a^2}\left[\frac{x(3x^2+5a^2)}{2a^2(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right].$

1428. $I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2};\qquad I_4=\frac{3x}{8}-\frac{\cos x\sin^3 x}{4}-\frac{3\sin 2x}{16};$
$I_5=-\frac{\cos x\sin^4 x}{5}-\frac{4}{15}\cos x\sin^2 x-\frac{8}{15}\cos x.$

1429. $I_n=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2};\qquad I_3=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|;$
$I_4=\frac{\sin x}{3\cos^3 x}+\frac{2}{3}\operatorname{tg} x.$

1430. $I_n=-x^n e^{-x}+n\,I_{n-1};\quad I_{10}=-e^{-x}(x^{10}+10x^9+10\cdot 9x^8+\ldots+10\cdot 9\cdot 8\ldots 2x+10\cdot 9\ldots 1).$

1431. $\frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\,(x-1)}{\sqrt{7}}.$

1432. $\ln\sqrt{x^2-2x+2}-4\operatorname{arctg}(x-1).$

1433. $\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x+1).$

1434. $\frac{1}{5}\ln\sqrt{\frac{x^2}{x^2+5}}.$

1435. $2\ln\left|\frac{x+3}{x+2}\right|-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}.$

1436. $\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right|-\frac{1}{x+1}\right).$

1437. $\frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$

1438. $\frac{1}{4}\left(\frac{2x}{1-x^2}+\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right).$

1439. $\frac{1}{6}\frac{x-2}{(x^2-x+1)^2}+\frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$

1440. $\frac{x(3+2\sqrt{x})}{1-2\sqrt{x}}.$

1441. $-\frac{1}{x}-\frac{4}{3x\sqrt{x}}-\frac{1}{2x^2}.$

1442. $\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}.\right)$

1443. $\sqrt{2x}-\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x)^5}.$

1444. $-\frac{3}{\sqrt[3]{x+1}}.$

1445. $\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2-2x+1}}.$

1446. $-2(\sqrt[4]{5-x}-1)^2-4\ln(1+\sqrt[4]{5-x}).$

1447. $\ln|x+\sqrt{x^2-1}|-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

1448. $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.

1449. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2+1}{\sqrt{2}}$.

1450. $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

1451. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}\right|-\frac{1}{8\sqrt{3}}\arcsin\frac{2(x+1)}{x+4}$. *Uputa.* $\frac{1}{x^2+4x}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\right)$.

1452. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-9}-\frac{9}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-9}|$.

1453. $\frac{1}{16}(8x-1)\sqrt{x-4x^2}+\frac{1}{64}\arcsin(8x-1)$.

1454. $\ln\left|\frac{x}{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}\right|$.

1455. $\frac{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}{3}-\frac{(x+1)}{2}\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{1}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$.

1456. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3}$.

1457. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^3}+1}\right|$.

1458. $-\frac{1}{3}\ln|z-1|+\frac{1}{6}\ln(z^2+z+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, gdje je $z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$.

1459. $\frac{5}{2}\ln(x^2+\sqrt{1+x^4})$.

1460. $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}$.

1461. $\ln|\operatorname{tg}x|-\operatorname{ctg}^2 x-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x$.

1462. $-\operatorname{ctg}x-\frac{2\sqrt{(\operatorname{ctg}x)^3}}{3}$.

1463. $\frac{5}{12}(\cos^2 x-6)\sqrt[5]{\cos^2 x}$.

1464. $-\frac{\cos 5x}{20\sin^4 5x}-\frac{3\cos 5x}{40\sin^2 5x}+\frac{3}{40}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{5x}{2}\right|$.

1465. $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}$.

1466. $\frac{1}{4}\sin 2x$.

1467. $\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+2\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

1468. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}$.

1469. $\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt{10}}\right)$.

1470. $\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}x+1)$.

1471. $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x+\sec x|-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}x$.

1472. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right)$.

1473. $\ln|\operatorname{tg}x+2+\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+4\operatorname{tg}x+1}|$.

1474. $\frac{1}{a}\ln(\sin ax+\sqrt{a^2+\sin^2 ax})$.

1475. $\frac{1}{3} x \operatorname{tg} 3x + \frac{1}{9} \ln |\cos 3x|$.

1476. $\frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8}$.

1477. $\frac{1}{3} e^{x^3}$.

1478. $\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)$.

1479. $\frac{x^3}{3} \ln \sqrt{1-x} - \frac{1}{6} \ln |x-1| - \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{6}$.

1480. $\sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \ln (x + \sqrt{1+x^2})$.

1481. $\frac{1}{3} \sin \frac{3x}{2} - \frac{1}{10} \sin \frac{5x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$.

1482. $-\frac{1}{1+\operatorname{tg} x}$.

1483. $\ln |1+\operatorname{ctg} x| - \operatorname{ctg} x$.

1484. $\frac{\operatorname{sh}^2 x}{2}$.

1485. $-2 \operatorname{ch} \sqrt{1-x}$.

1486. $\frac{1}{5} \ln \operatorname{ch} 2x$.

1487. $-x \operatorname{cth} x + \ln |\operatorname{sh} x|$.

1488. $\frac{1}{2e^x} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \ln |e^x-2|$.

1489. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x-3}{2}$.

1490. $\frac{4}{7}\sqrt[4]{(e^x+1)^7} - \frac{4}{3} \sqrt[4]{(e^x+1)^3}$.

1491. $\frac{1}{\ln 4} \ln\left|\frac{1+2^x}{1-2^x}\right|$.

1492. $-\frac{10^{-2x}}{2 \ln 10}\left(x^2-1+\frac{x}{\ln 10}+\frac{1}{2 \ln^2 10}\right)$.

1493. $2 \sqrt{e^x+1} + \ln \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$.

1494. $\ln \left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right| - \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

1495. $\frac{1}{4}\left(x^4 \arcsin \frac{1}{x} + \frac{x^2+2}{3} \sqrt{x^2-1}\right)$.

1496. $\frac{x}{2} (\cos \ln x + \sin \ln x)$.

1497. $\frac{1}{5}\left(-x^2 \cos 5x + \frac{2}{5} x \sin 5x + 3x \cos 5x + \frac{2}{25} \cos 5x - \frac{3}{5} \sin 5x\right)$.

1498. $\frac{1}{2}\left[(x^2-2) \operatorname{arctg} (2x+3) + \frac{3}{4} \ln (2x^2+6x+5) - \frac{x}{2}\right]$.

1499. $\frac{1}{2} \sqrt{x-x^2} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \arcsin \sqrt{x}$.

1500. $\frac{x|x|}{2}$.

GLAVA V

1501. $b-a$.

1502. $v_0 T + g\frac{T^2}{2}$.

1503. 3.

1504. $\frac{2^{10}-1}{\ln 2}$.

1505. 156. *Uputa.* Odsječak osi OX od $x=1$ do $x=5$ razdijelimo na dijelove tako da apscise dijelišta čine geometrijsku progresiju: $x_0=1$, $x_1=x_0 q$, $x_2=x_0 q^2$, $\ldots$, $x_n=x_0 q^n$.

1506. $\ln \frac{b}{a}$. *Uputa.* Vidjeti zadatak br. 1505.

1507. $1-\cos x$. *Uputa.* Upotrijebite formulu $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}\left[\cos\dfrac{\alpha}{2}-\right.$ $\left.-\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\alpha\right]$.

1508. 1) $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}a}=-\dfrac{1}{\ln a}$; 2) $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}b}=\dfrac{1}{\ln b}$.

1509. $\ln x$.

1510. $-\sqrt{1+x^4}$.

1511. $2xe^{-x^4}-e^{-x^2}$.

1512. $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x^2}$.

1513. $x=n\pi\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

1514. $\ln 2$.

1515. $-\dfrac{3}{8}$.

1516. $e^x-e^{-x}=2\operatorname{sh} x$.

1517. $\sin x$.

1518. $\dfrac{1}{2}$. *Rješenje.* Sumu $s_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\ldots+\dfrac{n-1}{n}\right)$ možemo shvatiti kao integralnu sumu za funkciju $f(x)=x$ na odsječku $[0,\ 1]$. Prema tome je

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

1519. $\ln 2$. *Rješenje.* Sumu $s_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{n+n}=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{n}}+\ldots+\dfrac{1}{1+\dfrac{n}{n}}\right)$ možemo shvatiti kao integralnu sumu za funkciju $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ na odsječku $[0,\ 1]$, gdje su djelišta $x_k=\dfrac{k}{n}$ $(k=1,\ 2\ \ldots,\ n$. Prema tome je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln 2$.

1520. $\dfrac{1}{p+1}$.

1521. $\dfrac{7}{3}$.

1522. $\dfrac{100}{3}=33\dfrac{1}{3}$.

1523. $\dfrac{7}{4}$.

1524. $\dfrac{16}{3}$.

1525. $-\dfrac{2}{3}$.

1526. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2}{3}$.

1527. $\ln\dfrac{9}{8}$.

1528. $35\dfrac{1}{15}-32\ln 3$.

1529. $\operatorname{arctg} 3-\operatorname{arctg} 2=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}$.

1530. $\ln\dfrac{4}{3}$.

1531. $\dfrac{\pi}{16}$.

1532. $1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

1533. $\dfrac{\pi}{4}$.

1534. $\dfrac{\pi}{6}$.

1535. $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1536. $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}$.

1537. $\dfrac{2}{3}$.

1538. $\ln 2$.

1539. $1-\cos 1$.

1540. 0.

1541. $\dfrac{8}{9\sqrt{3}}+\dfrac{\pi}{6}$.

1542. $\operatorname{arctg} e-\dfrac{\pi}{4}$.

1543. $\operatorname{sh} 1=\dfrac{1}{2}\left(e-\dfrac{1}{e}\right)$.

1544. $\operatorname{th}(\ln 3)-\operatorname{th}(\ln 2)=\dfrac{1}{5}$.

1545. $-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2\pi$.
1546. 2.
1547. Divergira.

1548. $\frac{1}{1-p}$, ako je $p<1$; divergira, ako je $p\geqslant 1$.

1549. Divergira.
1550. $\frac{\pi}{2}$.
1551. Divergira.
1552. 1.

1553. $\frac{1}{p-1}$, ako je $p>1$; divergira, ako je $p\leqslant 1$.

1554. π.
1555. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$.
1556. Divergira.
1557. Divergira.

1558. $\frac{1}{\ln 2}$.
1559. Divergira.
1560. $\frac{1}{\ln a}$.
1561. Divergira.

1562. $\frac{1}{k}$.
1563. $\frac{\pi^2}{8}$.
1564. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ln 3$.
1565. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

1566. Divergira.
1567. Konvergira.
1568. Divergira.
1569. Konvergira.

1570. Konvergira.
1571. Konvergira.
1572. Divergira.
1573. Konvergira.

1574. *Uputa.* $B(p,q)=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx$, gdje je $f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$; budući da je $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\,x^{1-p}=1$ i $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{1-q}f(x)=1$, to oba integrala konvergiraju za $1-p<1$ i $1-q<1$, tj. za $p>0$ i $q>0$.

1575. *Uputa.* $\Gamma(p)=\int_0^{1} f(x)\,dx+\int_1^{\infty} f(x)\,dx$, gdje je $f(x)=x^{p-1}e^{-x}$. Prvi integral konvergira za $p>0$, a drugi za po volji odabran p.

1576. Ne.
1577. $2\sqrt{2}\int_1^2\sqrt{t}\,dt$.
1578. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$.
1579. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} dt$.

1580. $\int_0^{\infty}\frac{f(\operatorname{arctg} t)}{1+t^2}\,dt$.
1581. $x=(b-a)\,t+a$.
1582. $4-2\ln 3$.

1583. $8-\frac{9}{2\sqrt{3}}\pi$.
1584. $2-\frac{\pi}{2}$.
1585. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$.
1586. $\frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}$.

1587. $1-\frac{\pi}{4}$.
1588. $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.
1589. $4-\pi$.
1590. $\frac{1}{5}\ln 112$.

1591. $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$.
1592. $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$.
1593. $\frac{\pi a^2}{8}$.
1594. $\frac{\pi}{2}$.

1599. $\frac{\pi}{2}-1$.
1600. 1.
1601. $\frac{e^2+3}{8}$.
1602. $\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$.

1603. 1.
1604. $\frac{a}{a^2+b^2}$.
1605. $\frac{b}{a^2+b^2}$.

1606. *Rješenje.* $\Gamma(p+1)=\int\limits_0^\infty x^p e^{-x}\,dx$. Primjenjujući formulu za parcijalnu integraciju, stavljamo $x^p=u$, $e^{-x}\,dx=dv$. Odatle je $du=px^{p-1}\,dx$, $v=-e^{-x}$ i

$$\Gamma(p+1)=\left[-x^p e^{-x}\right]_0^\infty+p\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx=p\Gamma(p). \qquad (*)$$

Ako je p prirodni broj, onda, primjenjujući formulu $(*)$ p puta i uzimajući u obzir da je

$$\Gamma(1)=\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx=1,$$

dobivamo:

$$\Gamma(p+1)=p!$$

1607. $I_{2k}=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2k}\,\frac{\pi}{2}$, ako je $n=2k$ paran broj;

$I_{2k+1}=\frac{2\cdot4\cdot6\ldots2k}{1\cdot3\cdot5\ldots(2k+1)}$, ako je $n=2k+1$ neparan broj. $I_9=\frac{128}{315}$; $I_{10}=\frac{63\pi}{512}$.

1608. $\frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}$.

1609. $\frac{1}{2}\,B\left(\frac{m+1}{2},\ \frac{n+1}{2}\right)$. *Uputa.* Stavite $\sin^2 x=t$.

1610. a) Plus; b) minus; c) plus. *Uputa.* Nacrtajte graf podintegralne funkcije za vrijednosti argumenta na odsječku integriranja.

1611. a) Prvi; b) drugi; c) prvi.

1612. $\frac{1}{3}$. **1613.** a. **1614.** $\frac{1}{2}$. **1615.** $\frac{3}{8}$.

1616. $2\arcsin\frac{1}{3}$. **1617.** $2<I<\sqrt{5}$. **1618.** $\frac{2}{9}<I<\frac{2}{7}$. **1619.** $\frac{2}{13}\pi<I<\frac{2}{7}\pi$.

1620. $0<I<\frac{\pi^2}{32}$. *Uputa.* Podintegralna funkcija monotono raste.

1621. $\frac{1}{2}<I<\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1623.** $S=\frac{32}{3}$. **1624.** 1.

1625. $\frac{1}{2}$. *Uputa.* Uzmite u obzir predznak funkcije.

1626. $4\frac{1}{4}$. **1627.** 2. **1628.** $\ln 2$. **1629.** $m^2\ln 3$.

1630. πa^2. **1631.** 12. **1632.** $\frac{4}{3}p^2$. **1633.** $4\frac{1}{2}$.

1634. $10\frac{2}{3}$. **1635.** 4. **1636.** $\frac{32}{3}$. **1637.** $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$.

1638. $e+\frac{1}{e}-2=2(\operatorname{ch}1-1)$. **1639.** $ab\,[2\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})]$.

1640. $\frac{3}{8}\pi a^2$. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 27. **1641.** $2a^2e^{-1}$.

1642. $\frac{4}{3}a^2$.

1643. 15π.

1644. $\frac{9}{2}\ln 3$.

1645. 1.

1646. $3\pi a^2$. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 23.

1647. $a^2\left(2+\frac{\pi}{2}\right)$. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 24.

1648. $2\pi+\frac{4}{3}$ i $6\pi-\frac{4}{3}$.

1649. $\frac{16}{3}\pi-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ i $\frac{32}{3}\pi+\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

1650. $\frac{3}{8}\pi ab$.

1651. $3\pi a^2$.

1652. $\pi(b^2+2ab)$.

1653. $6\pi a^2$.

1654. $\frac{3}{2}a^2$. *Uputa.* Parametar t u petlji mijenja se u granicama $0 \leqslant t \leqslant +\infty$. Vidjeti prilog VI. sl. 22.

1655. $\frac{3}{2}\pi a^2$. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 28.

1656. $8\pi^3 a^2$. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 30.

1657. $\frac{\pi a^2}{8}$.

1658. a^2.

1659. $\frac{\pi a^2}{4}$ *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 33

1660. $\frac{9}{2}\pi$.

1661. $\frac{14-8\sqrt{2}}{3}a^2$.

1662. $\frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$.

1663. $a^3\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1664. $\pi\sqrt{2}$. *Uputa.* Prijeći na polarne koordinate.

1665. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$.

1666. $\sqrt{h^2-a^2}$. *Uputa.* Upotrijebite formulu $\mathrm{ch}^2\alpha-\mathrm{sh}^2\alpha=1$.

1667. $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$.

1668. $\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\ln\frac{(\sqrt{1+e^2}-1)(\sqrt{2}+1)}{e}$.

1669. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

1670. $\ln(e+\sqrt{e^2-1})$.

1671. $\ln(2+\sqrt{3})$.

1672. $\frac{1}{4}(e^2+1)$.

1673. $a\ln\frac{a}{b}$.

1674. $2a\sqrt{3}$.

1675. $\ln\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}+a-b=\ln\frac{\mathrm{sh}\, b}{\mathrm{sh}\, a}$.

1676. $\frac{1}{2}aT^2$. *Uputa.* Vidjeti prilog VI, sl. 29.

1677. $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$.

1678. $16a$.

1679. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$.

1680. $8a$.

1681. $2a[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$.

1682. $\frac{\sqrt{5}}{2}+\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

1683. $\frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}$.

1684. $\frac{1}{2}[4+\ln 3]$.

1685. $\frac{\pi a^5}{30}$.

1686. $\frac{4}{3}\pi ab^2$.

1687. $\frac{a^3\pi}{4}(e^2+4-e^{-2})$.

1688. $\frac{3}{8}\pi^2$.

1689. $v_x=\frac{\pi}{4}$.

1690. $v_y=\frac{4}{7}\pi$.

1691. $v_x=\frac{\pi}{2}$; $v_y=2\pi$.

1692. $\frac{16\pi a^3}{5}$.

1693. $\frac{32}{15}\pi a^3$.

1694. $\frac{4}{3}\pi p^3$.

1695. $\frac{3}{10}\pi$.

1696. $\frac{\pi a^3}{2}(15-16\ln 2)$.

1697. $2\pi^2 a^3$.

1698. $\frac{\pi R^2 H}{2}$.

1699. $\frac{16}{15}\pi h^2 a$.

1701. a) $5\pi^2 a^3$; b) $6\pi^3 a^3$; c) $\frac{\pi a^3}{6}(9\pi^2-16)$.

1702. $\frac{32}{105}\pi a^3$.

1703. $\frac{8}{3}\pi a^3$.

1704. $\frac{4}{21}\pi a^3$.

1705. $\frac{h}{3}\left(AB+\frac{Ab+aB}{2}+ab\right)$.

1706. $\frac{\pi abh}{3}$.

1707. $\frac{128}{105}a^3$.

1708. $\frac{8}{3}\pi a^2 b$.

1709. $\frac{1}{2}\pi a^2 h$.

1710. $\frac{16}{3}a^3$.

1711. $\pi a^2\sqrt{pq}$.

1712. $\pi abh\left(1+\frac{h^2}{3c^2}\right)$.

1713. $\frac{4}{3}\pi abc$.

1714. $\frac{8\pi}{3}(\sqrt{17^3}-1)$; $\frac{16}{3}\pi a^2(5\sqrt{5}-8)$.

1715. $2\pi[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$.

1716. $\pi(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\pi\ln\frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{5}+1}$.

1717. $\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$.

1718. $\frac{\pi a^2}{4}(e^2+e^{-2}+4)=\frac{\pi a^2}{2}(2+\operatorname{sh}2)$.

1719. $\frac{12}{5}\pi a^2$.

1720. $\frac{\pi}{3}(e-1)(e^2+e+4)$.

1721. $4\pi^2 ab$. *Uputa.* Ovdje je $y=b\pm\sqrt{a^2-x^2}$. Uzmemo li predznak plus, dobijemo vanjsku plohu torusa, a za predznak minus dobijemo unutarnju plohu torusa.

1722. 1) $2\pi b^2+\frac{2\pi ab}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon$; 2) $2\pi a^2+\frac{\pi b^2}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, gdje je $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ (ekscentricitet elipse).

1723. a) $\frac{64\pi a^2}{3}$; b) $16\pi^2 a^2$; c) $\frac{32}{3}\pi a^2$.

1724. $\frac{128}{5}\pi a^2$.

1725. $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$.

1726. $\frac{128}{5}\pi a^2$.

1727. $M_X=\frac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2}$; $M_Y=\frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}$.

1728. $M_a=\frac{ab^2}{2}$; $M_b=\frac{a^2b}{2}$.

1729. $M_X=M_Y=\frac{a^3}{6}$; $\overline{x}=\overline{y}=\frac{a}{3}$.

1730. $M_X=M_Y=\frac{3}{5}a^2$; $\overline{x}=\overline{y}=\frac{2}{5}a$.

1731. $2\pi a^2$.

1732. $x=0$; $\overline{y}=\frac{a}{4}\,\frac{2+\operatorname{sh}2}{\operatorname{sh}1}$.

1733. $\overline{x}=\frac{a\sin\alpha}{\alpha}$; $\overline{y}=0$.

1734. $\overline{x}=\pi a$; $\overline{y}=\frac{4}{3}a$.

1735. $\overline{x}=\frac{4a}{3\pi}$; $\overline{y}=\frac{4b}{3\pi}$.

1736. $\overline{x}=\overline{y}=\frac{9}{20}$.

1737. $\overline{x}=\pi a$; $\overline{y}=\frac{5}{6}a$.

1738. $\left(0;\ 0;\ \frac{a}{2}\right)$. *Rješenje.* Razdijelimo polukuglu na elementarne kugline pojase površine $d\sigma$ pomoću horizontalnih ravnina. Imamo $d\sigma=2\pi a\,dz$, gdje je dz visina pojasa. Odatle je

$$\overline{z}=\frac{2\pi\int\limits_0^a az\,dz}{2\pi a^2}=\frac{a}{2}.$$

Zbog simetrije je $\overline{x}=\overline{y}=0$.

1739. Na udaljenosti $\frac{3}{4}$ visine od vrha stošca. *Rješenje.* Razdijelimo stožac na elemente pomoću ravnina koje su paralelne s bazom. Masa elementarnog sloja $dm_i = \gamma\pi\rho^2 dz$, gdje je γ gustoća, z udaljenost presječne ravnine od vrha stošca, $\rho = \frac{r}{h} z$. Odatle je

$$\bar{z} = \frac{\pi \int\limits_0^h \frac{r^2}{h^2} z^3 dz}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{3}{4} h.$$

1740. $\left(0; 0; + \frac{3}{8} a\right)$. *Rješenje.* Zbog simetrije je $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Da bismo odredili $\bar{z}$, razdijelimo polukuglu na elementarne slojeve pomoću ravnina koje su paralelne s horizontalnom ravninom. Masa takvoga elementarnog sloja je $dm = \gamma\pi r^2\, dz$, gdje je γ gustoća, z udaljenost presječne ravnine od baze polukugle, a $r = \sqrt{a^2 - z^2}$ je polumjer presjeka. Imamo

$$\bar{z} = \frac{\pi \int\limits_0^a (a^2 - z^2) z\, dz}{\frac{2}{3}\pi a^3} = \frac{3}{8} a.$$

1741. $I = \pi a^3$.

1742. $I_a = \frac{1}{3} ab^3$; $I_b = \frac{1}{3} a^3 b$.

1743. $I = \frac{4}{15} hb^3$.

1744. $I_a = \frac{1}{4} \pi ab^3$; $I_b = \frac{1}{4} \pi a^3 b$.

1745. $I = \frac{1}{2} \pi (R_2^4 - R_1^4)$. *Rješenje.* Razdijelimo prsten na elementarne koncentrične prstenove. Masa takvog elementa je $dm = \gamma 2\pi r\, dr$, a moment tromosti $I = 2\pi \int\limits_{R_1}^{R_2} r^3\, dr = \frac{1}{2} \pi (R_2^4 - R_1^4)$; $(\gamma = 1)$.

1746. $I = \frac{1}{10} \pi R^4 H\gamma$. *Rješenje.* Razdijelimo stožac na elementarne valjkaste cijevi paralelne s osi stošca. Volumen takve elementarne cijevi je $dV = 2\pi rh\, dr$, gdje je r polumjer cijevi (udaljenost do osi stošca), a $h = H\left(1 - \frac{r}{R}\right)$ visina cijevi; tada je moment tromosti jednak $I = \gamma \int\limits_0^R 2\pi H \left(1 - \frac{r}{R}\right) r^3\, dr = \frac{\gamma\pi R^4 H}{10}$, gdje je γ gustoća stošca.

1747. $I = \frac{2}{5} Ma^2$. *Rješenje.* Razdijelimo kuglu na elementarne valjkaste cijevi, kojih je os zadan promjer. Elementarni volumen je $dV = 2\pi rh\, dr$, gdje je r polumjer cijevi, a $h = 2a\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}$ njena visina. Tada je moment tromosti $I = 4\pi a\gamma \int\limits_0^a \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}\, r^3\, dr = \frac{8}{15} \pi a^5 \gamma$, gdje je γ gustoća kugle, a budući da je masa $M = \frac{4}{3} \pi a^3 \gamma$, to je $I = \frac{2}{5} Ma^2$.

1748. $V = 2\pi^2a^2b$; $S = 4\pi^2ab$;

1749. a) $\overline{x} = \overline{y} = \frac{2}{5}a$; b) $\overline{x} = \overline{y} = \frac{9}{10}p$.

1750. a) $\overline{x} = 0$, $\overline{y} = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}$. *Uputa.* Koordinatne osi su tako odabrane, da se os OX poklapa s promjerom, a ishodište je u središtu kruga; b) $\overline{x} = \frac{h}{3}$. *Rješenje.* Volumen tijela dvostrukog stošca koji dobijemo vrtnjom trokuta oko njegove baze, jednak je $V = \frac{1}{3}\pi bh^2$, gdje je b baza, a h visina trokuta. Prema Guldinovom teoremu taj je volumen također jednak $V = 2\pi\overline{x}\frac{1}{2}bh$, gdje je $\overline{x}$ udaljenost težišta od baze. Odatle je $\overline{x} = \frac{h}{3}$.

1751. $v_0t - \frac{gt^2}{2}$.

1752. $\frac{c^2}{2g}\ln\left(1 + \frac{v_0^2}{c^2}\right)$.

1753. $x = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$; $v_{cp} = \frac{2}{\pi}v_0$.

1754. $S = 10^4$ m.

1755. $v = \frac{A}{b}\ln\left(\frac{a}{a - bt}\right)$; $h = \frac{A}{b^2}\left[bt_1 - (a - bt_1)\ln\frac{a}{a - bt_1}\right]$.

1756. $A = \frac{\pi\gamma}{2}R^2H^2$. *Uputa.* Elementarna sila (sila teže) jednaka je težini vode obujma sloja s debljinom dx, tj. $dF = \gamma\pi R^2\,dx$, gdje je γ težina jedinice volumena vode. Prema tome elementarni rad sile je $dA = \gamma\pi R^2(H - x)\,dx$, gdje je x razina vode.

1757. $A = \frac{\pi}{12}\gamma R^2H^2$.

1758. $A = \frac{\pi\gamma}{4}R^4\,TM \approx 0{,}79 \cdot 10^4 = 0{,}79 \cdot 10^7$ kpm.

1759. $A = \gamma\pi R^3H$.

1760. $A = \frac{mgh}{1 + \frac{h}{R}}$; $A_\infty = mgR$. *Rješenje.* Sila koja djeluje na tijelo mase m jednaka je $F = k\frac{mM}{r^2}$ gdje je r udaljenost od središta Zemlje. Budući da za $r = R$ imamo $F = mg$, to je $kM = gR^2$. Traženi rad imat će oblik $A = \int_R^{R+h} k\frac{mM}{r^2}\,dr = km\,M\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + h}\right) = \frac{mgh}{1 + \frac{h}{R}}$. Za $h = \infty$ imamo $A = mgR$.

1761. $1{,}8 \cdot 10^4$ erga. *Rješenje.* Sila koja djeluje između naboja je $F = \frac{e_0e_1}{x^2}$ dina. Prema tome rad pri pomicanju naboja e_1 iz tačke x_1 u tačku x_2 bit će: $A = e_0e_1\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^2} = e_0e_1\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) = 1{,}8 \cdot 10^4$ erga.

1762. $A = 800\pi\ln 2$ kpm. *Rješenje.* Za izotermički proces je $pv = p_0v_0$. Rad pri širenju plina od volumena v_0 do volumena v_1 jednak je $A = \int_{v_0}^{v_1} p\,dv = p_0v_0\ln\frac{v_1}{v_0}$.

1763. $A \approx 1\,500$ kpm. *Rješenje.* Za adijabatski proces vrijedi Poissonov zakon $pv^k = p_0 v_0^k$, gdje je $k \approx 1{,}4$. Odatle je $A = \int\limits_{v_0}^{v_1} \frac{p_0 v_0^k}{v^k}\,\mathrm{d}v = \frac{p_0 v_0}{k-1}\left[1 - \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{k-1}\right]$.

1764. $A = \frac{4}{3}\,\pi\mu Pa$. *Rješenje.* Ako je a polumjer baze osovine, onda pritisak na jedinicu površine oslonca iznosi $p = \frac{P}{\pi a^2}$. Sila trenja prstena širine $\mathrm{d}r$, koji je udaljen od središta za r jednaka je $\frac{2\mu P}{a^2}\,r\,\mathrm{d}r$. Rad sile trenja na prstenu pri punom okretaju iznosi $\mathrm{d}A = \frac{4\pi\,\mu P}{a^2} r^2\,\mathrm{d}r$. Prema tome ukupni rad iznosi $A = \frac{4\pi\,\mu P}{a^2}\int\limits_0^a r^2\,\mathrm{d}r = \frac{4}{3}\,\pi\mu Pa$.

1765. $\frac{1}{4}\,MR^2\omega^2$. *Rješenje.* Kinetička energija elementa diska je $\mathrm{d}K = \frac{v^2\,\mathrm{d}m}{2} = \frac{\rho r^2\omega^2}{2}\,\mathrm{d}\sigma$, gdje je $\mathrm{d}\sigma = 2\pi r\,\mathrm{d}r$ element površine, a r udaljenost tog elementa od osi vrtnje te ρ površinska gustoća, $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$. Prema tome je $\mathrm{d}K = \frac{M\omega^2}{2\pi R^2} r^2\,\mathrm{d}\sigma$. Odatle je $K = \frac{M\omega^2}{R^2}\int\limits_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \frac{MR^2\,\omega^2}{4}$.

1766. $K = \frac{3}{20}\,MR^2\omega^2$.

1767. $K = \frac{M}{5}\,R^2\omega^2 = 2{,}3\cdot 10^8$ kpm. *Uputa.* Količina potrebnog rada jednaka je zalihi kinetičke energije.

1768. $p = \frac{bh^2}{6}$.

1769. $P = \frac{(a+2b)\,h^2}{6} \approx 11{,}3\cdot 10^3\ T$.

1770. $P = ab\gamma\pi h$.

1771. $P = \frac{\pi R^2 H}{3}$ (vertikalna komponenta usmjerena odozdo prema gore).

1772. $533\frac{1}{3}$ g.

1773. 99,8 cal.

1774. $M = \frac{hb^2 p}{2}$ gcm.

1775. $\frac{kMm}{a\,(a+l)}$ (k je gravitaciona konstanta).

1776. $\frac{\pi p a^4}{8\mu l}$. *Rješenje.* $Q = \int\limits_0^a v\cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi p}{4\mu l}\int\limits_0^a (a^2 - r^2)\,r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi p}{2\mu l}\left[\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{\pi p a^4}{8\mu l}$.

1777. $Q = \int\limits_0^{2b} va\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\,p\,\frac{ab^3}{\mu l}$. *Uputa.* Os apscisa neka bude usmjerena po donjoj većoj strani pravokutnika, a os ordinata okomito na nju, u polovištu.

1778. *Rješenje.* $S = \int\limits_{v_1}^{v_2} \frac{1}{a}\,\mathrm{d}v$; s druge strane je $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a$, odatle $\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}v$ pa prema tome vrijeme zaleta iznosi $t = \int\limits_{v_1}^{v_2} \frac{\mathrm{d}v}{a} = S$.

1779. $M_x = -\int\limits_0^x \frac{Q}{l}(x-t)\,dt + \frac{Q}{2}x = -\frac{Q}{l}\left[xt - \frac{t^2}{2}\right]_0^x + \frac{Q}{2}x = \frac{Qx}{2}\left(1-\frac{x}{l}\right).$

1780. $M_x = -\int\limits_0^x (x-t)\,kt\,dt + Ax = \frac{kx}{6}(l^2-x^2).$

1781. $Q = 0{,}12\ TRI_0^2$ cal. *Uputa.* Primijenite Joule-Lenzov zakon.

GLAVA VI

1782. $V = \frac{2}{3}(y^2-x^2)\,x.$

1783. $S = \frac{2}{3}(x+y)\sqrt{4z^2+3(x-y)^2}.$

1784. $f\left(\frac{1}{2};\ 3\right) = \frac{5}{3};\ f(1;\ -1) = -2.$

1785. $\frac{y^2-x^2}{2xy},\ \frac{x^2-y^2}{2xy},\ \frac{y^2-x^2}{2xy},\ \frac{2xy}{x^2-y^2}.$

1786. $f(x,\ x^2) = 1+x-x^2.$

1787. $z = \frac{R^4}{1-R^2}.$

1788. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}$. *Uputa.* Prikažemo zadanu funkciju u obliku $f\left(\frac{y}{x}\right) = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}$ i zamijenimo $\frac{y}{x}$ sa x.

1789. $f(x,\ y) = \frac{x^2-xy}{2}$. *Rješenje.* Označimo $x+y=u$, $x-y=v$. Tada je $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$; $f(u,\ v) = \frac{u+v}{2}\cdot\frac{u-v}{2} + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = \frac{u^2-uv}{2}$. Ostaje još da argumente u i v nazovemo x i y.

1790. $f(u) = u^2+2u$; $z = x-1+\sqrt{y}$. *Uputa.* U identitetu $x = 1+f(\sqrt{x}-1)$ stavimo $\sqrt{x}-1 = u$; tada je $x = (u+1)^2$ i, prema tome, $f(u) = u^2+2u$.

1791. $f(y) = \sqrt{1+y^2}$; $z = \frac{x}{|x|}\sqrt{x^2+y^2}$. *Rješenje.* Za $x=1$ imamo identitet $\sqrt{1+y^2} = 1\cdot f\left(\frac{y}{1}\right)$, tj. $f(y) = \sqrt{1+y^2}$. Prema tome je $f\left(\frac{y}{x}\right) = \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$ i $z = x\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$.

1792. a) Jedinični krug sa središtem u ishodištu uključivo kružnice ($x^2+y^2 \leqslant 1$); b) bisektrisa $y=x$ I i III koordinatnog kuta, c) poluravnina smještena iznad pravca $x+y=0$ ($x+y>0$); d) pruga između pravaca $y=\pm 1$, uključujući te pravce ($-1 \leqslant y \leqslant 1$); e) kvadrat, koji tvore odsječci pravaca $x=\pm 1$ i $y=\pm 1$, uključujući njegove stranice ($-1 \leqslant x \leqslant 1$; $-1 \leqslant y \leqslant 1$); f) dio ravnine uz os OX između pravaca $y=\pm x$, uključujući te pravce s izuzećem ishodišta ($-x \leqslant y \leqslant x$ za $x>0$, $x \leqslant y \leqslant -x$ za $x<0$; g) dvije pruge $x \geqslant 2$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$ i $x \leqslant -2$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$; h) prsten između kružnica $x^2+y^2=a^2$ i $x^2+y^2=2a^2$, uključivo granica; i) pruge $2n\pi \leqslant x \leqslant (2n+1)\pi$, $y \geqslant 0$ i $(2n+1)\pi \leqslant x \leqslant (2n+2)\pi$, $y \leqslant 0$, gdje je n cio broj; j) dio ravnine iznad parabole $y=-x^2$ ($x^2+y>0$); k) cijela ravnina XOY; l) cijela ravnina XOY s izuzetkom ishodišta; m) dio ravnine iznad parabole $y^2=x$ i desno od osi OY, uključivo tačaka osi OY i izuzećem tačaka parabole ($x \geqslant 0$, $y > \sqrt{x}$); n) cijela ravnina, s izuzetkom tačaka pravaca $x=1$ i $y=0$; o) porodica koncentričnih prstenova $2\pi k \leqslant x^2+y^2 \leqslant \pi(2k+1)$ ($k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$).

1793. a) I oktant (uključivo granica); b) I, III, VI i VIII oktant (s izuzećem granice); c) kocka, omeđena ravninama $x=\pm 1$, $y=\pm 1$ i $z=\pm 1$, uključivo njene stranice; d) kugla polumjera 1 sa središtem u ishodištu, uključivo njenu površinu.

1794. a) Ravnina; nivo-linije su pravci paralelni s pravcem $x+y=0$; b) rotacioni paraboloid; nivo-linije su koncentrične kružnice sa središtem u ishodištu; c) hiperbolni paraboloid; nivo-linije su istostrane hiperbole; d) stožac drugog reda; nivo-linije su istostrane hiperbole; e) parabolni valjak, tvoren paralelnim pravcima $x+y+1=0$; nivo-linije su paralelni pravci; f) plašt kvadratne piramide, nivo-linije su rubovi kvadrata; g) nivo-linije su parabole $y=Cx^2$; h) nivo-linije su parabole $y=C\sqrt{x}$; i) nivo-linije su kružnice $C(x^2+y^2)=2x$.

1795. a) Parabole $y=C-x^2\ (C>0)$; b) hiperbole $xy=C\ (|C|\leqslant 1)$; c) kružnice $x^2+y^2=C^2$; d) pravci $y=ax+C$; e) pravci $y=Cx\ (x\neq 0)$.

1796. a) Ravnine paralelne s ravninom $x+y+z=0$; b) koncentrične kugle sa središtem u ishodištu; c) za $u>0$ jednokrilni rotacioni hiperboloidi oko osi OZ; pri $u<0$ dvokrilni rotacioni hiperboloidi oko iste osi; obje porodice ploha dijeli stožac $x^2+y^2-z^2=0$ $(u=0)$.

1797. a) 0; b) 0; c) 2; d) e^k; e) limes ne egzistira; f) limes ne egzistira. *Uputa.* U tački b) prijeći na polarne koordinate. U tačkama e) i f) ispitajte mijenjanje x i y duž pravaca $y=kx$ i pokažite da zadani izraz može težiti k različitim limesima u zavisnosti od izbora k.

1798. Neprekinuta.

1799. a) Tačka prekinutosti za $x=0$ i $y=0$; b) sve tačke pravca $x=y$ (linija prekinutosti); c) linija prekinutosti je kružnica $x^2+y^2=1$; d) linije prekinutosti su koordinatne osi.

1800. *Uputa.* Stavivši $y=y_1=\text{const.}$, dobijemo funkciju $\varphi_1(x)=\dfrac{2xy_1}{x^2+y_1^2}$, koja je svagdje neprekinuta budući da je za $y_1\neq 0$ nazivnik $x^2+y_1^2\neq 0$, a za $y_1=0$ $\varphi_1(x)\equiv 0$. Analogno je za $x=x_1=\text{const}$ funkcija $\varphi_2(y)=\dfrac{2x_1y}{x_1^2+y^2}$ svagdje neprekinuta. S obzirom na obje varijable x, y zajedno funkcija z ima prekinutost u tački $(0, 0)$, jer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z$ ne egzistira. Zaista, ako prijeđemo na polarne koordinate $(x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi)$, dobivamo $z=\sin 2\varphi$, odakle je vidljivo da je, ako $x\to 0$ i $y\to 0$ tako da je $\varphi=\text{const}$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$, onda $z\to\sin 2\varphi$. Budući da ove granične vrijednosti funkcije z ovise o smjeru φ, to z nema limesa kada $x\to 0$ i $y\to 0$.

1801. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3(x^2-ay)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=3(y^2-ax)$.

1802. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2y}{(x+y)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2x}{(x+y)^2}$.

1803. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}$.

1804. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

1805. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

1806. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x+\sqrt{x^2+y^2})}$.

1807. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

1808. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$.

1809. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}\,e^{\sin\frac{x}{y}}\cos\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}\,e^{\sin\frac{y}{x}}\cos\dfrac{y}{x}$.

1810. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{xy^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{yx^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$.

1811. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\dfrac{x+a}{\sqrt{y}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x+a}{2y\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\dfrac{x+a}{\sqrt{y}}$.

1812. $\frac{\partial u}{\partial x}=yz\,(xy)^{z-1},\ \frac{\partial u}{\partial y}=xz\,(xy)^{z-1},\ \frac{\partial u}{\partial z}=(xy)^z\ln(xy).$

1813. $\frac{\partial u}{\partial x}=yz^{xy}\ln z,\ \frac{\partial u}{\partial y}=xz^{xy}\ln z,\ \frac{\partial u}{\partial z}=xyz^{xy-1}.$

1814. $f_x'(2,\ 1)=\frac{1}{2},\ f_y'(2,\ 1)=0.$

1815. $f_x'(1;\ 2;\ 0)=1,\ f_y'(1;\ 2;\ 0)=\frac{1}{2},\ f_z'(1;\ 2;\ 0)=\frac{1}{2}.$

1820. $-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/}}.$

1821. $r.$

1826. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\varphi(x).$

1827. $z=\frac{x^2}{2}+y^2\ln x+\sin y-\frac{1}{2}.$

1828. 1) $\operatorname{tg}\alpha=4,\ \operatorname{tg}\beta=\infty,\ \operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{4}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha=\infty,\ \operatorname{tg}\beta=4,\ \operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{4}.$

1829. $\frac{\partial S}{\partial a}=\frac{1}{2}h,\ \frac{\partial S}{\partial b}=\frac{1}{2}h,\ \frac{\partial S}{\partial h}=\frac{1}{2}(a+b).$

1830. *Uputa.* Provjerite da je funkcija jednaka nuli na cijeloj osi OX i na cijeloj osi OY i poslužite se definicijom parcijalnih derivacija. Uvjerite se da je $f_y'(0,\ 0)=f_x'(0,\ 0)=0.$

1831. $\Delta f=4\Delta x+\Delta y+2\Delta x^2+2\Delta x\Delta y+\Delta x^2\Delta y$; $df=4dx+dy$; a) $\Delta f-df=8$; b) $\Delta f-df=0{,}062.$

1833. $dz=3\,(x^2-y)\,dx+3\,(y^2-x)\,dy.$

1834. $dz=2xy^3\,dx+3x^2y^2\,dy.$

1835. $dz=\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}(y\,dx-x\,dy).$

1836. $dz=\sin 2x\,dx-\sin 2y\,dy.$

1837. $dz=y^2x^{y-1}\,dx+x^y(1+y\ln x)\,dy.$

1838. $dz=\frac{2}{x^2+y^2}(x\,dx+y\,dy).$

1839. $df=\frac{1}{x+y}\left(dx-\frac{x}{y}\,dy\right).$

1840. $dz=0.$

1841. $dz=\frac{2}{x\sin\frac{2y}{x}}\left(dy-\frac{y}{x}\,dx\right).$

1842. $df(1,1)=dx-2dy.$

1843. $du=yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz.$

1844. $du=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\,dx+y\,dy+z\,dz).$

1845. $du=\left(xy+\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left[\left(y+\frac{1}{y}\right)z\,dx+\left(1-\frac{1}{y^2}\right)xz\,dy+\left(xy+\frac{x}{y}\right)\ln\left(xy+\frac{x}{y}\right)dz\right].$

1846. $du=\frac{z^2}{x^2y^2+z^4}\left(y\,dx+x\,dy-\frac{2xy}{z}\,dz\right).$

1847. $df\,(3,\ 4,\ 5)=\frac{1}{25}(5dz-3dx-4dy).$

1848. $dl=0{,}062$ cm; $\Delta l=0{,}065$ cm.

1849. 75 cm³ (s obzirom na unutarnje dimenzije).

1850. $\frac{1}{8}$ cm. *Uputa.* Postavimo da je diferencijal površine isječka jednak nuli i nađemo odatle diferencijal polumjera.

1851. a) 1,00; b) 4,998; c) 0,273.

1853. S tačnošću do 4 m (preciznije do 4,25 m).

1854. $\pi\,\frac{\alpha g-\beta l}{g\sqrt{lg}}$.

1855. $\mathrm{d}z=\frac{1}{\rho}(\mathrm{d}y\cos\alpha-\mathrm{d}x\sin\alpha)$.

1856. $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{e^t(t\ln t-1)}{t\ln^2 t}$.

1857. $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{t}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\left(6-\frac{x}{2y^2}\right)$.

1858. $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=2t\ln t\operatorname{tg}t+\frac{(t^2+1)\operatorname{tg}t}{t}+\frac{(t^2+1)\ln t}{\cos^2 t}$.

1859. $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0$.

1860. $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(\sin x)^{\cos x}(\cos x\operatorname{ctg}x-\sin x\ln\sin x)$.

1861. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x^2}$.

1862. $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$; $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=x^y\left[\varphi'(x)\ln x+\frac{y}{x}\right]$.

1863. $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'_u(u,v)+yc^{xy}f'_v(u,v)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf'_u(u,v)+xe^{xy}f'_v(u,v)$.

1864. $\frac{\partial z}{\partial u}=0$, $\frac{\partial z}{\partial v}=1$.

1865. $\frac{\partial z}{\partial x}=y\left(1-\frac{1}{x^2}\right)f'\left(xy+\frac{y}{x}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x+\frac{1}{x}\right)f'\left(xy+\frac{y}{x}\right)$.

1867. $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'_x(x,y,z)+\varphi'(x)f'_y(x,y,z)+f'_z(x,y,z)\,[\psi'_x(x,y)+\psi'_y(x,y)\,\varphi'(x)]$.

1873. Opseg raste s brzinom od 2 m/s, površina raste s brzinom od 70 m²/s.

1874. $\frac{1+2t^2+3t^4}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$.

1875. $20\sqrt{5-2\sqrt{2}}$ km/h.

1876. $-\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

1877. 1.

1878. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1879. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1880. $\frac{68}{13}$.

1881. $\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}$.

1882. a) (2; 0); b) (0; 0 i 1; 1); c) (7; 2; 1).

1884. $9\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$.

1885. $\frac{1}{4}(5\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j})$.

1886. $6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$.

1887. $|\operatorname{grad}u|=6$; $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{1}{3}$.

1888. $\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{10}}$.

1889. $\operatorname{tg}\varphi\approx 8{,}944$; $\varphi\approx 83°37'$.

1891. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{abcy^2}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{abcxy}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{abcx^2}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}$.

1892. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(y-x^2)}{(x^2+y)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{2x}{(x^2+y)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{(x^2+y)^2}$.

1893. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{xy}{(2xy+y^2)^{3/2}}$. **1894.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0$. **1895.** $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \dfrac{r^2-x^2}{r^3}$.

1896. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} = 1$.

1897. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \alpha\beta\gamma x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1}$. **1898.** $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = -x^2 y \cos(xy) - 2x \sin(xy)$.

1899. $f''_{xx}(0, 0) = m(m-1)$; $f''_{xy}(0, 0) = mn$; $f''_{yy}(0, 0) = n(n-1)$.

1902. *Uputa.* Provjerite, upotrebom pravila za deriviranje i definicije parcijalne derivacije, da je $f'_x(x, y) = y\left[\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \dfrac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$ (za $x^2+y^2 \neq 0$), $f'_x(0, 0) = 0$ i, prema tome, $f'_x(0, y) = -y$ za $x = 0$ i za svaki y. Odatle je $f''_{xy}(0, y) = -1$, a napose je, $f''_{xy}(0, 0) = -1$. Analogno nalazimo da je $f''_{yx}(0, 0) = 1$.

1903. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f'_u(u, v) + 4x^2 f''_{uu}(u, v) + 4xy\, f''_{uv}(u, v) + y^2 f''_{vv}(u, v)$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f'_v(u, v) + 4xy\, f''_{uu}(u, v) + 2(x^2+y^2) f''_{uv}(u, v) + xy\, f''_{vv}(u, v)$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f'_u(u, v) + 4y^2 f''_{uu}(u, v) + 4xy\, f''_{uv}(u, v) + x^2 f''_{vv}(u, v)$.

1904. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{xx} + 2f''_{xz}\,\varphi'_x + f'_z(\varphi'_x)^2 + f'_z\,\varphi''_{xx}$.

1905. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{uu}(\varphi'_x)^2 + 2f''_{uv}\,\varphi'_x\,\psi'_x + f''_{vv}(\psi'_x)^2 + f'_u\,\varphi''_{xx} + f'_x\,\psi''_{xx}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f''_{uu}\,\varphi'_x\,\varphi'_y +$

$+ f''_{uv}(\varphi'_x\,\psi'_y + \psi'_x\,\varphi'_y) + f''_{vv}\psi'_x\psi'_y + f'_u\,\varphi''_{xy} + f'_v\psi''_{xy}$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{uu}(\varphi'_y)^2 + 2f''_{uv}\,\varphi'_y\psi'_y + f''_{vv}(\psi'_y)^2 + f'_u\varphi''_{yy} + f'_v\,\psi''_{yy}$.

1914. $u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$. **1915.** $u(x, y) = x\varphi(y) + \psi(y)$.

1916. $d^2 z = e^{xy}[(y\,dx + x\,dy)^2 + 2dx\,dy]$. **1917.** $d^2 u = 2(x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy)$.

1918. $d^2 z = 4\varphi''(t)(x\,dx + y\,dy)^2 + 2\varphi'(t)(dx^2 + dy^2)$.

1919. $dz = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{xy}\left(y \ln\dfrac{ex}{y}\,dx + x \ln\dfrac{x}{ey}\,dy\right)$; $d^2 z = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{xy}\left[\left(y^2 \ln^2\dfrac{ex}{y} + \dfrac{y}{x}\right)dx^2 + \right.$

$\left. + 2\left(xy \ln\dfrac{ex}{y} \ln\dfrac{x}{ey} + \ln\dfrac{x}{y}\right)dx\,dy + \left(x^2 \ln^2\dfrac{x}{ey} - \dfrac{x}{y}\right)dy^2\right]$.

1920. $d^2 z = a^2 f''_{uu}(u, v)\,dx^2 + 2ab\,f''_{uv}(u, v)\,dx\,dy + b^2 f''_{vv}(u, v)\,dy^2$.

1921. $d^2 z = (ye^x f'_v + e^{2y} f''_{uu} + 2ye^{x+y} f''_{uv} + y^2 e^{2x} f''_{vv})\,dx^2 + 2(e^y f'_u + e^x f'_v + xe^{2y} f''_{uu} +$
$+ e^{x+y}(1+xy) f''_{uv} + ye^{2x} f''_{vv})\,dx\,dy + (xe^y f'_u + x^2 e^{2y} f''_{uu} + 2xe^{x+y} f''_{uv} + e^{2x} f''_{vv})\,dy^2$.

1922. $d^3 z = e^x(\cos y\,dx^3 - 3\sin y\,dx^2\,dy - 3\cos y\,dx\,dy^2 + \sin y\,dy^3)$.

1923. $d^3 z = -y\cos x\,dx^3 - 3\sin x\,dx^2\,dy - 3\cos y\,dx\,dy^2 + x\sin y\,dy^3$.

1924. $df(1; 2) = 0$; $d^2 f(1; 2) = 6dx^2 + 2dx\,dy + 4{,}5\,dy^2$.

1925. $d^2 f(0, 0, 0) = 2dx^2 + 4dy^2 + 6dz^2 - 4dx\,dy + 8dx\,dz + 4dy\,dz$.

1926. $xy + C$. **1927.** $x^3 y - \dfrac{y^3}{3} + \sin x + C$.

1928. $\frac{x}{x+y} + \ln|x+y| + C.$

1929. $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + 2\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C.$

1930. $\frac{x}{y} + C.$

1931. $\sqrt{x^2+y^2} + C.$

1932. $a = -1,\ b = -1,\ z = \frac{x-y}{x^2+y^2} + C.$

1933. $x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz+C.$

1934. $x^3+2xy^2+3xz+y^2-yz-2z+C.$

1935. $x^2yz-3xy^2z+4x^2y^2+2x+y+3z+C.$

1936. $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+C.$

1937. $\sqrt{x^2+y^2+z^2}+C.$

1938. $\lambda = -1$. *Uputa.* Napišite uvjete totalnog diferencijala za izraz $X\,dx + Y\,dy$.

1939. $f_x' = f_y'.$

1940. $u = \int_a^{xy} f(z)\,dz + C.$

1941. $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y};\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3};\ \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3b^6x}{a^4y^5}.$

1942. Jednadžba koja određuje y jest jednadžba za par pravaca.

1943. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^x\ln y}{1-xy^{x-1}}.$

1944. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-1};\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{(1-y)^3}.$

1945. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = 3$ ili -1; $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1} = 8$ ili -8.

1946. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+ay}{ax-y};\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(a^2+1)(x^2+y^2)}{(ax-y)^3}.$

1947. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x};\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2}.$

1948. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2-yz}{xy-z^2};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y^2-3xz-2}{3(xy-z^2)}.$

1949. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z\sin x-\cos y}{\cos x-y\sin z};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\sin y-\cos z}{\cos x-y\sin z}.$

1950. $\frac{\partial z}{\partial x} = -1;\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}.$

1951. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2x}{a^2z};\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2y}{b^2z};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{c^4(b^2-y^2)}{a^2b^2z^3};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{c^4(a^2-x^2)}{a^2b^2z^3}.$

1953. $\frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix}\varphi_x' & \varphi_y'\\ \psi_x' & \psi_y'\end{vmatrix}}{\psi_y'}.$

1954. $dz = -\frac{x}{z}\,dx - \frac{y}{z}\,dy;\ d^2z = \frac{y^2-a^2}{z^3}dx^2 - 2\frac{xy}{z^3}\,dx\,dy + \frac{x^2-a^2}{z^3}\,dy^2.$

1955. $dz = 0;\ d^2z = \frac{4}{15}(dx^2+dy^2).$

1956. $dz = \frac{z}{1-z}(dx+dy);\ d^2z = \frac{z}{(1-z)^3}(dx^2+2dx\,dy+dy^2).$

1961. $\frac{dy}{dx} = \infty;\ \frac{dz}{dx} = \frac{1}{5};\ \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{4}{25}.$

1962. $dy = \frac{y(z-x)}{x(y-z)}dx;\ dz = \frac{z(x-y)}{x(y-z)}dx;$

$d^2y = -d^2z = -\frac{a}{x^3(y-z)^3}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\,dx^2.$

1963. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=1$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; $\frac{\partial v}{\partial x}=-1$; $\frac{\partial v}{\partial y}=0$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=2$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=1$; $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$.

1964. $\mathrm{d}u=\frac{y}{1+y}\,\mathrm{d}x+\frac{v}{1+y}\,\mathrm{d}y$; $\mathrm{d}v=\frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}x-\frac{v}{1+y}\,\mathrm{d}y$;

$\mathrm{d}^2u=-\mathrm{d}^2u=\frac{2}{(1+y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\frac{2v}{(1+y)^2}\,\mathrm{d}y^2$.

1965. $\mathrm{d}u=\dfrac{\psi_v'\,\mathrm{d}x-\varphi_v'\,\mathrm{d}y}{\begin{vmatrix}\varphi_u' & \varphi_v'\\ \psi_u' & \psi_v'\end{vmatrix}}$; $\mathrm{d}v=\dfrac{-\psi_u'\,\mathrm{d}x+\varphi_u'\,\mathrm{d}y}{\begin{vmatrix}\varphi_u' & \varphi_v'\\ \psi_u' & \psi_v'\end{vmatrix}}$.

1966. a) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c\sin v}{u}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c\cos v}{u}$; b) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}(v+u)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}(v-u)$;

c) $\mathrm{d}z=\frac{1}{2e^{2u}}\left[e^{u-v}(v+u)\,\mathrm{d}x+e^{u+v}(v-u)\,\mathrm{d}y\right]$.

1967. $\frac{\partial z}{\partial x}=F_r'(r,\varphi)\cos\varphi-F_\varphi'(r,\varphi)\frac{\sin\varphi}{r}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=F_r'(r,\varphi)\sin\varphi+F_\varphi'(r,\varphi)\frac{\cos\varphi}{r}$.

1968. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c}{a}\cos\varphi\operatorname{ctg}\psi$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c}{b}\sin\varphi\operatorname{ctg}\psi$.

1969. $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=0$.

1970. $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=0$.

1971. a) $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}-2y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=0$; b) $\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}=0$.

1972. $\operatorname{tg}\mu=\frac{r}{r'}$.

1973. $K=\dfrac{r^2+2\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2-r\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\varphi^2}}{\left[r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}$.

1974. $\frac{\partial z}{\partial u}=0$.

1975. $u\frac{\partial z}{\partial u}-z=0$.

1976. $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0$.

1977. $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}$.

1978. $\frac{\partial w}{\partial v}=0$.

1979. $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$.

1980. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}$.

1981. a) $2x-4y-z-5=0$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-5}{-1}$; b) $3x+4y-6z=0$; $\frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{-6}$;

c) $x\cos\alpha+y\sin\alpha-R=0$, $\frac{x-R\cos\alpha}{\cos\alpha}=\frac{y-R\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{z-R}{0}$.

1982. $\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; $\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; $\pm\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

1983. $3x+4y+12z-169=0$.

1985. $x+4y+6z=\pm 21$.

1986. $x\pm y\pm z=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

1987. U tačkama $(1;\ \pm 1;\ 0)$ tangencijalne ravnine su paralelne s ravninom XOZ; u tačkama $(0;\ 0;\ 0)$ i $(2;\ 0;\ 0)$ paralelne su s ravninom YOZ. Nema tačaka plohe u kojima bi tangencijalna ravnina bila paralelna s ravninom XOY.

1991. $\frac{\pi}{3}$.

1994. Projekcija na ravninu XOY jest: $\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2-xy-1=0. \end{cases}$

Projekcija na ravninu YOZ jest: $\begin{cases} x=0 \\ \dfrac{3y^2}{4}+z^2-1=0. \end{cases}$

Projekcija na ravninu XOZ jest: $\begin{cases} y=0 \\ \dfrac{3x^2}{4}+z^2-1=0. \end{cases}$

Uputa. Dodirna krivulja plohe s valjkom, koji projicira tu plohu na neku ravninu, jest geometrijsko mjesto tačaka na plohi u kojima je tangencijalna ravnina te plohe okomita na ravninu projekcije.

1996. $f(x+h,\ y+k)=ax^2+2bxy+cy^2+2(ax+by)h+2(bx+cy)k+ah^2+2bhk+ck^2.$

1997. $f(x,\ y)=1-(x+2)^2+2(x+2)(y-1)+3(y-1)^2.$

1998. $\Delta f(x,\ y)=2h+k+h^2+2hk+h^2k.$

1999. $f(x,\ y,\ z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+2(x-1)(y-1)-(y-1)(z-1).$

2000. $f(x+h,\ y+k,\ z+l)=f(x,\ y,\ z)+2\,[h(x-y-z)+k(y-x-z)+l(z-x-y)]+$
$+f(h,\ k,\ l).$

2001. $y+xy+\dfrac{3x^2y-y^3}{3!}.$ **2002.** $1-\dfrac{x^2+y^2}{2!}+\dfrac{x^4+6x^2y^2+y^4}{4!}.$

2003. $1+(y-1)+(x-1)(y-1).$

2004. $1+[(x-1)+(y+1)]+\dfrac{[(x-1)+(y+1)]^2}{2!}+\dfrac{[(x-1)+(y+1)]^3}{3!}.$

2005. a) $\operatorname{arctg}\dfrac{1+\alpha}{1-\beta}\approx\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\,1(\alpha+\beta)-\dfrac{1}{4}(\alpha^2-\beta^2);$

b) $\sqrt{\dfrac{(1+\alpha)^m+(1+\beta)^n}{2}}\approx 1+\dfrac{1}{2}(m\alpha+n\beta)+\dfrac{1}{32}[(3m^2-4m)\alpha^2-3mn\alpha\beta+(3n^2-4n)\beta^2].$

2006. a) 1,0081; b) 0,902. *Uputa.* Primijenite Taylorovu formulu na funkcije: a) $f(x,\ y)=\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$ u okolini tačke (1; 1); b) $f(x,\ y)=y^x$ u okolini tačke (2; 1).

2007. $z=1+2(x-1)-(y-1)-8(x-1)^2+10(x-1)(y-1)-3(y-1)^2+\dots$

2008. $z_{\min}=0$ za $x=1,\ y=0.$ **2009.** Ekstrema nema.

2010. $z_{\min}=-1$ za $x=1,\ y=0.$ **2011.** $z_{\max}=108$ za $x=3,\ y=2.$

2012. $z_{\min}=-8$ za $x=\sqrt{2},\ y=-\sqrt{2}$ i za $x=-\sqrt{2},\ y=\sqrt{2}.$ Za $x=y=0$ ekstrema nema.

2013. $z_{\max}=\dfrac{ab}{3\sqrt{3}}$ u tačkama $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}},\ y=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$ i $x=-\dfrac{a}{\sqrt{3}},\ y=-\dfrac{b}{\sqrt{3}};$ $z_{\min}=-\dfrac{ab}{3\sqrt{3}}$ u tačkama $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}},\ y=-\dfrac{b}{\sqrt{3}}$ i $x=-\dfrac{a}{\sqrt{3}},\ y=\dfrac{b}{\sqrt{3}}.$

2014. $z_{\max}=1$ za $x=y=0.$

2015. $z_{\min}=0$ za $x=y=0$; nepotpuni maksimum $z=\dfrac{1}{e}$ u tačkama kružnice $x^2+y^2=1.$

2016. $z_{\max}=\sqrt{3}$ za $x=1,\ y=-1.$ **2016.1.** $z_{\min}=6$ za $x=4,\ y=2.$

2016.2. $z_{\max} = 8e^{-2}$ za $x = -4$, $y = -2$; ekstrema nema za $x = 0$, $y = 0$.

2017. $u_{\min} = -\frac{4}{3}$ za $x = -\frac{2}{3}, y = -\frac{1}{3}, z = 1$.

2018. $u_{\min} = 4$ za $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $z = 1$.

2019. Jednadžba definira dvije funkcije od kojih jedna ima maksimum ($z_{\max} = 8$) za $x = 1, y = -2$, a druga minimum ($z_{\min} = -2$) za $x = 1, y = -2$; u tačkama kružnice $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ svaka od ovih funkcija ima granični ekstrem $z = 3$. *Uputa.* Funkcije navedene u rješenju definiraju se eksplicitno jednadžbama $z = 3 \pm \sqrt{25-(x-1)^2-(y+2)^2}$ i postoje, prema tome, samo unutar i na granici kružnice $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$, u čijim tačkama obje funkcije dobivaju vrijednost $z = 3$. Ta vrijednost najmanja je za prvu funkciju i najveća za drugu.

2020. Jedna od funkcija definiranih jednadžbom ima maksimum ($z_{\max} = -2$) za $x = -1$, $y = 2$, a druga minimum ($z_{\min} = 1$) za $x = -1$, $y = 2$; obje funkcije imaju granični ekstrem u tačkama krivulje $4x^3 - 4y^2 - 12x + 16y - 33 = 0$.

2021. $z_{\max} = \frac{1}{4}$ za $x = y = \frac{1}{2}$.

2022. $z_{\max} = 5$ za $x = 1$, $y = 2$; $z_{\min} = -5$ za $x = -1$, $y = -2$.

2023. $z_{\min} = \frac{36}{13}$ za $x = \frac{18}{13}$, $y = \frac{12}{13}$.

2024. $z_{\max} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ za $x = \frac{7\pi}{8} + k\pi$, $y = \frac{9\pi}{8} + k\pi$; $z_{\min} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ za $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$, $y = \frac{5\pi}{8} + k\pi$.

2025. $u_{\min} = -9$ za $x = -1$, $y = 2$, $z = -2$; $u_{\max} = 9$ za $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$.

2026. $u_{\max} = a$ za $x = \pm a$, $y = z = 0$; $u_{\min} = c$ za $x = y = 0$, $z = \pm c$.

2027. $u_{\max} = 2 \cdot 4^2 \cdot 6^3$ za $x = 2$, $y = 4$, $z = 6$.

2028. $u_{\max} = 4^{4}/_{27}$ u tačkama $\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$; $\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{4}{3}\right)$; $\left(\frac{7}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$; $u_{\min} = 4$ u tačkama $(2; 2; 1)$; $(2; 1; 2)$; $(1; 2; 2)$.

2030. a) Najveću vrijednost $z = 3$ za $x = 0$, $y = 1$, b) najveća vrijednost $z = 2$ za $x = 1$, $y = 0$.

2031. a) Najveća vrijednost $z = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ za $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $y = \sqrt{\frac{1}{3}}$; najmanja vrijednost $z = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ za $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $y = -\sqrt{\frac{1}{3}}$; b) najveća vrijednost $z = 1$ za $x = \pm 1$, $y = 0$; najmanja vrijednost $z = -1$ za $x = 0$, $y = \pm 1$.

2032. Najveća vrijednost $z = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ za $x = y = \frac{\pi}{3}$ (unutarnji maksimum); najmanja vrijednost $z = 0$ za $x = y = 0$ (granični minimum).

2033. Najveća vrijednost $z = 13$ za $x = 2$, $y = -1$ (granični maksimum); najmanja vrijednost $z = -1$ za $x = y = 1$ (unutarnji minimum) i za $x = 0$, $y = -1$ (granični minimum).

2034. Kocka.

2035. $\sqrt[3]{2V}$, $\sqrt[3]{2V}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.

2036. Istostranični trokut.

2037. Kocka.

2038. $a = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a}$.

2039. $M\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

2040. Stranice su trokuta: $\frac{3}{4}p$, $\frac{3}{4}p$ i $\frac{p}{2}$.

2041. $x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}$, $y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}$.

2042. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$.

2043. Mjere paralelepipeda su: $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$, $\frac{2c}{\sqrt{3}}$, gdje su a, b i c poluosi elipsoida.

2044. $x=y=2\delta+\sqrt[3]{2V}, z=\frac{x}{2}$.

2045. $x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y=\pm\frac{b}{\sqrt{2}}$.

2046. Velika os $2a=6$, mala os $2b=2$. *Uputa.* Kvadrat udaljenosti tačke (x, y) elipse od njenog središta (ishodišta) jednak je x^2+y^2. Zadatak svodimo na traženje ekstrema funkcije x^2+y^2 uz uvjet $5x^2+8xy+5y^2=9$.

2047. Polumjer baze valjka je: $\frac{R}{2}\sqrt{2+\frac{2}{\sqrt{5}}}$, a visina $R=\sqrt{2-\frac{2}{\sqrt{5}}}$, gdje je R polumjer kugle.

2048. Kanal mora spajati tačku parabole $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ s tačkom pravca $\left(\frac{11}{8}; -\frac{5}{8}\right)$; njegova je duljina $\frac{7\sqrt{2}}{8}$.

2049. $\frac{1}{14}\sqrt{2730}$.

2050. $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v^2}$. *Uputa.* Očigledno je da se tačka M u kojoj zraka prelazi iz jedne sredine u drugu mora nalaziti između A_1 i B_1, pri čemu je $AM=\frac{a}{\cos\alpha}$, $BM=\frac{b}{\cos\beta}$, $A_1M=a\operatorname{tg}\alpha$, $B_1M=b\operatorname{tg}\beta$. Trajanje gibanja zrake jednako je $\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}$. Zadatak svodimo na traženje minimuma funkcije $f(\alpha, \beta)=\frac{a}{v_1\cos\alpha}=\frac{b}{v_2\cos\beta}$ uz uvjet da je $a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta=c$.

2051. $\alpha=\beta$.

2052. $I_1: I_2: I_3=\frac{1}{R_1}:\frac{1}{R_2}:\frac{1}{R_3}$. *Uputa.* Nađite minimum funkcije $f(I_1, I_2, I_3)=I_1^2R_1+I_2^2R_2+I_3^2R_3$ uz uvjet da je $I_1+I_2+I_3=I$.

2053. Izolirana tačka (0; 0).

2054. Šiljak druge vrste (0; 0).

2055. Samododirna tačka (0; 0).

2056. Izolirana tačka (0; 0).

2057. Čvor (0; 0).

2058. Šiljak prve vrste (0; 0).

2059. Čvor (0; 0).

2060. Čvor (0; 0).

2061. Ishodište je izolirana tačka kada je $a>b$, i šiljak prve vrste ako je $a=b$, te čvor ako je $a<b$.

2062. Ako između veličina a, b i c nema međusobno jednakih, onda krivulja nema singularnih tačaka. Ako je $a=b<c$, onda je $A(a, 0)$ izolirana tačka; ako je $a<b=c$, onda je $B(b, 0)$ čvor; ako je $a=b=c$, onda je $A(a, 0)$ šiljak prve vrste.

2063. $y=\pm x$.

2064. $y^2=2px$.

2065. $y=\pm R$.

2066. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$.

2067. $xy=\frac{1}{2}S$.

2068. Par pridruženih istostranih hiperbola kojih jednadžbe, ako osi simetrije elipsa uzmemo za koordinatne osi, imaju oblik $xy = \pm\frac{S}{2\pi}$.

2069. a) Diskriminantna krivulja $y=0$ je geometrijsko mjesto tačaka infleksije i ovojnice zadane porodice; b) diskriminantna krivulja $y=0$ je geometrijsko mjesto šiljaka i ovojnice porodice; c) diskriminantna krivulja $y=0$ je geometrijsko mjesto šiljaka i nije ovojnica; d) diskriminantna krivulja raspada se na pravce: $x=0$ (geometrijsko mjesto čvornih tačaka) i $x=a$ (ovojnica).

2070. $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$. **2071.** $7\frac{1}{3}$. **2072.** $\sqrt{9+4\pi^2}$. **2073.** $\sqrt{3}\,(e^t-1)$.

2074. 42. **2075.** 5. **2076.** x_0+z_0. **2077.** $11+\frac{\ln 10}{9}$.

2079. a) pravac; b) parabola; c) elipsa; d) hiperbola.

2080. 1) $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{a}^\circ$; 2) $a\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$; 3) $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{a}^\circ + a\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}^\circ}{\mathrm{d}t}$. **2081.** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{abc}) = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{bc}\right) + \left(\boldsymbol{a}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{c}\right) + \left(\boldsymbol{ab}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}t}\right)$.

2082. $4t\,(t^2+1)$.

2083. $x=3\cos t$; $y=4\sin t$ (elipsa); $\boldsymbol{v}=4\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{w}=-3\boldsymbol{i}$ za $t=0$; $\boldsymbol{v}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}+2\sqrt{2}\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{w}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}-2\sqrt{2}\boldsymbol{j}$ za $t=\frac{\pi}{4}$; $\boldsymbol{v}=-3\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{w}=-4\boldsymbol{j}$ za $t=\frac{\pi}{2}$.

2084. $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=3t$ (zavojnica); $\boldsymbol{v}=-2\boldsymbol{i}\sin t+2\boldsymbol{j}\cos t+3\boldsymbol{k}$; $v=\sqrt{13}$ za po volji odabrani t; $\boldsymbol{w}=-2\boldsymbol{i}\cos t-2\boldsymbol{j}\sin t$; $w=2$ za po volji odabrani t; $\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{w}=-2\boldsymbol{i}$ za $t=0$; $\boldsymbol{v}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{w}=-2\boldsymbol{j}$ za $t=\frac{\pi}{2}$.

2085. $x=\cos\alpha\cos\omega t$; $y=\sin\alpha\cos\omega t$; $z=\sin\omega t$ (kružnica);
$\boldsymbol{v}=-\omega\boldsymbol{i}\cos\alpha\sin\omega t-\omega\boldsymbol{j}\sin\alpha\sin\omega t+\omega\boldsymbol{k}\cos\omega t$; $v=|\omega|$;
$\boldsymbol{w}=-\omega^2\boldsymbol{i}\cos\alpha\cos\omega t-\omega^2\boldsymbol{j}\sin\alpha\cos\omega t-\omega^2\boldsymbol{k}\sin\omega t$; $w=\omega^2$.

2086. $v=\sqrt{v_{0x}^2+v_{0y}^2+(v_{0z}-gt)^2}$ $w_x=w_y=0$; $w_z=-g$; $w=g$.

2088. $\omega\sqrt{a^2+h^2}$, gdje je $\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ kutna brzina vrtnje vijka.

2089. $\sqrt{a^2\omega^2+v_0^2-2a\omega v_0\sin\omega t}$. **2090.** $\tau=\frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})$; $\boldsymbol{\nu}=-\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{\beta}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k})$.

2091. $\boldsymbol{\tau}=\frac{1}{\sqrt{3}}[(\cos t-\sin t)\boldsymbol{i}+(\sin t+\cos t)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}]$; $\boldsymbol{\nu}=-\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sin t+\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t-\cos t)\boldsymbol{j}]$;
$\cos(\widehat{\boldsymbol{\tau},z})=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\cos(\widehat{\boldsymbol{\nu},z})=0$.

2092. $\boldsymbol{\tau}=\frac{\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}}{\sqrt{21}}$; $\boldsymbol{\nu}=\frac{-4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k}}{\sqrt{105}}$; $\boldsymbol{\beta}=\frac{-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{5}}$.

2093. $\frac{x-a\cos t}{-a\sin t}=\frac{y-a\sin t}{a\cos t}=\frac{z-bt}{b}$ (tangenta); $\frac{x-a\cos t}{b\sin t}=\frac{y-a\sin t}{-b\cos t}=\frac{z-bt}{a}$ (binormala); $\frac{x-a\cos t}{\cos t}=\frac{y-a\sin t}{\sin t}=\frac{z-bt}{0}$ (glavna normala). Kosinusi smjera tangente su: $\cos\alpha=-\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\beta=\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\gamma=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Kosinusi smjera glavne normale jesu: $\cos\alpha_1=\cos t$; $\cos\beta_1=\sin t$; $\cos\gamma_1=0$.

2094. $2x-z=0$ (normalna ravnina); $y-1=0$ (oskulatorna ravnina); $x+2z-5=0$ (ravnina rektifikacije).

2095. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-8}{12}$ (tangenta); $x+4y+12z-114=0$ (normalna ravnina); $12x-6y+$ $+z-8=0$ (oskulatorna ravnina).

2096. $\frac{x-\frac{t^4}{4}}{t^2}=\frac{y-\frac{t^3}{3}}{t}=\frac{z-\frac{t^2}{2}}{1}$ (tangenta); $\frac{x-\frac{t^4}{4}}{t^3+2t}=\frac{y-\frac{t^3}{3}}{1-t^4}=\frac{z-\frac{t^2}{2}}{-2t^3-t}$ (glavna normala); $\frac{x-\frac{t^4}{4}}{1}=\frac{y-\frac{t^3}{3}}{-2t}=\frac{z-\frac{t^2}{2}}{t^2}$ (binormala); $M_1\left(\frac{1}{4};\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$; $M_2\left(4;\ -\frac{8}{3};\ 2\right)$.

2097. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{2}$ (tangenta); $x+y=0$ (oskulatorna ravnina); $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-1}=$ $=\frac{z-2}{-1}$ (glavna normala); $\frac{x-2}{+1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{0}$ (binormala); $\cos\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\gamma_2=0$.

2098. a) $\frac{x-\frac{R}{2}}{2}=\frac{y-\frac{R}{2}}{0}=\frac{z-\frac{\sqrt{2}}{2}R}{-\sqrt{2}}$ (tangenta); $x\sqrt{2}-z=0$ (normalna ravnina);

b) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{4}$ (tangenta); $x+y+4z-10=0$ (normalna ravnina);

c) $\frac{x-2}{2\sqrt{3}}=\frac{y-2\sqrt{3}}{1}=\frac{z-3}{-2\sqrt{3}}$ (tangenta); $2\sqrt{3}\,x+y-2\sqrt{3}\,z=0$ (normalna ravnina).

2099. $x+y=0$. **2100.** $x-y-z\sqrt{2}=0$.

2101. a) $4x-y-z-9=0$; b) $9x-6y+2z-18=0$; c) $b^2x_0^3x-a^2y_0^3y+(a^2-b^2)\,z_0^3z=a^2b^2\,(a^2-b^2)$.

2102. $6x-8y-z+3=0$ (oskulatorna ravnina); $\frac{x-1}{31}=\frac{y-1}{26}=\frac{z-1}{-22}$ (glavna normala); $\frac{x-1}{-6}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-1}{1}$ (binormala).

2103. $bx-z=0$ (oskulatorna ravnina); $\left.\begin{matrix}x=0\\ z=0\end{matrix}\right\}$ (glavna normala); $\left.\begin{matrix}x+bz=0\\ y=0\end{matrix}\right\}$ (binormala); $\boldsymbol{\tau}=\frac{\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{k}}{\sqrt{1+b^2}}$; $\boldsymbol{\beta}=\frac{-b\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{1+b^2}}$; $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{j}$.

2106. $2x+3y+19z-27=0$. **2107.** a) $\sqrt{2}$; b) $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

2108. a) $K=\frac{e^{-t}\sqrt{2}}{3}$; $T=\frac{e^{-t}}{3}$; b) $K=T=\frac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2\,t}$.

2109. a) $R=\rho=\dfrac{(y+a)^2}{a}$; b) $R=\rho=\dfrac{(p^4+2x^4)^3}{8p^4x^3}$. **2111.** $\dfrac{av^2}{a^2+b^2}$.

2112. $K=2,\ w_\tau=0,\ w_n=2$ za $t=0$; $K=\dfrac{1}{7}\sqrt{\dfrac{19}{14}},\ w_\tau=\dfrac{22}{\sqrt{14}},\ w_n=2\sqrt{\dfrac{19}{14}}$ za $t=1$.

GLAVA VII

2113. $4\dfrac{2}{3}$. **2114.** $\ln\dfrac{25}{24}$. **2115.** $\dfrac{\pi}{12}$. **2116.** $\dfrac{9}{4}$.

2117. 50,4. **2118.** $\dfrac{\pi a^2}{2}$. **2119.** 2,4. **2120.** $\dfrac{\pi}{6}$.

2121. $x=\dfrac{y^2}{4}-1;\ x=2-y;\ y=-6;\ y=2$. **2122.** $y=x^2;\ y=x+9;\ x=1;\ x=3$.

2123. $y=x;\ y=10-x;\ y=0;\ y=4$. **2124.** $y=\dfrac{x}{3};\ y=2x;\ x=1;\ x=3$.

2125. $y=0;\ y=\sqrt{25-x^2};\ x=0;\ x=3$. **2126.** $y=x^2;\ y=x+2;\ x=-1;\ x=2$.

2127. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^2 f(x,\ y)\,dx=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^1 f(x,\ y)\,dy$. **2128.** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^1 f(x,\ y)\,dx=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,\ y)\,dy$.

2129. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{2-y} f(x,\ y)\,dx=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 f(x,\ y)\,dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2-x} f(x,\ y)\,dy$.

2130. $\int\limits_1^2 dx\int\limits_{2x}^{2x+3} f(x,\ y)\,dy=\int\limits_2^4 dy\int\limits_1^{y/2} f(x,\ y)\,dx+\int\limits_4^5 dy\int\limits_1^2 f(x,\ y)\,dx+\int\limits_5^7 dy\int\limits_{\frac{y-3}{2}}^2 f(x,\ y)\,dx$.

2131. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-y}^{y} f(x,\ y)\,dx+\int\limits_1^{\sqrt{2}} dy\int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,\ y)\,dx=\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,\ y)\,dy+$

$+\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,\ y)\,dy$.

2132. $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{2x^2}^2 f(x,\ y)\,dy=\int\limits_0^2 dy\int\limits_{-\sqrt{y/2}}^{\sqrt{y/2}} f(x,\ y)\,dx$.

2133. $\int\limits_{-2}^{-1} dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,\ y)\,dy+\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,\ y)\,dy+\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,\ y)\,dy+$

$+\int\limits_1^2 dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,\ y)\,dy=\int\limits_{-2}^{-1} dy\int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,\ y)\,dx+\int\limits_{-1}^1 dy\int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx+$

$+\int\limits_{-1}^1 dy\int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,\ y)\,dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,\ y)\,dx$.

2134. $$\int_{-3}^{-2} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\, dy + \int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y)\, dy + \int_{2}^{3} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\, dy =$$
$$= \int_{-\sqrt{5}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)\, dx + \int_{-\sqrt{5}}^{-1} dy \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\, dx +$$
$$+ \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y)\, dx + \int_{1}^{\sqrt{5}} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x, y)\, dx + \int_{1}^{\sqrt{5}} dy \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y)\, dx.$$

2135. a) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y)\, dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y)\, dx$; b) $\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dy =$
$= \int_{-a}^{a} dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx$; c) $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y)\, dy =$
$= \int_{-1/2}^{1/2} dy \int_{\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2}} f(x, y)\, dx$; d) $\int_{-1}^{1} dx \int_x^1 f(x, y)\, dy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{y} f(x, y)\, dx$;

e) $\int_0^a dy \int_y^{y+2a} f(x, y)\, dx = \int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy + \int_0^{2a} dx \int_0^a f(x, y)\, dy + \int_{2a}^{3a} dx \int_{x-2a}^{a} f(x, y)\, dy$.

2136. $\int_0^{48} dy \int_{y/12}^{\sqrt{y/3}} f(x, y)\, dx.$

2137. $\int_0^2 dy \int_{y/3}^{y/2} f(x, y)\, dx + \int_2^3 dy \int_{y/3}^{1} f(x, y)\, dx.$

2138. $\int_0^{a/2} dy \int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx + \int_{a/2}^{a} dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx.$

2139. $\int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} dy \int_{a/2}^{a} f(x, y)\, dx + \int_{\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{a} dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a} f(x, y)\, dx.$

2140. $\int_0^a dy \int_{y^2/4a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx + \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y)\, dx + \int_a^{2a} dy \int_{y^2/4a}^{2a} f(x, y)\, dx.$

2141. $\int_{-1}^{0} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y)\, dy.$

2142. $\int_0^{1/2} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f(x, y)\, dy + \int_{1/2}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 f(x, y)\, dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x, y)\, dy.$

2143. $\int_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x, y)\, dx.$

2144. $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x, y)\, dx.$

2145. $\frac{1}{6}$.

2146. $\frac{1}{3}$.

2147. $\frac{\pi}{2} a$.

2148. $\frac{\pi}{6}$.

2149. $6.$ **2150.** $\frac{1}{2}.$ **2151.** $\ln 2.$

2152. a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{15\pi-16}{150}$; c) $2\frac{2}{5}.$ **2153.** $\frac{8\sqrt{2}}{21}p^5.$

2154. $\int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} xy\, dy = \frac{4}{3}.$ **2155.** $\frac{8}{3}a\sqrt{2a}.$

2156. $\frac{5}{2}\pi R^3.$ *Uputa.* $\iint\limits_{(S)} y\, dx\, dy = \int\limits_0^{2\pi R} dx \int\limits_0^{y=f(x)} y\, dy = \int\limits_0^{2\pi} R(1-\cos t)\, dt \int\limits_0^{R(1-\cos t)} y\, dy$ gdje posljednji integral dobijemo iz predašnjeg supstitucijom $x = R(t-\sin t)$.

2157. $\frac{R^4}{80}.$ **2158.** $\frac{1}{6}.$ **2159.** $a^2 + \frac{R^2}{2}.$

2160. $\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{1/\cos\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{1/\sin\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr.$

2161. $\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{2/\cos\varphi} rf(r\ )\, dr.$ **2162.** $\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{1/\sin\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr.$

2163. $\int\limits_0^{\pi/4} f(\operatorname{tg}\varphi)\, d\varphi \int\limits_0^{\sin\varphi/\cos^2\psi} r\, dr + \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} f(\operatorname{tg}\varphi)\, d\varphi \int\limits_0^{1/\sin\varphi} r\, dr + \int\limits_{3\pi/4}^{\pi} f(\operatorname{tg}\varphi)\, d\varphi \int\limits_0^{\sin\varphi/\cos^2\varphi} r\, dr.$

2164. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr + \int\limits_{3\pi/4}^{5\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr.$

2165. $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} r^2\sin\varphi\, dr = \frac{a^3}{12}.$ **2166.** $\frac{3}{2}\pi a^4.$

2167. $\frac{\pi a^3}{3}.$ **2168.** $\left(\frac{22}{9} + \frac{\pi}{2}\right)a^3.$

2169. $\frac{\pi a^3}{6}.$ **2170.** $\left(\frac{\pi}{3} - \frac{16\sqrt{2}-20}{9}\right)\frac{a^3}{2}.$

2171. $\frac{2}{3}\pi ab.$ *Uputa.* Jacobijeva determinanta je $I = abr$. Granice integriranja jesu: $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant 1$.

2172. $\int\limits_{\alpha/(1+\alpha)}^{\beta/(1+\beta)} dv \int\limits_0^{c/(1-v)} f(u-uv, uv)\, u\, du.$ *Rješenje.* Imamo da je $x = u(1-v)$ i $y = uv$; Jacobijeva determinanta je $I = u$. Odredimo granice za u kao funkcije od v: $u(1-v) = 0$ za $x = 0$, odakle je $u = 0$ (jer je $1-v \neq 0$); $u = \frac{c}{1-v}$ za $x = c$. Granice mijenjanja od v: budući da je $y = \alpha x$, to je $uv = \alpha u(1-v)$, odakle je $v = \frac{\alpha}{1+\alpha}$; za $y = \beta x$ nalazimo da je $v = \frac{\beta}{1+\beta}$.

2173. $$I = \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^1 du \int\limits_{-u}^{u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv + \int\limits_1^2 du \int\limits_{u-2}^{2-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int\limits_{-1}^{0} dv \int\limits_{-v}^{2+v} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) du + \int\limits_0^1 dv \int\limits_v^{2-v} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) du\right].$$

Uputa. Nakon zamjene varijable jednadžbe stranica kvadrata će biti: $u=v$; $u+v=2$; $u-v=2$; $u=-v$.

2174. $ab\left[\left(\frac{a^2}{h^2}-\frac{b^2}{k^2}\right)\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}+\frac{ab}{hk}\right]$. *Rješenje.* Jednadžba krivulje je $r^4=r^2\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi-\frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi\right)$, odakle je donja granica za r jednaka 0, a gornja granica $r=\sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi-\frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi}$). Budući da r mora biti realan, izlazi da je $\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi-\frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi\geqslant 0$; odatle je za prvi kvadrant $\operatorname{tg}\varphi\leqslant\frac{ak}{bh}$. Zbog simetričnosti područja integriranja s obzirom na osi možemo izračunati $\frac{1}{4}$ cijelog integrala ograđenog prvim kvadrantom:

$$\iint\limits_{(S)} dx\,dy = 4\int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi-\frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi}} abr\,dr.$$

2175. a) $4\frac{1}{2}$; $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_{y-2}^{\sqrt{y}} dx$; b) $\frac{\pi a^2}{4}-\frac{a^2}{2}$; $\int\limits_0^a dx\int\limits_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy$.

2176. a) $\frac{9}{2}$; b) $\left(2+\frac{\pi}{4}\right)a^2$. **2177.** $\frac{7a^2}{120}$. **2178.** $\frac{10}{3}a^2$.

2179. π. *Uputa.* $-1\leqslant x\leqslant 1$. **2180.** $\frac{16}{3}\sqrt{15}$. **2181.** $3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$.

2182. $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$. **2183.** $\frac{5}{4}\pi a^2$. **2184.** 6.

2185. 10π. *Uputa.* Provedite zamjenu varijabli $x-2y=u$, $3x+4y=v$.

2186. $\frac{1}{3}(b-a)(\beta-\alpha)$. **2187.** $\frac{1}{3}(\beta-\alpha)\ln\frac{b}{a}$.

2188. $v=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^1(1-x)\,dx=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x(1-x)\,dy$. **2193.** $\frac{\pi a^3}{6}$.

2194. $\frac{3}{4}$. **2195.** $\frac{1}{6}$. **2196.** $\frac{a^3}{3}$. **2197.** $\frac{\pi r^4}{4a}$.

2198. $\frac{48\sqrt{6}}{5}$. **2199.** $\frac{88}{105}$. **2200.** $\frac{a^3}{18}$. **2201.** $\frac{abc}{3}$.

2202. $\pi a^3(\alpha-\beta)$. **2203.** $\frac{4}{3}\pi a^3(2\sqrt{2}-1)$. **2204.** $\frac{4}{3}\pi a^3(\sqrt{2}-1)$.

2205. $\frac{\pi a^3}{3}$. **2206.** $\frac{4}{3}\pi abc$. **2207.** $\frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3}-5)$. **2208.** $\frac{32}{9}a^3$.

2209. $\pi a(1-e^{-R^2})$. **2210.** $\frac{3\pi ab}{2}$. **2211.** $\frac{3\sqrt{3}-2.}{2}$.

2212. $\frac{\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}-1)$. *Uputa.* Provedite zamjenu varijabli $xy=u$, $\frac{y}{x}=v$.

2213. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$. **2214.** $4\,(m-n)\,R^2$.

2215. $\frac{\sqrt{2}}{2}\,a^2$. *Uputa.* Integrirajte u ravnini YOZ. **2216.** $4a^2$.

2217. $8a^2 \arcsin \frac{b}{a}$. **2218.** $\frac{1}{3}\,\pi a^2\,(3\sqrt{3}-1)$. **2219.** $8a^2$.

2220. $3\pi a^2$. *Uputa.* Prijeđite na polarne koordinate.

2220.1. *Uputa.* Projicirajte površinu na koordinatnu ravninu XOY.

2220.2. $a^2\sqrt{2}$.

2221. $\sigma=\frac{2}{3}\,\pi a^2\left[\left(1+\frac{R^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$. *Uputa.* Prijeđite na polarne koordinate.

2222. $\frac{16}{9}\,a^3$ i $8a^2$. *Uputa.* Prijeđite na polarne koordinate.

2223. $8a^2 \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{5}$. *Uputa.* $\sigma=\int\limits_0^{\frac{a}{2}} dx \int\limits_0^{\frac{a}{2}} \frac{a\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = 8a\int\limits_0^{\frac{a}{2}} \arcsin\frac{a}{2\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$. Parcijalno integrirajte, a zatim provedite supstituciju $x=\frac{a\sqrt{3}}{2}\sin t$; rješenje transformirati.

2224. $\frac{\pi}{4}\left(b\sqrt{b^2+c^2}-a\sqrt{a^2+c^2}+c^2\ln\frac{b+\sqrt{b^2+c^2}}{a+\sqrt{a^2+c^2}}\right)$. *Uputa.* Prijeđite na polarne koordinate.

2225. $\frac{2\pi\delta R^2}{3}$. **2226.** $\frac{a^3\,b}{12}$; $\frac{a^2\,b^2}{24}$.

2227. $\overline{x}=\frac{12-\pi^2}{3\,(4-\pi)}$; $\overline{y}=\frac{\pi}{6\,(4-\pi)}$. **2228.** $\overline{x}=\frac{5}{6}\,a$; $\overline{y}=0$.

2229. $\overline{x}=\frac{2a\sin\alpha}{3\alpha}$; $\overline{y}=0$. **2230.** $\overline{x}=\frac{2}{5}$; $\overline{y}=0$.

2231. $I_X=4$.

2232. a) $I_0=\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)$; b) $I_X=\frac{\pi}{64}\,(D^2-d^4)$. **2233.** $I=\frac{2}{3}\,a^4$.

2234. $\frac{8}{5}\,a^4$. *Uputa.* $I=\int\limits_0^a dx\int\limits_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}}(y+a)^2\,dy$.

2235. $16\ln 2-9\frac{3}{8}$. *Uputa.* Udaljenost tačke (x,y) od pravca $x=y$ iznosi $d=\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$, a dobivamo je pomoću normalne jednadžbe pravca.

2236. $I=\frac{1}{40}\,ka^5\,[7\sqrt{2}+3\ln(\sqrt{2}+1)]$, gdje je k koeficijent proporcionalnosti. *Uputa.* Postavivši ishodište koordinatnog sistema u onaj vrh, udaljenost kojega je proporcionalna gustoći pločice, usmjerimo koordinatne osi po stranicama kvadrata. Moment tromosti određujemo prema osi OX. Prijeđemo li na polarne koordinate, imamo:

$$I_x=\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{a\sec\varphi} kr\,(r\sin\varphi)^2\,r\,dr+\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^{a\operatorname{cosec}\varphi} kr\,(r\sin\varphi)^2\,r\,dr.$$

2237. $I_0 = \frac{35}{16}\pi a^4$.

2238. $I_0 = \frac{\pi a^4}{2}$.

2239. $\frac{35}{12}\pi a^4$. *Uputa.* Uzmite za varijable integriranja t i y (vidjeti zadatak 2156).

2240. $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{1-x} \mathrm{d}y \int\limits_0^{1-x-y} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z$.

2241. $\int\limits_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}y \int\limits_0^H f(x, y, z)\,\mathrm{d}z$.

2242. $\int\limits_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \mathrm{d}y \int\limits_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z$.

2243. $\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{1-x^2-y^2} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z$.

2244. $\frac{8}{15}(31 + 12\sqrt{2} - 27\sqrt{3})$.

2245. $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}$.

2246. $\frac{\pi^2 a^2}{8}$.

2247. $\frac{1}{720}$.

2248. $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$.

2249. $\frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6}\right)$.

2250. $\frac{59}{480}\pi R^5$.

2251. $\frac{\pi abc^2}{4}$.

2252. $\frac{4}{5}\pi abc$.

2253. $\frac{\pi h^2 R^2}{4}$.

2254. πR^3.

2255. $\frac{8}{9}a^2$.

2256. $\frac{8}{3}r^3\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$.

2257. $\frac{4}{15}\pi R^5$.

2258. $\frac{\pi}{10}$.

2259. $\frac{32}{9}a^2 h$.

2260. $\frac{3}{4}\pi a^3$. *Rješenje.* $v = 2\int\limits_0^{2a} \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\frac{x^2+y^2}{2a}} \mathrm{d}z = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} r\,\mathrm{d}r \int\limits_0^{\frac{r^2}{2a}} dh =$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \frac{r^3\,\mathrm{d}r}{2a} = \frac{1}{a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2a\cos\varphi)^4}{4}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{4}\pi a^3.$$

2261. $\frac{2\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. *Uputa.* Prijeđite na sferne koordinate.

2262. $\frac{19}{6}\pi$. *Uputa.* Prijeđite na cilindričke koordinate.

2263. $\frac{a^3}{9}(3\pi - 4)$.

2264. πabc.

2264.1. $\frac{\pi^2 abc}{4\sqrt{2}}$.

2264.2. $\frac{4\pi}{3}(\sqrt{2} - 1)abc$.

2265. $\frac{abc}{2}(a + b + c)$.

2266. $\frac{ab}{24}(6c^2 - a^2 - b^2)$.

2267. $\bar{x} = 0$; $\bar{y} = 0$; $\bar{z} = \frac{2}{5}a$. *Uputa.* Uvedite sferne koordinate.

2268. $\bar{x} = \frac{4}{3}$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 0$.

2269. $\frac{\pi a^2 h}{12}(3a^2+4h^2)$. *Uputa.* Os valjka uzimamo za os OZ, a bazu valjka za ravninu XOY. Moment tromosti izračunamo s obzirom na os OX. Nakon prelaska na cilindričke koordinate kvadrat udaljenosti elementa $r\,d\varphi\,dr\,dz$ od osi OX jednak je $r^2\sin^2\varphi+z^2$.

2270. $\frac{\pi\rho h a^2}{60}(2h^2+3a^2)$. *Uputa.* Bazu stošca uzmite za ravninu XOY, os stošca za os OZ. Moment tromosti izračunajte s obzirom na os OX. Prijelazom na cilindričke koordinate, za tačke plohe stošca imamo: $r=\frac{a}{h}(h-z)$, pri čemu je kvadrat udaljenosti elementa $r\,d\varphi\,dr\,dz$ od osi OX jednak $r^2\sin^2\varphi+z^2$.

2271. $2\pi k\rho h(1-\cos\alpha)$, gdje je k koeficijent proporcionalnosti, a ρ gustoća. *Rješenje.* Vrh stošca uzmite za ishodište koordinatnog sistema, a njegovu os za os OZ. Ako uvedete sferne koordinate, onda je jednadžba plašta stošca $\psi=\frac{\pi}{2}-\alpha$, a jednadžba baze $r=\frac{h}{\sin\psi}$. Iz simetrije slijedi da ukupno naprezanje djeluje u smjeru osi OZ. Mase je elementa volumena $dm=$ $=\rho r^2\cos\psi\,d\varphi\,d\psi\,dr$, gdje je ρ gustoća. Komponenta u smjeru osi OZ sile kojom taj element privlači jedinicu mase u tački O, jest $\frac{k\,dm}{r^2}\sin\psi=k\rho\sin\psi\cos\psi\,d\psi\,d\varphi\,dr$. Ukupno privlačenje je $\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}d\psi\int\limits_0^{h\operatorname{cosec}\psi}k\rho\sin\psi\cos\psi\,dr$.

2272. *Rješenje.* Uvedite cilindričke koordinate (ρ,φ,z) s ishodištem u središtu kugle i osi OZ koja prolazi materijalom tačkom, za koju pretpostavljamo da ima masu m. Udaljenost te tačke od središta kugle označimo sa ξ. Neka je $r=\sqrt{\rho^2+(\xi-z)^2}$ udaljenost elementarnog volumena dv od mase m. Privlačna sila elementarnog volumena dv kugle i materijalne tačke m usmjerena je duž r a numerički je jednaka $-k\gamma m\frac{dv}{r^2}$, gdje je $\gamma=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ gustoća kugle a $dv=\rho\,d\varphi\,d\rho\,dz$ elementarni volumen. Projekcija te sile na os OZ je:

$$dF=-\frac{km\gamma\,dv}{r^2}\cos\widehat{(rz)}=-km\gamma\frac{\xi-z}{r^3}\rho\,d\varphi\,d\rho\,dz.$$

Odatle je $F=-km\gamma\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-R}^{R}(\xi-z)\,dz\int\limits_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{\rho\,d\rho}{r^3}=km\gamma\frac{4}{3}\pi R^3\frac{1}{\xi^2}$, no budući da je $\frac{4}{3}\gamma\pi R^3=M$, to je $F=\frac{kMm}{\xi^2}$.

2273. $-\int\limits_x^{\infty}y^2e^{-xy^2}\,dy-e^{-x^3}$.

2275. a) $\frac{1}{p}$ $(p>0)$; b) $\frac{1}{p-\alpha}$ za $p>\alpha$; c) $\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$ $(p>0)$; d) $\frac{p}{p^2+\beta^2}$ $(p>0)$.

2276. $-\frac{1}{n^2}$.

2277. $\frac{2}{p^3}$. *Uputa.* Derivirajte dva puta $\int\limits_0^{\infty}e^{-pt}\,dt=\frac{1}{p}$.

2278. $\ln\frac{\beta}{\alpha}$.

2279. $\operatorname{arctg}\frac{\beta}{m}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m}$.

2280. $\frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$.

2281. $\pi(\sqrt{1-\alpha^2}-1)$.

2282. $\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$.

2283. 1.

2284. $\frac{1}{2}$.

2285. $\frac{\pi}{4}$.

2286. $\frac{\pi}{4a^2}$. *Uputa.* Pređite na polarne koordinate.

2287. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **2288.** $\frac{\pi^2}{8}$

2289. Konvergira. *Rješenje.* Izdvojimo iz S ishodište koordinatnog sistema zajedno s njegovom ε – okolinom, tj. razmotrimo $I_\varepsilon = \iint\limits_{(S)} \ln \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$, gdje je izdvojeno područje krug polumjera ε sa središtem u ishodištu koordinatnog sistema. Prešavši na polarne koordinate imamo $I_\varepsilon = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_\varepsilon^1 r \ln r\, dr = \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \ln r \Big|_\varepsilon^1 - \frac{1}{2} \int\limits_\varepsilon^1 r\, dr \right] d\varphi = 2\pi \left(\frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\varepsilon^2}{2} \ln \varepsilon - \frac{1}{4} \right)$. Odatle je $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = -\frac{\pi}{2}$.

2290. Konvergira za $\alpha > 1$.

2291. Konvergira. *Uputa.* Opkolimo pravac $y = x$ uskom prugom i stavimo $\iint\limits_{(S)} \frac{dx\, dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}} =$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x-\varepsilon} \frac{dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}} + \lim_{\delta \to 0} \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x+\delta}^1 \frac{dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}.$$

2292. Konvergira za $\alpha > \frac{3}{2}$.

2293. 0. **2294.** $\ln \frac{\sqrt{5}+3}{2}$. **2295.** $\frac{ab\,(a^2+ab+b^2)}{3\,(a+b)}$. **2296.** $\frac{256}{15}a^3$.

2297. $\frac{a^2}{3}\left[(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$. **2298.** $\frac{a^5\sqrt{1+m^2}}{5m}$ **2299.** $a^2\sqrt{2}$.

2300. $\frac{1}{54}(56\sqrt{7}-1)$. **2301.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \operatorname{arctg} \frac{2\pi b}{a}$. **2302.** $2\pi a^2$.

2303. $\frac{16}{27}(10\sqrt{10}-1)$. *Uputa.* $\int\limits_C f(x, y)\, ds$ možemo geometrijski interpretirati kao površinu valjkaste plohe s izvodnicom koja je paralelna s osi OZ, bazom kao konturom integriranja i visinama koje su jednake vrijednostima podintegralne funkcije. Prema tome je $S = \int\limits_C x\, ds$, gdje je C – luk OA parabole $y = \frac{3}{8}x^2$, koji spaja tačke $(0; 0)$ i $(4; 6)$.

2304. $a\sqrt{3}$. **2305.** $2\left(b^2 + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \right)$.

2306. $\sqrt{a^2+b^2}\left(\pi \sqrt{a^2+4\pi b^2} + \frac{a^2}{2b} \ln \frac{2\pi b + \sqrt{a^2+4\pi^2 b^2}}{a} \right)$. **2307.** $\left(\frac{4}{3}a, \frac{4}{3}a \right)$.

2308. $2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}$. **2309.** $\frac{kMmb}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}}$. **2310.** $40\frac{19}{30}$. **2311.** $-2\pi a^2$.

2312. a) $\frac{4}{3}$; b) 0; c) $\frac{12}{5}$; d) -4; e) 4. **2313.** Za sve slučajeve 4.

2314. -2π. *Uputa.* Upotrijebite parametarske jednadžbe kružnice. **2315.** $\frac{4}{3}ab^2$.

2316. $-2\sin 2$. **2317.** 0.

2318. a) 8; b) 12; c) 2; d) $\frac{3}{2}$; e) $\ln(x+y)$; f) $\int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx + \int\limits_{y_1}^{y_2} \psi(y)\,dy$.

2319. a) 62; b) 1; c) $\frac{1}{4} + \ln 2$; d) $1+\sqrt{2}$. **2320.** $\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+b^2}$.

2322. a) $x^2+3xy-2y^2+C$; b) $x^3-x^2y+xy^2-y^3+C$; c) $e^{x-y}(x+y)+C$; d) $\ln|x+y|+C$.

2323. $-2\pi\alpha(a+b)$. **2324.** $-\pi R^2 \cos^2 \alpha$. **2325.** $\left(\frac{1}{6}+\frac{\pi\sqrt{2}}{16}\right)R^3$; $+$ za $R>0$ i $-$ za $R<0$.

2326. a) -2; b) $abc-1$; c) $5\sqrt{2}$; d) 0. **2327.** $I = \iint\limits_{(S)} y^2\,dx\,dy$.

2328. $-\frac{4}{3}$. **2329.** $\frac{\pi R^4}{2}$. **2330.** $-\frac{1}{3}$. **2331.** 0.

2332. a) 0; b) $2n\pi$. *Uputa.* Za slučaj b) Greenova se formula primjenjuje u području omeđenom konturom C i krugom dovoljno malog polumjera sa središtem u ishodištu koordinatnog sistema.

2333. *Rješenje.* Smatramo li da se smjer tangente poklapa sa smjerom pozitivnog obilaska konture, tada je $\cos(X, n) = \cos(Y, t) = \frac{dy}{ds}$, pa je prema tome $\oint\limits_C \cos(X, n)\,ds = \oint\limits_C \frac{dy}{ds}\,ds = \oint\limits_C dy = 0$.

2334. $2S$, gdje je S površina, omeđena konturom C.

2335. -4. *Uputa.* Ne možemo primijeniti Greenovu formulu. Dani integral je *nepravi*, zato što u tačkama presjeka konture s pravcem $x+y=0$ podintegralni izraz ima oblik $\frac{0}{0}$.

2336. πab. **2337.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **2338.** $6\pi a^2$.

2339. $\frac{3}{2}a^2$. *Uputa.* Stavite $y = tx$, gdje je t parametar. **2340.** $\frac{a^2}{60}$.

2341. $\pi(R+r)(R+2r)$; $6\pi R^2$ za $R=r$. *Uputa.* Jednadžba epicikloide ima oblik $x = (R+r)\cos t - r\cos\frac{R+r}{r}t$, $y = (R+r)\sin t - r\sin\frac{R+r}{r}t$ gdje je t kut zakreta polumjera nepomičnog kruga u tački tangiranja.

2342. $\pi(R-r)(R-2r)$; $\frac{3}{8}\pi R^2$ za $r = \frac{R}{4}$. *Uputa.* Jednadžba hipocikloide dobije se iz jednadžbe odgovarajuće epicikloide (vidjeti zadatak 2341) i to zamjenom r sa $-r$.

2343. FR. **2344.** $mg(z_1-z_2)$.

2345. $\frac{k}{2}(a^2-b^2)$, gdje je k koeficijent proporcionalnosti.

2346. a) Potencijal $U = -mgz$, rad je $mg(z_1-z_2)$; b) potencijal $U = \frac{\mu}{r}$, rad $-\frac{\mu}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; c) potencijal $U = -\frac{k^2}{2}(x^2+y^2+z^2)$, rad $\frac{k^2}{2}(R^2-r^2)$.

2347. $\frac{8}{3}\pi a^4$. **2348.** $\frac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}$. **2349.** 0. **2350.** $\frac{4}{3}\pi abc$.

2351. $\frac{\pi a^4}{2}$. **2352.** $\frac{3}{4}$. **2353.** $\frac{25\sqrt{5}+1}{10(5\sqrt{5}-1)}a$. **2354.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}h^4$.

2355. a) 0; b) $-\iint\limits_{(S)} (\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$.

2356. 0. **2357.** 4π. **2358.** $-\pi a^2$. **2359.** $-a^3$.

2360. $\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. **2361.** 0.

2362. $2\iint\limits_{(V)} (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. **2363.** $2\iiint\limits_{(V)} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

2364. $\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. **2365.** $3a^4$. **2366.** $\frac{a^3}{2}$.

2367. $\frac{12}{5}\pi a^5$. **2368.** $\frac{\pi a^2 b^2}{2}$. **2371.** Kugle; valjci. **2372.** Stošci.

2373. Kružnice $x^2+y^2=c_1^2$, $z=c_2$.

2376. $\operatorname{grad} U(A)=9\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$; $|\operatorname{grad} U(A)=\sqrt{99}=3\sqrt{11}$; $z^2=xy$; $x=y=z$.

2377. a) $\frac{\boldsymbol{r}}{r}$; b) $2\boldsymbol{r}$; c) $-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$; d) $f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$.

2378. $\operatorname{grad}(\boldsymbol{c}\boldsymbol{r})=\boldsymbol{c}$; nivo-plohe su ravnine okomite na vektor $\boldsymbol{c}$.

2379. $\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{2U}{r}$, $\frac{\partial U}{\partial r}=|\operatorname{grad} U|$ za $a=b=c$. **2380.** $\frac{\partial U}{\partial l}=-\frac{\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{r})}{r^2}$; $\frac{\partial U}{\partial l}=0$ za $\boldsymbol{l}\perp\boldsymbol{r}$.

2382. $\frac{2}{r}$. **2383.** $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{2}{r}f(r)+f'(r)$.

2385. a) $\operatorname{div}\boldsymbol{r}=3$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{r}=0$; b) $\operatorname{div}(r\boldsymbol{c})=\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{c}}{r}$, $\operatorname{rot}(r\boldsymbol{c})=\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c}}{r}$; c) $\operatorname{div}(f(r)\boldsymbol{c})=\frac{f'(r)}{r}(\boldsymbol{c}\boldsymbol{r})$,
$\operatorname{rot}(f(r)\boldsymbol{c})=\frac{f'(r)}{r}[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c}]$. **2386.** $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$; $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{\omega}$, gdje je $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$.

2387. $2\,\omega\boldsymbol{n}^0$, gdje je $\boldsymbol{n}^0$ jedinični vektor koji je paralelan s osi vrtnje.

2388. $\operatorname{div}\operatorname{grad} U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$; $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U=0$. **2391.** $3\pi R^2 H$.

2392. a) $\frac{1}{10}\pi R^2 H\,(3R^2+2H^2)$; b) $\frac{3}{10}\pi R^2 H(R^2+2H^2)$.

2393. $\operatorname{div}\boldsymbol{F}=0$ u svim tačkama osim ishodišta koordinatnog sistema. Tok je jednak $4\,\pi m$. *Uputa.* Pri izračunavanju toka koristite se teoremom Ostrogradskog-Gaussa.

2394. $2\pi^2 h^2$. **2395.** $\frac{-\pi R^6}{8}$. **2396.** $U=\int\limits_{r_0}^{r} rf(r)\,\mathrm{d}r$. **2397.** $\frac{m}{r}$.

2398. a) Nema; b) $U=xyz+C$; c) $U=xy+xz+yz+C$. **2400.** Da.

GLAVA VIII

2401. $\frac{1}{2n-1}$. **2402.** $\frac{1}{2n}$. **2403.** $\frac{n}{2^{n-1}}$ **2404.** $\frac{1}{n^2}$.

2405. $\frac{n+2}{(n+1)^2}$. **2406.** $\frac{2n}{3n+2}$. **2407.** $\frac{1}{n(n+1)}$. **2408.** $\frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{1\cdot 4\cdot 7 \ldots (3n-2)}$.

2409. $(-1)^{n+1}$. **2410.** $n^{(n-1)^{n+1}}$. **2416.** Divergira. **2417.** Konvergira.

2418. Divergira. **2419.** Divergira. **2420.** Divergira. **2421.** Divergira.

2422. Divergira. **2423.** Divergira. **2424.** Divergira. **2425.** Konvergira.

2426. Konvergira. **2427.** Konvergira. **2428.** Konvergira. **2429.** Konvergira.

2430. Konvergira. **2431.** Konvergira. **2432.** Konvergira. **2433.** Konvergira.

2434. Divergira. **2435.** Divergira. **2436.** Konvergira. **2437.** Divergira.

2438. Konvergira. **2439.** Konvergira. **2440.** Konvergira. **2441.** Divergira.

2442. Konvergira. **2443.** Konvergira. **2444.** Konvergira. **2445.** Konvergira.

2446. Konvergira. **2447.** Konvergira. **2448.** Konvergira. **2449.** Konvergira.

2450. Divergira. **2451.** Konvergira. **2452.** Divergira. **2453.** Konvergira.

2454. Divergira. **2455.** Divergira. **2456.** Konvergira. **2457.** Divergira.

2458. Konvergira. **2459.** Divergira. **2460.** Konvergira. **2461.** Divergira.

2462. Konvergira. **2463.** Divergira. **2464.** Konvergira. **2465.** Konvergira.

2466. Konvergira. **2467.** Divergira. **2468.** Divergira. *Uputa.* $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$.

2470. Uvjetno konvergira. **2471.** Uvjetno konvergira.

2472. Apsolutno konvergira. **2473.** Divergira.

2474. Uvjetno konvergira. **2475.** Apsolutno konvergira.

2476. Uvjetno konvergira. **2477.** Apsolutno konvergira.

2478. Apsolutno konvergira. **2479.** Divergira.

2480. Apsolutno konvergira. **2481.** Uvjetno konvergira.

2482. Apsolutno konvergira. **2484.** a) Divergira; b) apsolutno konvergira; c) divergira; d) uvjetno konvergira. *Uputa.* U primjerima a) i d) razmotrite red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_{2k-1}+a_{2k})$, a u primjerima b) i c) istražite odvojeno redove $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ i $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{2k}$.

2485. Divergira. **2486.** Apsolutno konvergira.

2487. Apsolutno konvergira. **2488.** Uvjetno konvergira.

2489. Divergira. **2490.** Apsolutno konvergira.

2491. Apsolutno konvergira. **2492.** Apsolutno konvergira.

2493. Da. **2494.** Ne. **2495.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{3^n}$; konvergira.

2496. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}$; konvergira. **2497.** Divergira. **2499.** Konvergira.

2500. Konvergira. **2501.** $|R_4|<\frac{1}{120}$, $|R_5|<\frac{1}{720}$; $R_4<0$, $R_5>0$.

2502. $R_n < \frac{a_n}{2n+1} = \frac{1}{2^n(2n+1)n!}$ *Uputa*. Ostatak reda možemo ocijeniti pomoću sume geometrijske progresije, koja prelazi taj ostatak: $R_n = a_n\left[\frac{1}{2}\,\frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right] < a_n\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right]$. **2503.** $R_n < \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!}$; $R_{10} < 3\cdot 10^{-8}$.

2504. $\frac{1}{n+1} < R_n < \frac{1}{n}$. *Rješenje:* $R_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots > \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \ldots = \frac{1}{n+1}$; $R_n < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots = \frac{1}{n}$.

2505. Za zadani red možemo lako naći tačnu vrijednost ostatka:

$$R_n = \frac{1}{15}\left(n + \frac{16}{15}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}$$

Rješenje. $R_n = (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} + (n+2)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+2} + \ldots$

Pomnožimo s $\left(\frac{1}{4}\right)^2$:

$$\frac{1}{16}R_n = (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+2} + (n+2)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+4} + \ldots$$

Izračunavši dobijemo:

$$\frac{15}{16}R_n = n\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+4} + \ldots = n\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}}{1 - \frac{1}{16}} = \left(n + \frac{16}{15}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}.$$

Iz toga dobivamo naprijed navedenu vrijednost za R_n. Stavimo li $n = 0$, nalazimo sumu reda $S = \left(\frac{16}{15}\right)^2$. **2506.** 99; 999. **2507.** 2; 3; 5.

2508. $S = 1$. *Uputa.* $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

2509. $S = 1$ za $x > 0$, $S = -1$ za $x < 0$; $S = 0$ za $x = 0$.

2510. Za $x > 1$ apsolutno konvergira, za $x \leqslant 1$ divergira.

2511. Za $x > 1$ apsolutno konvergira, za $0 < x \leqslant 1$ konvergira, ali ne apsolutno, za $x \leqslant 0$ divergira.

2512. Za $x > e$ konvergira apsolutno, za $1 < x \leqslant e$ konvergira, ali ne apsolutno, za $x \leqslant 1$ divergira

2513. $-\infty < x < \infty$. **2514.** $-\infty < x < \infty$.

2515. Apsolutno konvergira za $x > 0$, divergira za $x \leqslant 0$. *Rješenje.* 1) $|a_n| \leqslant \frac{1}{e^{nx}}$, a za $x > 0$ red s općim članom $\frac{1}{e^{nx}}$ konvergira; 2) $\frac{1}{e^{nx}} \geqslant 1$ za $x \leqslant 0$ a $\cos nx$ ne teži k nuli ako $n \to \infty$, jer bi iz $\cos nx \to 0$ slijedilo da $\cos 2nx \to -1$; prema tome je za $x \leqslant 0$ narušen nužni uvjet konvergencije.

2516. Apsolutno konvergira za $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); u ostalim tačkama divergira.

2517. Svugdje divergira. **2518.** Apsolutno konvergira za $x \neq 0$.

2519. $x > 1,\ x \leqslant -1$. **2520.** $x > 3,\ x < 1$. **2521.** $x \geqslant 1,\ x \leqslant -1$.

2522. $x \geqslant 5\frac{1}{3},\ x < 4\frac{2}{3}$. **2523.** $x > 1,\ x < -1$.

2524. $-1 < x < -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < x < 1$. *Uputa.* Za ove vrijednosti od x konvergira kako red $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$, tako i red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k x^k}$. Za $|x| \geqslant 1$ i za $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ opći član reda ne teži nuli.

2525. $-1 < x < 0,\ 0 < x < 1$. **2526.** $-1 < x < 1$. **2527.** $-2 \leqslant x < 2$.

2528. $-1 < x < 1$. **2529.** $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. **2530.** $-1 < x \leqslant 1$. **2531.** $-1 < x < 1$.

2532. $-1 < x < 1$. **2533.** $-\infty < x < \infty$. **2534.** $x = 0$. **2535.** $-\infty < x < \infty$.

2536. $-4 < x < 4$. **2537.** $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$. **2538.** $-2 < x < 2$. **2539.** $-e < x < e$.

2540. $-3 \leqslant x < 3$. **2541.** $-1 < x < 1$.

2542. $-1 < x < 1$. *Rješenje.* Za $|x| \geqslant 1$ divergencija reda je očigledna (interesantno je primijetiti da se divergencija reda na krajevima intervala konvergencije $x = \pm 1$ ne pronalazi samo pomoću nužnih uvjeta za konvergenciju već i pomoću D'Alembertova kriterija). Za $|x| < 1$ imamo: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!\,x^{(n+1)!}}{n!\,x^{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} |(n+1)\, x^{n!n}| \leqslant \lim_{n\to\infty} (n+1)\, |x|^n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\left|\frac{1}{x}\right|^n} = 0$ (posljednju jednadžbu jednostavno dobijemo pomoću L'Hospitalova pravila).

2543. $-1 \leqslant x \leqslant 1$. *Uputa.* Pomoću D'Alembertova kriterija možemo ne samo naći interval konvergencije već i istražiti konvergenciju zadanog reda na krajevima intervala konvergencije.

2544. $-1 \leqslant x \leqslant 1$. *Uputa.* Pomoću Cauchyjeva kriterija možemo ne samo naći interval konvergencije već i istražiti konvergenciju zadanog reda na krajevima intervala konvergencije.

2545. $2 < x \leqslant 8$. **2546.** $-2 \leqslant x < 8$. **2547.** $-2 < x < 4$. **2548.** $1 \leqslant x \leqslant 3$.

2549. $-4 \leqslant x \leqslant -2$. **2550.** $x = -3$. **2551.** $-7 < x < -3$. **2552.** $0 \leqslant x < 4$.

2553. $-\frac{5}{4} < x < \frac{13}{4}$. **2554.** $-e-3 < x < e-3$. **2555.** $-2 \leqslant x \leqslant 0$. **2556.** $2 < x < 4$.

2557. $1 < x \leqslant 3$. **2558.** $-3 \leqslant x \leqslant -1$.

2559. $1 - \frac{1}{e} < x < 1 + \frac{1}{e}$. *Uputa.* Za $x = 1 \pm \frac{1}{e}$ red divergira jer je $\lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} = \frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0$.

2560. $-2 < x < 0$. **2561.** $1 < x \leqslant 3$. **2562.** $1 \leqslant x < 5$. **2563.** $2 \leqslant x \leqslant 4$.

2564. $|z| < 1$. **2565.** $|z| < 1$. **2566.** $|z - 2i| < 3$ **2567.** $|z| < \sqrt{2}$.

5268. $z = 0$. **2569.** $|z| < \infty$. **2570.** $|z| < \frac{1}{2}$.

2576. $-\ln(1-x)\ (-1 \leqslant x < 1)$. **2577.** $\ln(1+x)\ (-1 < x \leqslant 1)$.

2578. $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\ (|x| < 1)$. **2579.** $\operatorname{arctg} x\ (|x| \leqslant 1)$.

2580. $\frac{1}{(x-1)^2}\ (|x| < 1)$. **2581.** $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\ (|x| < 1)$. **2582.** $\frac{2}{(1-x)^3}\ (|x| < 1)$. **2583.** $\frac{x}{(x-1)^2} (|x| > 1)$.

2584. $\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}\right)(|x|<1)$.

2585. $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. *Uputa.* Razmotrite sumu reda $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots$ (vidjeti zadatak 2579) za $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2586. 3. **2587.** $a^x=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\ln^n a}{n!}\,(-\infty<x<\infty)$.

2588. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^{\frac{n^2-n}{2}}\frac{x^n}{n!}+\dots\right]$.

2589. $\cos(x+a)=\cos a-x\sin a-\frac{x^2}{2!}\cos a+\frac{x^3}{3!}\sin a+\frac{x^4}{4!}\cos a+\dots$

$\dots+\frac{x^n}{n!}\sin\left[a+\frac{(n+1)\pi}{2}\right]+\dots(-\infty<x<\infty)$.

2590. $\sin^2 x=\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\frac{2^5x^6}{6!}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\dots(-\infty<x<\infty)$.

2591. $\ln(2+x)=\ln 2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2\cdot 2^2}+\frac{x^3}{3\cdot 2^3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}+\dots(-2<x\leqslant 2)$.

Uputa. Pri istraživanju ostatka primjenjuje se teorem o integriranju reda potencija.

2592. $\frac{2x-3}{(x-1)^2}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+3)\,x^n(|x|<1)$. **2593.** $\frac{3x-5}{x^2-4x+3}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{2}{3^{n+1}}\right)x^n(|x|<1)$.

2594. $xe^{-2x}=x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}x^n}{(n-1)!}\,(-\infty<x<\infty)$.

2595. $e^{x^2}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\,(-\infty<x<\infty)$. **2596.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,(-\infty<x<\infty)$.

2597. $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$. **2598.** $1+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}\,(-\infty<x<\infty)$.

2599. $2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+2)3^{2n}\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,(-\infty<x<\infty)$. **2600.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}(-3<x<3)$.

2601. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2^3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^4}{2^5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^6}{2^7}+\dots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2n}\frac{x^{2n}}{2^{2n+1}}+\dots(-2<x<2)$.

2602. $2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}(|x|<1)$. **2603.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n-1}{n}x^n\left(-\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{1}{2}\right)$.

2604. $x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(n-1)\,n}\,(|x|\leqslant 1)$. **2605.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}(|x|\leqslant 1)$.

2606. $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\dots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots(|x|)\leqslant 1)$.

2607. $x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}-\dots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots(|x|\leqslant 1)$.

2608. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{4n-3}x^{2n}}{(2n)!}(-\infty<x<\infty)$. **2609.** $1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}x^n(-\infty<x<\infty)$.

2610. $8+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n+3^{n-1}}{n!}x^n(-\infty<x<\infty)$.

2611. $2+\frac{x}{2^2\cdot 3\cdot 1!}-\frac{2\cdot x^2}{2^5\cdot 3^2\cdot 2!}+\frac{2\cdot 5x^3}{2^8\cdot 3^3\cdot 3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-4)x^n}{2^{3n-1}\cdot 3^n\cdot n!}+\ldots$
$+\ldots\quad(-\infty<x<\infty)$.

2612. $\frac{1}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n\ (-2<x<2)$. **2613.** $1+\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+3^{2n-1})x^{2n}}{(2n)!}(|x|<\infty)$.

2614. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{4^{n+1}}(|x|<\sqrt{2})$.

2615. $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+2^{-n})\frac{x^n}{n}\quad(-1<x\leqslant 1)$.

2616. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\quad(-\infty<x<\infty)$.

2617. $x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,n!}(|x|<\infty)$. **2618.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}(|x|\leqslant 1)$.

2619. $x+\frac{1}{2\cdot 5}x^5+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 9\cdot 2!}x^9+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n(4n+1)n!}x^{4n+1}+\ldots(|x|<1)$.

2620. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\ldots$ **2621.** $x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\ldots$

2622. $e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\ldots\right)$. **2623.** $1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\ldots$

2624. $-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{45}+\ldots\right)$. **2625.** $x+x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots$

2626. *Uputa.* Polazeći od parametarskih jednadžbi elipse $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, izračunajte duljinu elipse i dobiveni izraz razvijte u red po potencijama od ε.

2628. $x^3-2x^2-5x-2=-78+59(x+4)-14(x+4)^2+(x+4)^3\ (-\infty<x<\infty)$.

2629. $f(x+h)=5x^3-4x^2-3x+2+(15x^2-8x-3)h+(15x-4)h^2+5h^3$
$(-\infty<x<\infty;\quad -\infty<h<\infty)$.

2630. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}\ (0<x\leqslant 2)$. **2631.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n\ (0<x<2)$.

2632. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n\ (-2<x<0)$.

2633. $\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-n-1}-3^{-n-1})(x+4)^n\ (-6<x<-2)$.

2634. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}\ (-2-\sqrt{3}<x<-2+\sqrt{3})$.

2635. $e^{-2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right]$ $(|x|<\infty)$.

2636. $2+\frac{x-4}{2^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{(x-4)^2}{2^4}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 6}\cdot\frac{(x-4)^3}{2^6}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{(x-4)^4}{2^8}+\ldots$

$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{4\cdot 6\cdot 8\ldots 2n}\cdot\frac{(x-4)^n}{2^{2n}}+\ldots$ $(0\leqslant x\leqslant 8)$.

2637. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $(|x|<\infty)$.

2638. $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $(|x|<\infty)$.

2639. $-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2n+1}$ $(0<x<\infty)$. *Uputa.* Izvršite zamjenu $\frac{1-x}{1+x}=t$ i razvijte $\ln x$ po potencijama od t.

2640. $\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n+\ldots\left(-\frac{1}{2}\leqslant x<\infty\right)$.

2641. $|R|<\frac{e}{5!}<\frac{1}{40}$.

2642. $|R|<\frac{1}{11}$.

2643. $\frac{\pi}{6}\approx\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5}\approx 0{,}523$. *Uputa.* Dabismo dokazali da pogreška ne prelazi 0,001, nužno je ocijeniti ostatak pomoću geometrijske progresije koja prelazi taj ostatak.

2644. Dva člana tj. $1-\frac{x^2}{2}$.

2645. Dva člana tj. $x-\frac{x^3}{6}$.

2646. Osam članova, tj. $1+\sum_{n=1}^{7}\frac{1}{n!}$

2647. 99; 999.

2648. 1,92.

2649. $|R|<0{,}0003$.

2650. 2,087.

2651. $|x|<0{,}69$; $|x|<0{,}39$; $|x|<0{,}22$.

2652. $|x|<0{,}39$ $|x|<0{,}18$.

2653. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3\cdot 3\cdot 3!}\approx 0{,}4931$.

2654. 0,7468.

2655. 0,608.

2656. 0,621.

2657. 0,2505.

2658. 0,026.

2659. $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-y)^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty;\ -\infty<y<\infty)$.

2660. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-y)^{2n}-(x+y)^{2n}}{2\cdot(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty;\ -\infty<y<\infty)$.

2661. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x^2+y^2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $(-\infty<x<\infty;\ -\infty<y<\infty)$.

2662. $1+2\sum_{n=1}^{\infty}(y-x)^n$; $|x-y|<1$. *Uputa.* $\frac{1-x+y}{1+x-y}=-1+\frac{2}{1-(y-x)}$ Poslužite se geometrijskom progresijom.

2663. $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+y^n}{n}$ $(-1 \leqslant x<1;\ -1 \leqslant y<1)$. *Uputa.* $1-x-y+xy=(1-x)(1-y)$.

2664. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}+y^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1;\ -1 \leqslant y \leqslant 1)$. *Uputa.* $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y$ (pri $|x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1$).

2665. $f(x+h,\ y+k)=ax^2+2b\,xy+cy^2+2\,(ax+by)\,h+2\,(bx+cy)k+ah^2+2bh+ck^2$.

2666. $f(1+h,\ 2+k)-f(1,\ 2)=9h-21k+3h^2+3hk-12k^2+h^2-2k^3$.

2667. $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(x-2)+(y+2)]^n}{n!}$.

2668. $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left[x+\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\right]^{2n}}{(2n)!}$.

2669. $1+x+\frac{x^2-y^2}{2!}+\frac{x^3-3xy^2}{3!}+\ldots$

2670. $1+x+xy+\frac{1}{2}x^2y+\ldots$

2671. $\frac{c_1+c_2}{2}-\frac{2\,(c_1-c_2)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$; $S(0)=\frac{c_1+c_2}{2}$; $S(\pm\pi)=\frac{c_1+c_2}{2}$.

2672. $\frac{b-a}{4}\pi-\frac{2\,(b-a)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\,x}{(2n+1)^2}+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$; $S(\pm\pi)=\frac{b-a}{2}\pi$.

2673. $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$; $S(\pm\pi)=\pi^2$.

2674. $\frac{2}{\pi}\operatorname{sh} a\pi\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}\,(a\cos nx-n\sin nx)\right]$; $S(\pm\pi)=\operatorname{ch} a\pi$.

2675. $\frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin nx}{a^2-n^2}$, ako a nije cijeli broj; $\sin ax$, ako je a cio broj; $S(\pm\pi)=0$.

2676. $\frac{2\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2-n^2}\right]$, ako a nije cio broj; $\cos ax$, ako je a cio broj; $S(\pm\pi)=\cos a\pi$.

2677. $\frac{2\operatorname{sh} a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{a^2+n^2}$; $S(\pm\pi)=0$.

2678. $\frac{2\operatorname{sh} a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2+n^2}\right]$; $S(\pm\pi)=\operatorname{ch} a\pi$.

2679. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

2680. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2a-1)\,x}{2n-1}$; a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{3}$; c) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

2681. a) $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$; b) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\,x}{(2n-1)^2}$; $\frac{\pi^2}{8}$.

2682. a) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$, gdje je $b_{2k-1}=\frac{2\pi}{2k-1}-\frac{8}{\pi\,(2k-1)^3}$, a $b_{2k}=-\frac{\pi}{k}$;

b) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$; 1) $\frac{\pi^2}{6}$; 2) $\frac{\pi^2}{12}$.

2683. a) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-1)^{n}e^{a\pi}]\frac{n\sin nx}{a^{2}+n^{2}}$; b) $\frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}+\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^{n}e^{a\pi}-1]\cos nx}{a^{2}+n^{2}}$.

2684. a) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin nx$; b) $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cos nx$.

2685. a) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^{2}}$; b) $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2(2n-1)x}{(2n-1)^{2}}$.

2686. $\sum_{n=1}^{\infty}b_{n}\sin nx$, gdje $b_{2k}=(-1)^{k-1}\frac{1}{2k}$, $b_{2k+1}=(-1)^{k}\frac{2}{\pi(2k+1)^{2}}$.

2687. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^{3}}$.

2688. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{4n^{2}-1}$.

2689. $\frac{2h}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{nh}\cos nx\right)$.

2690. $\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^{2}\cos nx\right]$.

2691. $1-\frac{\cos x}{2}+2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^{2}-1}$.

2692. $\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2nx}{4n^{2}-1}\right]$.

2694. *Rješenje.* 1) $a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos 2nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nx\,dx+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos 2nx\,dx$. Izvršimo li zamjenu $t=\frac{\pi}{2}-x$ u prvom integralu *i* $t=x-\frac{\pi}{2}$ u drugom integralu, tada primjenom pretpostavljenog identiteta $f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$, lako nalazimo da je $a_{2n}=0$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$;

2) $b_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin 2nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin 2nx\,dx+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\sin 2nx\,dx$.

Ista zamjena kao u primjeru 1 uz identitet $f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$ dovodi do jednadžbi $b_{2n}=0$ $(n=1, 2, \ldots)$.

2695. $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^{2}}$.

2696. $1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}$.

2697. $\operatorname{sh} l\left[\frac{1}{l}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{l\cos\frac{n\pi x}{l}-\pi n\sin\frac{n\pi x}{l}}{l^{2}+n^{2}\pi^{2}}\right]$.

2698. $\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin\frac{n\pi x}{5}}{n}$.

2699. a) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2(n-1)\pi x}{2n-1}$; b) 1.

2700. a) $\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{n}$; b) $\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}}{(2n-1)^2}$.

2701. a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{nx}{2}$, gdje je $b_{2k+1}=\frac{8}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2k+1}-\frac{4}{(2k+1)^3}\right]$, $b_{2k}=-\frac{4\pi}{k}$;

b) $\frac{4\pi^2}{3}-16\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos\frac{nx}{2}}{n^2}$.

2702. a) $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2}$; b) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$.

2703. $\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi x}{n^2}$.

GLAVA IX

2704. Da.
2705. Ne.
2706. Da.
2707. Da.
2708. Da.
2709. a) Da; b) ne.
2710. Da.
2714. $y-xy'=0$.
2715. $xy'-2y=0$.
2716. $y-2xy'=0$.
2717. $x\,dx+y\,dy=0$.
2718. $y'=y$.
2719. $3y^2-x^2=2xyy'$.
2720. $xyy'(xy^2+1)=1$.
2721. $y=xy'\ln\frac{x}{y}$.
2722. $2xy''+y'=0$.
2723. $y''-y'-2y=0$.
2724. $y''+4y=0$.
2725. $y'''-2y''+y'=0$.
2726 $y''=0$.
2727. $y'''=0$.
2728. $(1+y'^2)y'''-3y'y''^2=0$.
2729. $y^2-x^2=25$.
2730. $y=xe^{2x}$.
2731. $y=-\cos x$.
2732. $y=\frac{1}{6}(-5e^{-x}+9e^{x}-4e^{2x})$.
2738. 2,593 (tačna je vrijednost $y=e$).
2739. 4,780 [tačno, $y=3(e-1)$].
2740. 0,946 (tačna je vrijednost $y=1$).
2741. 1,826 (tačna je vrijednost $y=\sqrt{3}$).
2742. $\operatorname{ctg}^2 y=\operatorname{tg}^2 x+C$.
2743. $x=\frac{Cy}{\sqrt{1+y^2}}$; $y=0$.
2744. $x^2+y^2=\ln Cx^2$.
2745. $y=a+\frac{Cx}{1+ax}$.
2746. $\operatorname{tg} y=C(1-e^x)^3$; $x=0$.
2747. $y=C\sin x$.
2748. $2e^{\frac{y^2}{2}}=\sqrt{e}\,(1+e^x)$.
2749. $1+y^2=\frac{2}{1-x^2}$.
2750. $y=1$.
2751. $\operatorname{arctg}(x+y)=x+C$.
2752. $8x+2y+1=2\operatorname{tg}(4x+C)$.
2753. $x+2y+3\ln|2x+3y-7|=C$.
2754. $5x+10y+C=3\ln|10x-5y+6|$.
2755. $\rho=\frac{C}{1-\cos\rho}$ ili $y^2=2Cx+C^2$.

2756. $\ln \rho = \dfrac{1}{2\cos^2\varphi} - \ln|\cos\varphi| + C$ ili $\ln|x| - \dfrac{y^2}{2x^2} = C$.

2757. Pravac $y = Cx$ ili hiperbola $y = \dfrac{C}{x}$. *Uputa.* Duljina tangente jednaka je $\sqrt{y^2 + \left(\dfrac{y}{y'}\right)^2}$.

2758. $y^2 - x^2 = C$. **2759.** $y = Ce^{\frac{x}{a}}$. **2760.** $y^2 = 2px$.

2761. $y = ax^2$. *Uputa.* Prema uvjetima je $\dfrac{\int_0^x xy\,dx}{\int_0^x y\,dx} = \dfrac{3}{4}x$. Derivirajući dvaput po x dobivamo diferencijalnu jednadžbu.

2762. $y^2 = \dfrac{1}{3}x$. **2763.** $y = \sqrt{4-x^2} + 2\ln\dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{|x|}$.

2764. Pramen pravaca $y = kx$. **2765.** Porodicu sličnih elipsa $2x^2 + y^2 = C^2$.

2766. Porodicu hiperbola $x^2 - y^2 = C$. **2767.** Porodicu kružnica $x^2 + (y-b)^2 = b^2$.

2768. $y = x \ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$. **2769.** $y = \dfrac{C}{x} - \dfrac{x}{2}$. **2770.** $x = Ce^{\frac{x}{y}}$.

2771. $(x-C)^2 - y^2 = C^2$; $(x-2)^2 - y^2 = 4$; $y = \pm x$.

2772. $\sqrt{\dfrac{x}{y}} + \ln|y| = C$. **2773.** $y = \dfrac{C}{2}x^2 - \dfrac{1}{2C}$; $x = 0$.

2774. $(x^2+y^2)^3(x+y)^2 = C$. **2775.** $y = x\sqrt{1 - \dfrac{3}{8}x}$.

2776. $(x+y-1)^3 = C(x-y+3)$. **2777.** $3x + y + 2\ln|x+y-1| = C$.

2778. $\ln|4x+8y+5| + 8y - 4x = C$. **2779.** $x^2 = 1 - 2y$.

2780. Rotacioni paraboloid. *Rješenje.* Na temelju simetrije traženo zrcalo je rotaciona ploha. Ishodište koordinatnog sistema postavlja se u izvor svjetla; os OX je smjer pramena zraka. Ako tangenta u po volji odabranoj tački $M(x, y)$ krivulje presjeka tražene površine i ravnine XOY tvori s osi OX kut φ, a odsječak, koji spaja ishodište koordinatnog sistema s tačkom $M(x, y)$, kut α, onda je $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}2\varphi = \dfrac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}$. Ali $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$, $\operatorname{tg}\varphi = y'$. Tražena diferencijalna jednadžba je $y - yy'^2 = 2xy'$ i njeno je rješenje $y^2 = 2Cx + C^2$. Ravninski presjek je parabola. Tražena je površina rotacioni paraboloid.

2781. $(x-y)^2 - Cy = 0$. **2782.** $x^2 = C(2y+C)$.

2783. $(2y^2 - x^2)^3 = Cx^2$. *Uputa.* Upotrijebite da je površina jednaka $\int_a^x y\,dx$.

2784. $y = Cx - x\ln|x|$. **2785.** $y = Cx + x^2$. **2786.** $y = \dfrac{1}{6}x^4 + \dfrac{C}{x^2}$.

2787. $x\sqrt{1+y^2} + \cos y = C$. *Uputa.* Jednadžba je linearna s obzirom na x i $\dfrac{dx}{dy}$.

2788. $x = Cy^2 - \dfrac{1}{y}$. **2789.** $y = \dfrac{e^x}{x} + \dfrac{ab - e^a}{x}$.

2790. $y = \dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. **2791.** $y = \dfrac{x}{\cos x}$.

2792. $y=(x^2+Cx)=1.$

2793. $y^2=x\ln\frac{C}{x}.$

2794. $x^2=\frac{1}{y+Cy^2}.$

2795. $y^3(3+Ce^{\cos x})=x.$

2797. $xy=Cy^2+a^2.$

2798. $y^2+x+ay=0.$

2799. $x=y\ln\frac{y}{a}.$

2800. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1.$

2801. $x^2+y^2-Cy+a^2=0.$

2802. $\frac{x^2}{2}+xy+y^2=C.$

2803. $\frac{x^3}{3}+xy^2+x^2=C.$

2804. $\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2y^2+2x+\frac{y^3}{3}=C.$

2805. $x^2+y^2-2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C.$

2806. $x^2-y^2=Cy^3.$

2807. $\frac{x^2}{2}+ye^{\frac{x}{y}}=2.$

2808. $\ln|x|-\frac{y^2}{x}=C.$

2809. $\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=C.$

2810. $\frac{1}{y}\ln x+\frac{1}{2}y^2=C.$

2811. $(x\sin y+y\cos y-\sin y)e^x=C.$

2812. $(x^2C^2+1-2Cy)(x^2+C^2-2Cy)=0$; singularni integral je $x^2-y^2=0.$

2813. Opći integral je $(y+C)^2=x^3$; singularnog integrala nema.

2814. Opći integral je $\left(\frac{x^2}{2}-y+C\right)\left(x-\frac{y^2}{2}+C\right)=0$; singularnog integrala nema.

2815. Opći integral je $y^2+C^2=2Cx$; singularni je integral $x^2-y^2=0.$

2816. $y=\frac{1}{2}\cos x\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x.$

2817. $\begin{cases} x=\sin p+\ln p, \\ y=p\sin p+\cos p+p+C. \end{cases}$

2818. $\begin{cases} x=e^p+pe^p+C, \\ y=p^2e^p. \end{cases}$

Singularno rješenje je $y=0.$

2819. $\begin{cases} x=2p-\frac{2}{p}+C. \\ y=p^2+2\ln p. \end{cases}$

2820. $4y=x^2+p^2,\ \ln|p-x|=C+\frac{x}{p-x}.$

2821. $\ln\sqrt{p^2+y^2}+\operatorname{arctg}\frac{p}{y}=C,\quad x=\ln\frac{y^2+p^2}{2p}.$ Singularno rješenje je $y=e^x.$

2822. $y=C+\frac{x^2}{C}$; $y=\pm 2x.$

2823. $\begin{cases} x=\ln|p|-\arcsin|p|+C, \\ y=|p|+\sqrt{1-p^2}. \end{cases}$

2824. $\begin{cases} x=Ce^{-p}-2p+2, \\ y=C(1+p)e^{-p}-p^2+2. \end{cases}$

2825. $\begin{cases} x=\frac{1}{3}\left(Cp^{-\frac{1}{2}}-p\right), \\ y=\frac{1}{6}\left(2Cp^{\frac{1}{2}}+p^2\right). \end{cases}$

Uputa. Diferencijalna jednadžba iz koje određujemo x kao funkciju od p je homogena.

2826. $y = Cx + C^2$; $y = -\frac{x^2}{4}$.

2827. $y = Cx + C$; singularnog rješenja nema.

2828. $y = Cx + \sqrt{1+C^2}$; $x^2+y^2 = 1$.

2829. $y = Cx + \frac{1}{C}$; $y^2 = 4x$.

2830. $xy = C$.

2831. Kružnica i porodica njenih tangenata.

2832. Astroida $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$.

2833. a) Homogena; $y = xu$; b) linearna s obzirom na x; $x = uv$; c) linearna s obzirom na y; $y = u \cdot v$; d) Bernoullijeva jednadžba; $y = uv$; e) sa separiranim varijablama; f) Clairautova jednadžba; svedite na oblik $y = xy' \pm \sqrt{y'^3}$; g) Langrangeova jednadžba; derivirajte po x; h) Bernoullijeva jednadžba; $y = uv$; i) svedite na jednadžbu sa separiranim varijablama; $u = x+y$; j) Lagrangeova jednadžba; derivirajte po x; k) Bernoullijeva jednadžba s obzirom na x; $x = uv$; l) jednadžba s totalnim diferencijalima; m) linearna; $y = uv$; n) Bernoullijeva jednadžba; $y = u \cdot v$.

2834. a) $\sin\frac{y}{x} = -\ln|x| + C$; b) $x = y \cdot e^{Cy+1}$.

2835. $x^2 + y^4 = Cy^2$.

2836. $y = \frac{x}{x^2 + C.}$.

2837. $xy\left(C - \frac{1}{2}\ln^2 x\right) = 1$.

2838. $y = Cx + C\ln C$; singularno rješenje je $y = -e^{-(x+1)}$.

2839. $y = Cx + \sqrt{-aC}$; singularno rješenje je $y = \frac{a}{4x}$.

2840. $3y + \ln\frac{|x^3-1|}{(y+1)^6} = C$.

2841. $\frac{1}{2}e^{2x} - e^y - \operatorname{arctg} y - \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = C$.

2842. $y = x^2(1 + Ce^{\frac{1}{x}})$.

2843. $x = y^2(C - e^{-y})$.

2844. $y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$.

2845. $y = ax + C\sqrt{|1-x^2|}$.

2846. $y = \frac{x}{x+1}(x + \ln|x| + C)$.

2847. $x = Ce^{\sin y} - 2a(1 + \sin y)$.

2848. $\frac{x^2}{2} + 3x + y + \ln[(x-3)^{10}|y-1|^3] = C$.

2849. $2\operatorname{arctg}\frac{y-1}{2x} = \ln Cx$.

2850. $x^2 = 1 - \frac{2}{y} + Ce^{-\frac{2}{y}}$.

2851. $x^3 = Ce^y - y - 2$.

2852. $\sqrt{\frac{y}{x}} + \ln|x| = C$.

2853. $y = x\arcsin(Cx)$.

2854. $y^2 = Ce^{-2x} + \frac{2}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x$.

2855. $xy = C(y-1)$.

2856. $x = Ce^y - \frac{1}{2}(\sin y + \cos y)$.

2857. $py = C(p-1)$.

2858. $x^4 = Ce^{4y} - y^3 - \frac{3}{4}y^2 - \frac{3}{8}y - \frac{3}{32}$.

2859. $(xy + C)(x^2y + C) = 0$.

2860. $\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x}{y} = C$.

2861. $xe^y - y^2 = C$.

2862. $$\begin{cases} x = \frac{C}{p^2} - \frac{\sqrt{1+p^2}}{2p} + \frac{1}{2p^2}\ln(p + \sqrt{1+p^2}), \\ y = 2px + \sqrt{1+p^2}. \end{cases}$$

2863. $y = xe^{Cx}$.

2864. $2e^x - y^4 = Cy^2$.

2865. $\ln|y+2| + 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y+2}{x-3} = C$.

2866. $y^2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}} + \dfrac{1}{x} - 2 = 0$.

2867. $x^2 y = Ce^{\frac{y}{a}}$.

2868. $x + \dfrac{x}{y} = C$.

2869. $y = \dfrac{C - x^4}{4\,(x^2-1)^{3/2}}$.

2870. $y = C\sin x - a$.

2871. $y = \dfrac{a^2 \ln (x + \sqrt{a^2+x^2}) + C}{x + \sqrt{a^2+x^2}}$.

2872. $(y - Cx)(y^2 - x^2 + C) = 0$.

2873. $y = Cx + \dfrac{1}{C^2}$, $y = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2x^2}$.

2874. $x^3 + x^2y - y^2x - y^3 = C$.

2875. $p^2 + 4y^2 = Cy^3$. **2876.** $y = x - 1$.

2877. $y = x$. **2878.** $y = 2$.

2879. $y = 0$.

2880. $y = \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x)$.

2881. $y = \dfrac{1}{4}(2x^2 + 2x + 1)$.

2882. $y = e^{-x} + 2x - 2$.

2883. a) $y = x$; b) $y = Cx$, gdje je C po volji; tačka (0, 0) je singularna tačka diferencijalne jednadžbe.

2884. a) $y^2 = x$; b) $y^2 = 2px$; (0, 0) je singularna tačka.

2885. a) $(x - C)^2 + y^2 = C^2$; b) nema rješenja; c) $x^2 + y^2 = x$; (0, 0) je singularna tačka.

2886. $y = e^{\frac{x}{y}}$. **2887.** $y = (\sqrt{2a} \pm \sqrt{x})^2$. **2888.** $y^2 = 1 - e^{-x}$.

2889. $r = Ce^{a\varphi}$. *Uputa.* Pređite na polarne koordinate. **2890.** $3y^2 - 2x = 0$.

2891. $r = k\varphi$. **2892.** $x^2 + (y-b)^2 = b^2$. **2893.** $y^2 + 16x = 0$.

2894. Hiperbole $y^2 - x^2 = C$ ili kružnice $x^2 + y^2 = C^2$.

2895. $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. *Uputa.* Upotrijebite da je površina $\int_0^x y\,dx$, a dužina luka $\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx$.

2896. $x = \dfrac{a^2}{y} + Cy$. **2897.** $y^2 = 4C(C + a - x)$.

2898. *Uputa.* Koristite se time da je rezultanta sile teže i centrifugalne sile normalna na površinu. Uzmemo li os vrtnje za os OY i označimo li sa ω kutnu brzinu vrtnje, dobit ćemo za ravninski presjek kroz os tražene plohe diferencijalnu jednadžbu $g\dfrac{dy}{dx} = \omega^2 x$.

2899. $p = e^{-0{,}000167h}$. *Uputa.* Tlak na svakom nivou vertikalnog zračnog stupca možemo smatrati da je uvjetovan samo tlakom gornjih slojeva. Upotrijebite Boyle-Mariotteov zakon prema kojemu je gustoća proporcionalna tlaku. Tražena diferencijalna jednadžba je $dp = -kp\,dh$.

2900. $s = \dfrac{1}{2}klw$. *Uputa.* Jednadžba je $ds = kw \cdot \dfrac{l-x}{l}\,dx$.

2901. $s = \left(p + \dfrac{1}{2}w\right)kl$.

2902. $T = a + (T_0 - a)\,e^{-kt}$.

2903. Kroz jedan sat.

2904. $\omega = 100\left(\dfrac{3}{5}\right)^{t}$ o/min.

2905. Za 100 godina raspadne se 4,2% početne količine Q_0. *Uputa.* Jedandžba je $\dfrac{dQ}{dt} = kQ$;

$$Q = Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}.$$

2906. $t \approx 35{,}2$ s. *Uputa.* Jednadžba je $\pi\ (h^2-2h)\ \mathrm{d}h = \pi\left(\frac{1}{10}\right)^2 v\ \mathrm{d}t$.

2907. $\frac{1}{1024}$. *Uputa.* Jednadžba je $\mathrm{d}Q = -kQ\ \mathrm{d}h$; $Q = Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{3}}$

2908. $v \to \sqrt{\frac{gm}{k}}$ kada $t \to \infty$ (k je koeficijent proporcionalnosti). *Uputa.* Jednadžba je $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv^2$; $v = \sqrt{\frac{gm}{k}}\, th\left(t\sqrt{\frac{gk}{m}}\right)$.

2909. 18,1 kg. *Uputa.* Jednadžba je $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{300}\right)$.

2910. $i = \frac{E}{R^2+L^2\omega^2}\ [(R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t) + L\omega e^{-\frac{R}{L}t}\ ]$. *Uputa.* Jednadžba je $R_i + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = E \sin \omega t$.

2911. $y = x \ln |x| + C_1x + C_2$.

2912. $1 + C_1 y^2 = \left(C_2 + \frac{C_1x}{\sqrt{2}}\right)^2$.

2913. $y = \ln |e^{2x} + C_1| - x + C_2$.

2914. $y = C_1 + C_2 \ln |x|$.

2915. $y = C_1e^{C_2x}$.

2916. $y = \pm\sqrt{C_1x + C_2}$.

2917. $y = (1 + C_1^2) \ln |x + C_1| - C_1x + C_2$.

2918. $(x - C_1) = a \ln \left|\sin \frac{y - C_2}{a}\right|$ za $a \neq 0$;
$y = C$ za $a = 0$.

2919. $y = \frac{1}{2}(\ln |x|)^2 + C_1 \ln |x| + C_2$.

2920. $x = \frac{1}{C_1} \ln \left|\frac{y}{y+C_1}\right| + C_2$; $y = C$.

2921. $y = C_1 e^{C_2x} + \frac{1}{C_2}$.

2922. $y = \pm\frac{1}{2}\left[x\sqrt{C_1^2 - x^2} + C_1^2 \arcsin \frac{x}{C_1}\right] + C_2$.

2923. $y = (C_1 e^x + 1)\, x + C_2$.

2924. $y = (C_1x - C_1^2)\, e^{\frac{x}{C_1}+1} + C_2$; $y = \frac{e}{2}x^2 + C$ (singularno rješenje).

2925. $y = C_1x\, (x - C_1) + C_2$; $y = \frac{x^3}{3} + C$ (singularno rješenje).

2926. $y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1\, x \ln |x| + C_2x + C_3$.

2927. $y = \sin (C_1 + x) + C_2\, x + C_3$.

2928. $y = x^3 + 3x$.

2929. $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$.

2930. $y = x + 1$.

2931. $y = Cx^2$.

2932. $y = C_1\frac{1 + C_2 e^x}{1 - C_2e^x}$; $y \quad C$.

2933. $x = C_1 + \ln \left|\frac{y - C_2}{y + C_2}\right|$.

2934. $x = C_1 - \frac{1}{C_1} \ln \left|\frac{y}{y + C_2}\right|$.

2935. $x = C_1y^2 + y \ln y + C_2$.

2936. $2y^2 - 4x^2 = 1$.

2937. $y = x + 1$.

2938. $y = \frac{x^2-1}{2(e^2-1)} - \frac{e^2-1}{4} \ln |x|$ ili $y = \frac{1-x^2}{2(e^2+1)} + \frac{e^2+1}{4} \ln |x|$.

2939. $y = \frac{1}{2}x^2$

2940. $y = \frac{1}{2}x^2$.

2941. $y = 2e^x$.

2942. $x = -\frac{3}{2}(y+2)^{2/3}$.

2943. $y = e^x$.

2944. $y^2 = \frac{e}{e-1} + \frac{e^{-x}}{1-e}$.

2945. $y = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - \frac{8}{3}$.

2946. $y=\frac{3e^{3x}}{2+e^{3x}}$. **2947.** $y=\sec^2 x$. **2948.** $y=\sin x+1$. **2949.** $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}$.

2950. $x=-\frac{1}{2}e^{-y^2}$. **2951.** Rješenja nema. **2952.** $y=e^x$. **2953.** $y=2\ln|x|-\frac{2}{x}$.

2954. $y=\frac{(x+C_1^2+1)^2}{2}+\frac{4}{3}C_1(x+1)^{\frac{3}{2}}+C_2$. Singularno rješenje je $y=C$.

2955. $y=C_1\frac{x^2}{2}+(C_1-C_1^2)\,x+C_2$. Singularno rješenje je $y=\frac{(x+1)^3}{12}+C$.

2956. $y=\frac{1}{12}(C_1+x)^4+C_2\,x+C_3$.

2957. $y=C_1+C_2\,e^{C_1x}$; $y=1-e^x$; $y=-1+e^{-x}$; singularno rješenje je $y=\frac{4}{C-x}$.

2958. Kružnice. **2959.** $(x-C_1)^2-C_2y^2+k\,C_2^2=0$.

2960. Lančanica $y=a\operatorname{ch}\frac{x-x_0}{2}$. Kružnica $(x-x_0)^2+y^2=a^2$.

2961. Parabola $(x-x_0)^2=2ay-a^2$. Cikloida $x-x_0=a\,(t-\sin t)$, $y=a\,(1-\cos t)$.

2962. $e^{ay+C_2}=\sec(ax+C_1)$. **2963.** Parabola.

2964. $y=\frac{C_1}{2}\frac{H}{q}e^{\frac{q}{H}x}+\frac{1}{2C_1}\frac{H}{q}e^{-\frac{q}{H}x}+C_2$ ili $y=a\operatorname{ch}\frac{x+C}{a}+C_2$, gdje je H konstantno horizontalno naprezanje, a $\frac{H}{q}=a$. *Uputa.* Diferencijalna jednadžba je $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{q}{H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

2965. Jednadžba gibanja je $\frac{d^2s}{dt^2}=g\,(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$. Zakon gibanja je $s=\frac{gt^2}{2}(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$.

2966. $s=\frac{m}{k}\ln\operatorname{ch}\left(t\sqrt{g\frac{k}{m}}\right)$. *Uputa.* Jednadžba gibanja je $m\frac{d^2s}{dt^2}=mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$.

2967. Za 6,45 s. *Uputa.* Jednadžba gibanja je $\frac{300}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=-10v$.

2968. a) Ne; b) da; c) da; d) da; e) ne; f) ne; g) ne; h) da.

2969. a) $y''+y=0$; b) $y''-2y'+y=0$; c) $x^2y''-2xy'+2y=0$; d) $y'''-3y''+4y'-2y=0$.

2970. $y=3x-5x^2+2x^3$.

2971. $y=\frac{1}{x}(C_1\sin x+C_2\cos x)$. *Uputa.* Primijenite supstituciju $y=y_1u$.

2972. $y=C_1x+C_2\ln x$. **2973.** $y=A+Bx^2+x^3$.

2974. $y=\frac{x^2}{3}+Ax+\frac{B}{x}$. *Uputa.* Partikularna rješenja homogene jednadžbe su $y_1=x$, $y_2=\frac{1}{x}$. Metodom varijacija konstanti dobivamo $C_1=\frac{x}{2}+A$; $C_2=-\frac{x^3}{6}+B$.

2975. $y=A+B\sin x+C\cos x+\ln|\sec x+\operatorname{tg} x|+\sin x\ln|\cos x|-x\cos x$.

2976. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$. **2977.** $y=C_1\,e^{-3x}+C_2\,e^{3x}$.

2978. $y=C_1+C_2\,e^x$.

2979. $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

2980. $y=e^x\,(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

2981. $y=e^{-2x}\,(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$.

2982. $y=(C_1+C_2\,x)\,e^{-x}$.

2983. $y=e^{2x}\,(C_1\,e^{x\sqrt{2}}+C_2\,e^{-x\sqrt{2}})$.

2984. Kada je $k>0$, $y=C_1\,e^{x\sqrt{k}}+C_2\,e^{-x\sqrt{k}}$; kada je $k<0$, $y=C_1\cos\sqrt{-k}x+C_2\sin\sqrt{-k}x$.

2985. $y=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 e^{\frac{\sqrt{5}}{2}x}+C_2 e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}x}\right)$.

2986. $y=e^{\frac{x}{6}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{11}}{6}\,x+C_2\sin\frac{\sqrt{11}}{6}\,x\right)$.

2987. $y=4e^x+e^{4x}$. **2988.** $y=e^{-x}$. **2989.** $y=\sin 2x$. **2990.** $y=1$.

2991. $y=a\ \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$. **2992.** $y=0$. **2993.** $y=C\sin\pi x$.

2994. a) $xe^{2x}\,(Ax^2+Bx+C)$; b) $A\cos 2x+B\sin 2x$; c) $A\cos 2x+B\sin 2x+Cx^2\,e^{2x}$; d) $e^x\,(A\cos x+B\sin x)$; e) $e^x(Ax^2+Bx+C)+xe^{2x}(Dx+E)$; f) $xe^x\,[(Ax^2+Bx+C)\cos 2x+$ $+(Dx^2+Ex+F)\sin 2x]$.

2995. $y=(C_1+C_2\,x)\,e^{2x}+\frac{1}{8}\,(2x^2+4x+3)$.

2996. $y=e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+C_2\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)+x^3+3x^2$.

2997. $y=(C_1+C_2\,x)\,e^{-x}+\frac{1}{9}\,e^{2x}$.

2998. $y=C_1e^x+C_2\,e^{7x}+2$.

2999. $y=C_1\,e^x+C_2\,e^{-x}+\frac{1}{2}\,xe^x$.

3000. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}\,x\sin x$.

3001. $y=C_1\,e^x+C_2\,e^{-2x}-\frac{2}{5}(3\sin 2x+\cos 2x)$.

3002. $y=C_1\,e^{2x}+C_2\,e^{-3x}+x\left(\frac{x}{10}-\frac{1}{25}\right)e^{2x}$.

3003. $y=(C_1+C_2\,x)\,e^x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{x^2}{4}\,e^x-\frac{1}{8}\,e^{-x}$.

3004. $y=C_1+C_2\,e^{-x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}\,(2\cos 2x-\sin 2x)$.

3005. $y=e^x\,(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{x}{4}e^x\sin 2x$.

3006. $y=\cos 2x+\frac{1}{3}\,(\sin x+\sin 2x)$.

3007. 1) $x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t+\frac{A}{\omega^2-p^2}\sin pt$; 2) $x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t-\frac{A}{2\omega}\,t\cos\omega t$.

3008. $y=C_1\,e^{3x}+C_2\,e^{4x}-xe^{4x}$.

3009. $y=C_1+C_2\,e^{2x}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{6}$.

3010. $y=e^x\,(C_1+C_2x+x^2)$.

3011. $y=C_1+C_2\,e^{2x}+\frac{1}{2}\,xe^{2x}-\frac{5}{2}\,x$.

3012. $y=C_1\,e^{-2x}+C_2\,e^{4x}-\frac{1}{9}\,e^x+\frac{1}{5}\,(3\cos 2x+\sin 2x)$.

3013. $y=C_1+C_2\,e^{-x}+e^x+\frac{5}{2}\,x^2-5x$.

3014. $y=C_1+C_2\,e^x-3xe^x-x-x^2$.

3015. $y=\left(C_1+C_2x+\frac{1}{2}\,x^2\right)e^{-x}+\frac{1}{4}\,e^x$.

3016. $y=(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)\,e^x+\frac{1}{37}\,(\sin 3x+6\cos 3x)+\frac{e^x}{9}$.

3017. $y=(C_1+C_2x+x^2)\,e^{2x}+\frac{x+1}{8}$.

3018. $y=C_1+C_2e^{3x}-\frac{1}{10}(\cos x+3\sin x)-\frac{x^2}{6}-\frac{x}{9}$.

3019. $y=\frac{1}{8}e^{2x}(4x+1)-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}$. **3020.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-x\sin x-\cos x$.

3021. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-\frac{e^{2x}}{20}(\sin 2x+2\cos 2x)$.

3022. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{x}{4}(3\sin 2x+2\cos 2x)+\frac{1}{4}$.

3023. $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x-2x\cos x)$. **3024.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{1}{4}(x^2-x)e^x$.

3025. $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{4}x\sin x-\frac{1}{16}\cos x+\frac{1}{54}(3x-1)e^{3x}$.

3026. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+\frac{1}{9}(2-3x)+\frac{1}{16}(2x^2-x)e^{3x}$.

3027. $y=C_1+C_2e^{2x}-2xe^x-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}x^2$. **3028.** $y=\left(C_1+C_2x+\frac{x^3}{6}\right)e^{2x}$.

3029. $y=C_1e^{-3x}+C_2e^x-\frac{1}{8}(2x^2+x)e^{-3x}+\frac{1}{16}(2x^2+3x)e^x$.

3030. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{x}{4}\cos x+\frac{x^2}{4}\sin x-\frac{x}{8}\cos 3x+\frac{3}{32}\sin 3x$. *Uputa.* Produkt kosinusa pretvorite u sumu kosinusa.

3031. $y=C_1e^{-x\sqrt{2}}+C_2e^{x\sqrt{2}}+xe^x\sin x+e^x\cos x$.

3032. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

3033. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\sin x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **3034.** $y=(C_1+C_2x)e^x+xe^x\ln|x|$.

3035. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+xe^{-x}\ln|x|$.

3036. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x+\cos x\ln|\cos x|$.

3037. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-x\cos x+\sin x\ln|\sin x|$.

3038. a) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+(e^x+e^{-x})\operatorname{arctg}e^x$; b) $y=C_1e^{x\sqrt{2}}+C_2e^{-x\sqrt{2}}+e^{x^2}$.

3040. Jednadžba gibanja je $\frac{2}{g}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=2-k(x+2)\ (k=1)$; $T=2\pi\sqrt{\frac{2}{g}}$ s.

3041. $x=\frac{2g\sin 30t-60\sqrt{g}\sin\sqrt{g}t}{g-900}$ cm. *Uputa.* Ako x računamo od položaja u kojem teret miruje, onda je $\frac{4}{g}x''=4-k(x_0+x-y-l)$, gdje je x_0 udaljenost tačke mirovanja tereta od početne tačke ovješenja opruge, l je duljina opruge u stanju mirovanja; prema tome je $k(x_0-l)=4$ i $\frac{4}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=-k(x-y)$, gdje je $k=4$, $g=981$ cm/s².

3042. $m\frac{d^2x}{dt^2}=k(b-x)-k(b+x)$; $x=c\cos\left(t\sqrt{\frac{2k}{m}}\right)$

3043. $6\frac{d^2s}{dt^2}=gs$; $t=\sqrt{\frac{6}{g}}\ln(6+\sqrt{35})$.

3044. a) $r=\frac{a}{2}(e^{\omega t}+e^{-\omega t})$; b) $r=\frac{v_0}{2\omega}(e^{\omega t}-e^{-\omega t})$. *Uputa.* Diferencijalna jednadžba gibanja je $\frac{d^2r}{dt^2}=\omega^2 r$.

3045. $y=C_1+C_2\,e^x+C_3\,e^{12x}$.

3046. $y=C_1+C_2\,e^{-x}+C_3\,e^x$.

3047. $y=C_1\,e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)$.

3048. $y=C_1+C_2x+C_3\,e^{x\sqrt{2}}+C_4\,e^{-x\sqrt{2}}$.

3049. $y=e^x\,(C_1+C_2\,x+C_3\,x^2)$.

3050. $y=e^x\,(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-x}\,(C_3\cos x+C_4\sin x)$.

3051. $y=(C_1+C_2\,x)\cos 2x+(C_3+C_4\,x)\sin 2x$.

3052. $y=C_1+C_2\,e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,x+C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)$.

3053. $y=(C_1+C_2\,x)\,e^{-x}+(C_3+C_4\,x)\,e^x$.

3054. $y=C_1\,e^{ax}+C_2\,e^{-ax}+C_3\cos ax+C_4\sin ax$.

3055. $y=(C_1+C_2x)\,e^{\sqrt{3}x}+(C_3+C_4\,x)\,e^{-\sqrt{3}x}$.

3056. $y=C_1+C_2x+C_3\cos ax+C_4\sin ax$.

3057. $y=C_1+C_2\,x+(C_3+C_4\,x)\,e^{-x}$.

3058. $y=(C_1+C_2\,x)\cos x+(C_3+C_4\,x)\sin x$.

3059. $y=e^{-x}\,(C_1+C_2\,x+\ldots+C_n\,x^{n-1})$.

3060. $y=C_1+C_2\,x+\left(C_3+C_4\,x+\frac{x^2}{2}\right)e^x$.

3061. $y=C_1+C_2\,x+12x^2+3x^3+\frac{1}{2}\,x^4+\frac{1}{20}\,x^5+(C_3+C_4\,x)\,e^x$.

3062. $y=C_1\,e^x+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)-x^3-5$.

3063. $y=C_1+C_2\,x+C_3\,x^2+C_4\,e^{-x}+\frac{1}{1088}\,(4\cos 4x-\sin 4x)$.

3064. $y=C_1\,e^{-x}+C_2+C_3\,x+\frac{3}{2}\,x^2-\frac{1}{3}\,x^3+\frac{1}{12}\,x^4+e^x\left(\frac{3}{2}\,x-\frac{15}{4}\right)$.

3065. $y=C_1\,e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x+e^x\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{8}\right)$.

3066. $y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x+\sec x+\cos x\ln|\cos x|-\operatorname{tg} x\sin x+x\sin x$.

3067. $y=e^{-x}+e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{3}\,x\right)+x-2$.

3068. $y=(C_1+C_2\ln x)\,\frac{1}{x}$.

3069. $y=C_1\,x^3+\frac{C_2}{x}$.

3070. $y=C_1\cos(2\ln x)+C_2\sin(2\ln x)$.

3071. $y=C_1\,x+C_2\,x^2+C_3\,x^3$.

3072. $y=C_1+C_2\,(3x+2)^{-\frac{4}{3}}$.

3073. $y=C_1\,x^2+\frac{C_2}{x}$.

3074. $y=C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)$.

3075. $y=C_1\,x^3+C_2\,x^2+\frac{1}{2}\,x$.

3076. $y=(x+1)^2\,[C_1+C_2\ln(x+1)]+(x+1)^3$.

3077. $y=x\,(\ln x+\ln^2 x)$.

3078. $y=C_1\cos x+C_2\sin x,\ z=C_2\cos x-C_1\sin x$.

3079. $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x),\ z=\frac{1}{5}e^{-x}[(C_2-2C_1)\cos x-(C_1+2C_2)\sin x].$

3080. $y=(C_1-C_2-C_1x)e^{-2x},\ z=(C_1x+C_2)e^{-2x}.$

3081. $x=C_1e^t+e^{-\frac{t}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),$

$$y=C_1e^t+e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{C_3\sqrt{3}-C_2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{C_2\sqrt{3}+C_3}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),$$

$$z=C_1e^t+e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{-C_3\sqrt{3}-C_2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{C_2\sqrt{3}-C_3}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

3082. $x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t},\ y=C_3e^{-t}+C_2e^{2t},\ z=-(C_1+C_3)e^{-t}+C_2e^{2t}.$

3083. $y=C_1+C_2e^{2x}-\frac{1}{4}(x^2+x),\ z=C_2e^{2x}-C_1+\frac{1}{4}(x^2-x-1).$

3084. $y=C_1+C_2x+2\sin x,\ z=-2C_1-C_2(2x+1)-3\sin x-2\cos x.$

3085. $y=(C_2-2C_1-2C_2x)e^{-x}-6x+14,\ z=(C_1+C_2x)e^{-x}+5x-9;\ C_1=9,\ C_2=4,$
$y=14(1-e^{-x})-2x(3+4e^{-x}),\ z=-9(1-e^{-x})+x(5+4e^{-x}).$

3086. $x=10e^{2t}-8e^{3t}-e^t+6t-1;\ y=-20e^{2t}+8e^{3t}+3e^t+12t+10.$

3087. $y=\frac{2C_1}{(C_2-x)^2},\ z=\frac{C_1}{C_2-x}.$

3088. a) $\frac{(x^2+y^2)y}{x^2}=C_1,\ \frac{z}{y}=C_2$; b) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C_1,\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=C_2$. c) *Uputa.* Integriranjem homogene jednadžbe $\frac{dx}{x-y}=\frac{d}{x+y}$, nalazimo prvi integral $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C_1$. Nadalje upotrebom svojstava izvedenih razmjera, imamo $\frac{dz}{z}=\frac{x\,dx}{x(x-y)}=\frac{y\,dy}{y(x+y)}=\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$. Odatle je $\ln z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\ln C_2$ i prema tome, $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=C_2$; d) $x+y+z=0,\ x^2+y^2+z^2=6$. *Uputa*. Primjenom svojstava izvedenih razmjera imamo: $\frac{dx}{y-z}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{x-y}=\frac{dx+dy+dz}{0}$; odatle je $dx+dy+dz=0$ i prema tome $x+y+z=C_1$. Analogno je $\frac{x\,dx}{x(y-z)}=\frac{y\,dy}{y(z-x)}=\frac{z\,dz}{z(x-y)}=\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{0}$; $x\,dx+y\,dy+z\,dz=0$ i $x^2+y^2+z^2=C_2$. Na taj način integralne krivulje su kružnice $x+y+z=C_1,\ x^2+y^2+z^2=C_2$. Iz početnih uvjeta $x=1,\ y=1,\ z=-2$ dobit ćemo $C_1=0,\ C_2=6$.

3089. $y=C_1x^2+\frac{C_2}{x}-\frac{x^2}{18}(3\ln^2x-2\ln x),\quad Z=1-2C_1x+\frac{C_2}{x^2}+\frac{x}{9}(3\ln^2x+\ln x-1).$

3090. $y=C_1e^{x\sqrt{2}}+C_2e^{-x\sqrt{2}}+C_3\cos x+C_4\sin x+e^x-2x,$

$$Z=-C_1e^{x\sqrt{2}}-C_2e^{-x\sqrt{2}}-\frac{C_3}{4}\cos x-\frac{C_4}{4}\sin x-\frac{1}{2}e^x+x.$$

3091. $x=\frac{v_0 m\cos\alpha}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$, $y=\frac{m}{k^2}(kv_0\sin\alpha+mg)\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)-\frac{mgt}{k}$. *Rješenje.* $m\frac{dv_x}{dt}=-kv_x$; $m\frac{dv_y}{dt}=-kv_y-mg$ pri početnim uvjetima: $x_0=y_0=0$, $v_{x0}=v_0\cos\alpha$, $v_{y0}=v_0\sin\alpha$ pri $t=0$. Integriranjem dobijemo: $v_x=v_0\cos\alpha\, e^{-\frac{k}{m}t}$, $kv_y+mg=(kv_0\sin\alpha+mg)\,e^{-\frac{k}{m}t}$.

3092. $x=\alpha\cos\frac{k}{\sqrt{m}}t$, $y=\frac{v_0\sqrt{m}}{k}\sin\frac{k}{\sqrt{m}}t$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2y^2}{mv_0^2}=1$. *Uputa.* Diferencijalne jednadžbe gibanja su: $m\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2x$; $m\frac{d^2y}{dt^2}=-k^2y$. **3093.** $y=-2-2x-x^2$.

3094. $y=\left(y_0+\frac{1}{4}\right)e^{2(x-1)}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$.

3095. $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{9}{32}x^4+\frac{21}{320}x^5+\ldots$

3096. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7\cdot 9}x^7+\frac{2}{7\cdot 11\cdot 27}x^{11}-\ldots$

3097. $y=x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\ldots$; red konvergira za $-1\leqslant x\leqslant 1$.

3098. $y=x-\frac{x^2}{(1!)^2\cdot 2}+\frac{x^3}{(2!)^2\cdot 3}-\frac{x^4}{(3!)^2\cdot 4}+\ldots$; red konvergira za $-\infty<x<+\infty$. *Uputa.* Koristite se metodom neodređenih koeficijenata.

3099. $y=1-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1\cdot 4}{6!}x^6-\frac{1\cdot 4\cdot 7}{9!}x^9+\ldots$; red konvergira za $-\infty<x<+\infty$.

3100. $y=\frac{\sin x}{x}$. *Uputa.* Koristite se metodom neodređenih koeficijenata.

3101. $y=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\ldots$; red konvergira za $|x|<+\infty$. *Uputa.* Koristite se metodom neodređenih koeficijenata.

3102. $x=a\left(1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{2}{4!}t^4-\frac{9}{6!}t^6+\frac{55}{8!}t^8-\ldots\right)$.

3103. $u=A\cos\frac{a\pi t}{l}\sin\frac{\pi x}{l}$. *Uputa.* Koristite se uvjetima: $u(0,t)=0$; $u(l,t)=0$, $u(x,0)=A\sin\frac{\pi x}{l}$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$.

3104. $u=\frac{2l}{\pi^2 a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}$. *Uputa.* Koristite se uvjetima: $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$, $u(x,0)=0$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=1$.

3105. $u=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$. *Uputa.* Koristite se ovim uvjetima:

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ u(x,0)=\begin{cases}\frac{2hx}{l} \text{ za } 0<x\leqslant\frac{l}{2},\\ 2h\left(1-\frac{x}{l}\right) \text{ za } \frac{l}{2}<x<l.\end{cases}$$

3106. $u=\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$, gdje su koeficijenti

$$A_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l \frac{x}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,dx=\frac{8(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2}.$$ *Uputa.* Koristite se ovim uvjetima:

$$u(0,\,t)=0,\ \frac{\partial u(l,\,t)}{\partial x}=0,\quad u(x,\,0)=\frac{x}{l},\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0.$$

3107. $u=\frac{400}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(1-\cos n\pi)\sin\frac{n\pi x}{100}\cdot e^{-\frac{a^2n^2\pi^2 t}{100^2}}$. *Uputa.* Koristite se ovim uvjetima: $u(0,\ t)=0,\ u(100,\ t)=0,\ u(x,0)=0{,}01\,x(100-x)$.

GLAVA X

3108. a) $\leqslant 1''$; $\leqslant 0{,}0023\%$; b) $\leqslant$1mm; $\leqslant 0{,}26\%$; c) $\leqslant 1$ d) $\leqslant 0{,}0016\%$.

3109. a) $\leqslant 0{,}05$; $\leqslant 0{,}021\%$; b) $\leqslant 0{,}0005$; $\leqslant 1{,}45\%$; c) $\leqslant 0{,}005$; $\leqslant 0{,}16\%$.

3110. a) 2 znamenke; $48\cdot 10^3$ ili $49\cdot 10^3$, jer je broj uključen između 47 877 i 48 845; b) 2 znamenke; 15; c) 1 znamenka; $6\cdot 10^2$. Praktički rezultat treba pisati u obliku $(5{,}9\pm 0{,}1)\cdot 10^2$.

3111. a) 29,5; b) $1{,}6\cdot 10^2$; c) 43,2.

3112. a) 84,2; b) 18,5 ili $18{,}47\pm 0{,}01$; c) rezultat izračunavanja nema tačnih znamenaka jer je razlika jednaka stotinki pri mogućoj vrijednosti apsolutne pogreške od jedne stotinke.

3113. $1{,}8\pm 0{,}3$ cm². *Uputa.* Koristite se formulom za prirast površine kvadrata.

3114. a) $30{,}0\pm 0{,}2$; b) $43{,}7\pm 0{,}1$; c) $0{,}3\pm 0{,}1$.

3115. $19{,}9\pm 0{,}1$ m².

3116. a) $1{,}1295\pm 0{,}0002$; b) $0{,}120\pm 0{,}006$; c) kvocijent može varirati između 48 i 62. Prema tome u kvocijentu nije moguće smatrati pouzdanim niti jednu decimalnu znamenku.

3117. 0,480. Posljednja brojka može varirati za 1.

3118. a) 0,1729; b) $277\cdot 10^3$; c) 2.

3119. $(2{,}05\pm 0{,}01)\cdot 10^3$ cm².

3120. a) 1,648; b) $4{,}025\pm 0{,}001$; c) $9{,}006\pm 0{,}003$.

3121. $4{,}01\cdot 10^3$ cm². Apsolutna pogreška iznosi 6,5 cm². Relativna pogreška iznosi 0,16%.

3122. Kateta je jednaka $13{,}8\pm 0{,}2$ cm; $\sin\alpha=0{,}44\pm 0{,}01$; $\alpha=26°15'\pm 35'$.

3123. $2{,}7\pm 0{,}1$.

3124. 0,27 A.

3125. Duljinu njihala treba izmjeriti s tačnošću do 0,3 cm; brojeve π i q uzmite s tri znamenke (prema principu istih utjecaja).

3126. Polumjere i izvodnicu izmjerite s relativnom pogreškom 1/300. Broj π uzmite s tri znamenke (prema principu istih utjecaja).

3127. Veličinu l izmjerite s tačnošću 0,2% a s s tačnošću od 0,7% (prema principu istih utjecaja).

3128.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
1	3	7	−2	−6	14	−23
2	10	5	−8	8	−9	
3	15	−3	0	−1		
4	12	−3	−1			
5	9	−4				
6	5					

3129.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	−4	−12	32	48
3	−16	20	80	48
5	4	100	128	48
7	104	228	176	
9	332	404		
11	736			

3130.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0	-4	-42	-24	24
1	-4	-46	-66	0	24
2	-50	-112	-66	24	24
3	-162	-178	-42	48	24
4	-340	-220	6	72	24
5	-560	-214	78	96	24
6	-774	-136	174	120	24
7	-910	38	294	144	
8	-872	332	438		
9	-540	770			
10	230				

Uputa. Izračunajte prvih pet vrijednosti od y i kad dobijete $\Delta^4 y_0 = 24$ ponovite broj 24 u cijelom stupcu četvrtih razlika. Nakon toga ostali dio tablice ispunite zbrajanjem (od desna ulijevo).

3131. a) 0,211; 0,389; 0,490; 0,660; b) 0,229; 0,399; 0,491; 0,664.

3132. 0,1822; 0,1993; 0,2165; 0,2334; 0,2503.

3133. $1+x+x^2+x^3$.

3134. $y = \frac{1}{96} x^4 - \frac{11}{48} x^3 + \frac{65}{24} x^2 - \frac{85}{12} x + 8$; $y \approx 22$ za $x = 5{,}5$; $y = 20$ za $x \approx 5{,}2$. *Uputa.* Pri izračunavanju x za $y = 20$ uzeti $y_0 = 11$.

3135. Interpolacioni polinom je $y = x^2 - 10x + 1$; $y = 1$ za $x = 0$.

3136. 158 kp (približno).

3137. a) $y(0{,}5) = -1$, $y(2) = 11$; b) $y(0{,}5) = -\frac{15}{16}$, $y(2) = -3$.

3138. $-1{,}325$. **3139.** 1,01. **3140.** $-1{,}86$; $-0{,}25$; 2,11.

3141. 2,09.

3142. 2,45; 0,019.

3143. 0,31; 4.

3144. 2,506.

3145. 0,02.

3146. 0,24.

3147. 1,27.

3148. −1,88; 0,35; 1,53.

3149. 1,84.

3150. 1,31; −0,67.

3151. 7,13.

3152. 0,165.

3153. ±1,73 i 0.

3154. 1,72.

3155. 1,38.

3156. $x = 0{,}83$; $y = 0{,}56$; $x = -0{,}83$; $y = -0{,}56$.

3157. $x = 1{,}67$; $y = 1{,}22$.

3158. 4,493.

3159. ±1,1997.

3160. Prema trapeznoj formuli je 11,625; prema Simpsonovoj formuli je 11,417.

3161. −0,995; −1; 0,005; 0,5%; $\Delta = 0{,}005$

3162. 0,3068; $\Delta = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$.

3163. 0,69.

3164. 0,79.

3165. 0,84.

3166. 0,28.

3167. 0,10.

3168. 1,61.

3169. 1,85.

3170. 0,09.

3171. 0,67.

3172. 0,75.

3173. 0,79.

3174. 4,93.

3175. 1,29. *Uputa.* Koristite se parametarskim jednadžbama elipse $x = \cos t$, $y = 0{,}6222 \sin t$ i dovedite formulu za duljinu luka u oblik $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 t} \cdot dt$, gdje je ε ekscentricitet elipse.

3176. $y_1(x) = \dfrac{x^3}{3}$, $y_2(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^7}{63}$, $y_3(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^7}{63} + \dfrac{2x^{11}}{2079} + \dfrac{x^{15}}{59535}$.

3177. $y_1(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + 1$, $y_2(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^2}{2} - x + 1$, $y_3(x) = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^2}{2} - x + 1$;

$z_1(x) = 3x - 2$, $z_2(x) = \dfrac{x^3}{6} - 2x^2 + 3x - 2$, $z_3(x) = \dfrac{7x^2}{6} - 2x^2 + 3x - 2$.

3178. $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$, $y_3(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.

3179. $y(1) = 3{,}36$.

3180. $y(2) = 0{,}80$.

3181. $y(1) = 3{,}72$; $z(1) = 2{,}72$.

3182. $y = 1{,}80$.

3183. 3,15.

3184. 0,14.

3185. $y(0{,}5) = 3{,}15$; $z(0{,}5) = -3{,}15$.

3186. $y(0{,}5) = 0{,}55$; $z(0{,}5) = -0{,}18$.

3187. 1,16.

3188. 0,87.

3189. $x(\pi) = 3{,}58$; $x'(\pi) = 0{,}79$.

3190. $429 + 1739 \cos x - 1037 \sin x - 6321 \cos 2x + 1263 \sin 2x - 1242 \cos 3x - 33 \sin 3x$.

3191. $6{,}49 - 1{,}96 \cos x + 2{,}14 \sin x - 1{,}68 \cos 2x + 0{,}53 \sin 2x - 1{,}13 \cos 3x + 0{,}04 \sin 3x$.

3192. $0{,}960 + 0{,}851 \cos x + 0{,}915 \sin x + 0{,}542 \cos 2x + 0{,}620 \sin 2x + 0{,}271 \cos 3x + 0{,}100 \sin 3x$.

3193. a) $0{,}608 \sin x + 0{,}076 \sin 2x + 0{,}022 \sin 3x$; b) $0{,}338 + 0{,}414 \cos x + 0{,}111 \cos 2x + 0{,}056 \cos 3x$.

PRILOZI

I. GRČKI ALFABET

Aα — alfa
Bβ — beta
Γγ — gama
Δδ — delta
Eε — epsilon
Zζ — dzeta

Hη — eta
Θθ — theta
Iι — jota
Kϰ — kapa
Λλ — lambda
Mμ — mi

Nν — ni
Ξξ — ksi
Oo — omikron
Ππ — pi
Pρ — ro
Σσ — sigma

Tτ — tau
Υυ — ipsilon
Φφ — fi
Χχ — hi
Ψψ — psi
Ωω — omega

II. NEKE KONSTANTE

Veličina	x	lg x	Veličina	x	lg x
π	3,14159	0,49715	$\frac{1}{e}$	0,36788	$\overline{1}{,}56571$
2π	6,28318	0,79818	e^2	7,38906	0,86859
$\frac{\pi}{2}$	1,57080	0,19612	$\sqrt{e}$	1,64872	0,21715
$\frac{\pi}{4}$	0,78540	$\overline{1}{,}89509$	$\sqrt[3]{e}$	1,39561	0,14476
$\frac{1}{\pi}$	0,31831	$\overline{1}{,}50285$	$M = \lg e$	0,43429	$\overline{1}{,}63778$
π^2	9,86960	0,99430	$\frac{1}{M} = \ln 10$	2,30258	0,36222
$\sqrt{\pi}$	1,77245	0,24857	1 radijan	57°17′45″	
$\sqrt[3]{\pi}$	1,46459	0,16572	arc 1°	0,01745	$\overline{2}{,}24188$
e	2,71828	0,43429	g	9,81	0,99167

III. RECIPROČNE VRIJEDNOSTI, POTENCIJE, KORIJENI, LOGARITMI

x	$\frac{1}{x}$	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	lg x mantise	ln x
1,0	1,000	1,000	1,000	1,000	3,162	1,000	2,154	4,642	0000	0,0000
1,1	0,909	1,210	1,331	1,049	3,317	1,032	2,224	4,791	0414	0,0953
1,2	0,833	1,440	1,728	1,095	3,464	1,063	2,289	4,932	0792	0,1823
1,3	0,769	1,690	2,197	1,140	3,606	1,091	2,351	5,066	1139	0,2624
1,4	0,714	1,960	2,744	1,183	3,742	1,119	2,410	5,192	1461	0,3365
1,5	0,667	2,250	3,375	1,225	3,873	1,145	2,466	5,313	1761	0,4055
1,6	0,625	2,560	4,096	1,265	4,000	1,170	2,520	5,429	2041	0,4700
1,7	0,588	2,890	4,913	1,304	4,123	1,193	2,571	5,540	2304	0,5306
1,8	0,556	3,240	5,832	1,342	4,243	1,216	2,621	5,646	2553	0,5878
1,9	0,526	3,610	6,859	1,378	4,359	1,239	2,668	5,749	2788	0,6419
2,0	0,500	4,000	8,000	1,414	4,472	1,260	2,714	5,848	3010	0,6931
2,1	0,476	4,410	9,261	1,449	4,583	1,281	2,759	5,944	3222	0,7419
2,2	0,454	4,840	10,65	1,483	4,690	1,301	2,802	6,037	3424	0,7885
2,3	0,435	5,290	12,17	1,517	4,796	1,320	2,844	6,127	3617	0,8329
2,4	0,417	5,760	13,82	1,549	4,899	1,339	2,884	6,214	3802	0,8755
2,5	0,400	6,250	15,62	1,581	5,000	1,357	2,924	6,300	3979	0,9163
2,6	0,385	6,760	17,58	1,612	5,099	1,375	2,962	6,383	4150	0,9555
2,7	0,370	7,290	19,68	1,643	5,196	1,392	3,000	6,463	4314	0,9933
2,8	0,357	7,840	21,95	1,673	5,292	1,409	3,037	6,542	4472	1,0296
2,9	0,345	8,410	24,39	1,703	5,385	1,426	3,072	6,619	4624	1,0647
3,0	0,333	9,000	27,00	1,732	5,477	1,442	3,107	6,694	4771	1,0986
3,1	0,323	9,610	29,79	1,761	5,568	1,458	3,141	6,768	4914	1,1314
3,2	0,312	10,24	32,77	1,789	5,657	1,474	3,175	6,840	5051	1,1632
3,3	0,303	10,89	35,94	1,817	5,745	1,489	3,208	6,910	5185	1,1939
3,4	0,294	11,56	39,30	1,844	5,831	1,504	3,240	6,980	5315	1,2238
3,5	0,286	12,25	42,88	1,871	5,916	1,518	3,271	7,047	5441	1,2528
3,6	0,278	12,96	46,66	1,897	6,000	1,533	3,302	7,114	5563	1,2809
3,7	0,270	13,69	50,65	1,924	6,083	1,547	3,332	7,179	5682	1,3083
3,8	0,263	14,44	54,87	1,949	6,164	1,560	3,362	7,243	5798	1,3350
3,9	0,256	15,21	59,32	1,975	6,245	1,574	3,391	7,306	5911	1,3610
4,0	0,250	16,00	64,00	2,000	6,325	1,587	3,420	7,368	6021	1,3863
4,1	0,244	16,81	68,92	2,025	6,403	1,601	3,448	7,429	6128	1,4110
4,2	0,238	17,64	74,09	2,049	6,481	1,613	3,476	7,489	6232	1,4351
4,3	0,233	18,49	79,51	2,074	6,557	1,626	3,503	7,548	6335	1,4586
4,4	0,227	19,36	85,18	2,098	6,633	1,639	3,530	7,606	6435	1,4816
4,5	0,222	20,25	91,12	2,121	6,708	1,651	3,557	7,663	6532	1,5041
4,6	0,217	21,16	97,34	2,145	6,782	1,663	3,583	7,719	6628	1,5261
4,7	0,213	22,09	103,8	2,168	6,856	1,675	3,609	7,775	6721	1,5476
4,8	0,208	23,04	110,6	2,191	6,928	1,687	3,634	7,830	6812	1,5686
4,9	0,204	24,01	117,6	2,214	7,000	1,698	3,659	7,884	6902	1,5892
5,0	0,200	25,00	125,0	2,236	7,071	1,710	3,684	7,937	6990	1,6094
5,1	0,196	26,01	132,7	2,258	7,141	1,721	3,708	7,990	7076	1,6292
5,2	0,192	27,04	140,6	2,280	7,211	1,732	3,733	8,041	7160	1,6487
5,3	0,189	28,09	148,9	2,302	7,280	1,744	3,756	8,093	7243	1,6677
5,4	0,185	29,16	157,5	2,324	7,438	1,754	3,780	8,143	7324	1,6864

nastavak

x	$\frac{1}{x}$	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	lg x mantise	ln x
5,5	0,182	30,25	166,4	2,345	7,416	1,765	3,803	8,193	7404	1,7047
5,6	0,179	31,36	175,6	2,366	7,483	1,776	3,826	8,243	7482	1,7228
5,7	0,175	32,49	185,2	2,387	7,550	1,786	3,849	8,291	7559	1,7405
5,8	0,172	33,64	195,1	2,408	7,616	1,797	3,871	8,340	7634	1,7579
5,9	0,169	34,81	205,4	2,429	7,681	1,807	3,893	8,387	7709	1,7750
6,0	0,167	36,00	216,0	2,449	7,746	1,817	3,915	8,434	7782	1,7918
6,1	0,164	37,21	227,0	2,470	7,810	1,827	3,936	8,481	7853	1,8083
6,2	0,161	38,44	238,3	2,490	7,874	1,837	3,958	8,527	7924	1,8245
6,3	0,159	39,69	250,0	2,510	7,937	1,847	3,979	8,573	7993	1,8405
6,4	0,156	40,96	262,1	2,530	8,000	1,857	4,000	8,618	8062	1,8563
6,5	0,154	42,25	274,6	2,550	8,062	1,866	4,021	8,662	8129	1,8718
6,6	0,151	43,56	287,5	2,569	8,124	1,876	4,041	8,707	8195	1,8871
6,7	0,149	44,89	300,8	2,588	8,185	1,885	4,062	8,750	8261	1,9021
6,8	0,147	46,24	314,4	2,608	8,246	1,895	4,082	8,794	8325	1,9169
6,9	0,145	47,61	328,5	2,627	8,307	1,904	4,102	8,837	8388	1,9315
7,0	0,143	49,00	343,0	2,646	8,367	1,913	4,121	8,879	8451	1,9459
7,1	0,141	50,41	357,9	2,665	8,426	1,922	4,141	8,921	8513	1,9601
7,2	0,139	51,84	373,2	2,683	8,485	1,931	4,160	8,963	8573	1,9741
7,3	0,137	53,29	389,0	2,702	8,544	1,940	4,179	9,004	8633	1,9879
7,4	0,135	54,76	405,2	2,720	8,602	1,949	4,198	9,045	8692	2,0015
7,5	0,133	56,25	421,9	2,739	8,660	1,957	4,217	9,086	8751	2,0149
7,6	0,132	57,76	439,0	2,757	8,718	1,966	4,236	9,126	8808	2,0281
7,7	0,130	59,29	456,5	2,775	8,775	1,975	4,254	9,166	8865	2,0412
7,8	0,128	60,84	474,6	2,793	8,832	1,983	4,273	9,205	8921	2,0541
7,9	0,127	62,41	493,0	2,811	8,888	1,992	4,291	9,244	8976	2,0669
8,0	0,125	64,00	512,0	2,828	8,944	2,000	4,309	9,283	9031	2,0794
8,1	0,123	65,61	531,4	2,846	9,000	2,008	4,327	9,322	9085	2,0919
8,2	0,122	67,24	551,4	2,864	9,055	2,017	4,344	9,360	9138	2,1041
8,3	0,120	68,89	571,8	2,881	9,110	2,025	4,362	9,398	9191	2,1163
8,4	0,119	70,56	592,7	2,898	9,165	2,033	4,380	9,435	9243	2,1282
8,5	0,118	72,25	614,1	2,915	9,220	2,041	4,397	9,473	9294	2,1401
8,6	0,116	73,96	636,1	2,933	9,274	2,049	4,414	9,510	9345	2,1518
8,7	0,115	75,69	658,5	2,950	9,327	2,057	4,431	9,546	9395	2,1633
8,8	0,114	77,44	681,5	2,966	9,381	2,065	4,448	9,583	9445	2,1748
8,9	0,112	79,21	705,0	2,983	9,434	2,072	4,465	9,619	9494	2,1861
9,0	0,111	81,00	729,0	3,000	9,487	2,080	4,481	9,655	9542	2,1972
9,1	0,110	82,81	753,6	3,017	9,539	2,088	4,498	9,691	9590	2,2083
9,2	0,109	84,64	778,7	3,033	9,592	2,095	4,514	9,726	9638	2,2192
9,3	0,108	86,49	804,4	3,050	9,644	2,103	4,531	9,761	9685	2,2300
9,4	0,106	88,36	830,6	3,066	9,695	2,110	4,547	9,796	9731	2,2407
9,5	0,105	90,25	857,4	3,082	9,747	2,118	4,563	9,830	9777	2,2513
9,6	0,104	92,16	884,7	3,098	9,798	2,125	4,579	9,865	9823	2,2618
9,7	0,103	94,09	912,7	3,144	9,849	2,133	4,595	9,899	9868	2,2721
9,8	0,102	96,04	941,2	3,130	9,899	2,140	4,610	9,933	9912	2,2824
9,9	0,101	98,01	970,3	3,146	9,950	2,147	4,626	9,967	9956	2,2925
10,0	0,100	100,00	1000,0	3,162	10,000	2,154	4,642	10,000	0000	2,3026

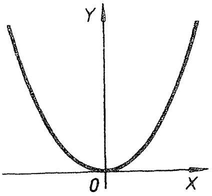
IV. TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

x°	$x = \operatorname{arc} x^0$ (radijani)	sin x	tg x	ctg x	cos x		
0	0,0000	0,0000	0,0000	∞	1,0000	1,5708	90
1	0,0175	0,0175	0,0175	57,29	0,9998	1,5533	89
2	0,0349	0,0349	0,0349	28,64	0,9994	1,5359	88
3	0,0524	0,0523	0,0524	19,08	0,9986	1,5184	87
4	0,0698	0,0698	0,0699	14,30	0,9976	1,5010	86
5	0,0873	0,0872	0,0875	11,43	0,9962	1,4835	85
6	0,1047	0,1045	0,1051	9,514	0,9945	1,4661	84
7	0,1222	0,1219	0,1228	8,144	0,9925	1,4486	83
8	0,1396	0,1392	0,1405	7,115	0,9903	1,4312	82
9	0,1571	0,1564	0,1584	6,314	0,9877	1,4137	81
10	0,1745	0,1736	0,1763	5,671	0,9848	1,3963	80
11	0,1920	0,1908	0,1944	5,145	0,9816	1,3788	79
12	0,2094	0,2079	0,2126	4,705	0,9781	1,3614	78
13	0,2269	0,2250	0,2309	4,331	0,9744	1,3439	77
14	0,2443	0,2419	0,2493	4,011	0,9703	1,3265	76
15	0,2618	0,2588	0,2679	3,732	0,9659	1,3090	75
16	0,2793	0,2756	0,2867	3,487	0,9613	1,2915	74
17	0,2967	0,2924	0,3057	3,271	0,9563	1,2741	73
18	0,3142	0,3090	0,3249	3,078	0,9511	1,2566	72
19	0,3316	0,3256	0,3443	2,904	0,9455	1,2392	71
20	0,3491	0,3420	0,3640	2,747	0,9397	1,2217	70
21	0,3665	0,3584	0,3839	2,605	0,9336	1,2043	69
22	0,3840	0,3746	0,4040	2,475	0,9272	1,1868	68
23	0,4014	0,3907	0,4245	2,356	0,9205	1,1694	67
24	0,4189	0,4067	0,4452	2,246	0,9135	1,1519	66
25	0,4363	0,4226	0,4663	2,145	0,9063	1,1345	65
26	0,4538	0,4384	0,4877	2,050	0,8988	1,1170	64
27	0,4712	0,4540	0,5095	1,963	0,8910	1,0996	63
28	0,4887	0,4695	0,5317	1,881	0,8829	1,0821	62
29	0,5061	0,4848	0,5543	1,804	0,8746	1,0647	61
30	0,5236	0,5000	0,5774	1,732	0,8660	1,0472	60
31	0,5411	0,5150	0,6009	1,6643	0,8572	1,0297	59
32	0,5585	0,5299	0,6249	1,6003	0,8480	1,0123	58
33	0,5760	0,5446	0,6494	1,5399	0,8387	0,9948	57
34	0,5934	0,5592	0,6745	1,4826	0,8290	0,9774	56
35	0,6109	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	0,9599	55
36	0,6283	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	0,9425	54
37	0,6458	0,6018	0,7536	1,3270	0,7986	0,9250	53
38	0,6632	0,6157	0,7813	1,2799	0,7880	0,9076	52
39	0,6807	0,6293	0,8098	1,2349	0,7771	0,8901	51
40	0,6981	0,6428	0,8391	1,1918	0,7660	0,8727	50
41	0,7156	0,6561	0,8693	1,1504	0,7547	0,8552	49
42	0,7330	0,6691	0,9004	1,1106	0,7431	0,8378	48
43	0,7505	0,6820	0,9325	1,0724	0,7314	0,8203	47
44	0,7679	0,6947	0,9657	1,0355	0,7193	0,8029	46
45	0,7854	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	0,7854	45
		cos x	ctg x	tg x	sin x	x (radijani)	x°

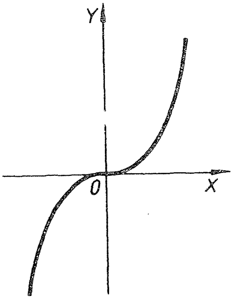
V. EKSPONENCIJALNE, HIPERBOLNE I TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x
0,0	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000
0,1	1,1052	0,9048	0,1002	1,0050	0,0997	0,0998	0,9950
0,2	1,2214	0,8187	0,2013	1,0201	0,1974	0,1987	0,9801
0,3	1,3499	0,7408	0,3045	1,0453	0,2913	0,2955	0,9553
0,4	1,4918	0,6703	0,4108	1,0811	0,3799	0,3894	0,9211
0,5	1,6487	0,6065	0,5211	1,1276	0,4621	0,4794	0,8776
0,6	1,8221	0,5488	0,6367	1,1855	0,5370	0,5646	0,8253
0,7	2,0138	0,4966	0,7586	1,2552	0,6044	0,6442	0,7648
0,8	2,2255	0,4493	0,8881	1,3374	0,6640	0,7174	0,6967
0,9	2,4596	0,4066	1,0265	1,4331	0,7163	0,7833	0,6216
1,0	2,7183	0,3679	1,1752	1,5431	0,7616	0,8415	0,5403
1,1	3,0042	0,3329	1,3356	1,6685	0,8005	0,8912	0,4536
1,2	3,3201	0,3012	1,5095	1,8107	0,8337	0,9320	0,3624
1,3	3,6693	0,2725	1,6984	1,9709	0,8617	0,9636	0,2675
1,4	4,0552	0,2466	1,9043	2,1509	0,8854	0,9854	0,1700
1,5	4,4817	0,2231	2,1293	2,3524	0,9051	0,9975	0,0707
1,6	4,9530	0,2019	2,3756	2,5775	0,9217	0,9996	−0,0292
1,7	5,4739	0,1827	2,6456	2,8283	0,9354	0,9917	−0,1288
1,8	6,0496	0,1653	2,9422	3,1075	0,9468	0,9738	−0,2272
1,9	6,6859	0,1496	3,2682	3,4177	0,9562	0,9463	−0,3233
2,0	7,3891	0,1353	3,6269	3,7622	0,9640	0,9093	−0,4161
2,1	8,1662	0,1225	4,0219	4,1443	0,9704	0,8632	−0,5048
2,2	9,0250	0,1108	4,4571	4,5679	0,9757	0,8085	−0,5885
2,3	9,9742	0,1003	4,9370	5,0372	0,9801	0,7457	−0,6663
2,4	11,0232	0,0907	5,4662	5,5569	0,9837	0,6755	−0,7374
2,5	12,1825	0,0821	6,0502	6,1323	0,9866	0,5985	−0,8011
2,6	13,4637	0,0743	6,6947	6,7690	0,9890	0,5155	−0,8569
2,7	14,8797	0,0672	7,4063	7,4735	0,9910	0,4274	−0,9041
2,8	16,4446	0,0608	8,1919	8,2527	0,9926	0,3350	−0,9422
2,9	18,1741	0,0550	9,0596	9,1146	0,9940	0,2392	−0,9710
3,0	20,0855	0,0498	10,0179	10,0677	0,9950	0,1411	−0,9900
3,1	22,1979	0,0450	11,0764	11,1215	0,9959	0,0416	−0,9991
3,2	24,5325	0,0408	12,2459	12,2366	0,9967	−0,0584	−0,9983
3,3	27,1126	0,0369	13,5379	13,5748	0,9973	−0,1577	−0,9875
3,4	29,9641	0,0334	14,9654	14,9987	0,9978	−0,2555	−0,9668
3,5	33,1154	0,0302	16,5426	16,5728	0,9982	−0,3508	−0,9365

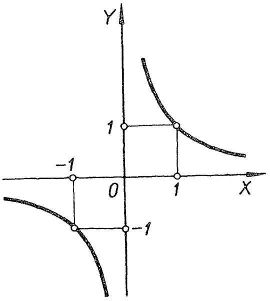
VI. NEKE KRIVULJE (PODSJETNIK)



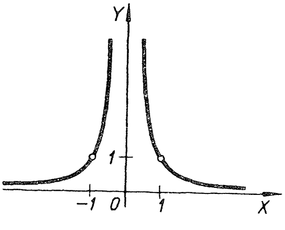
1. Parabola
$y=x^2$.



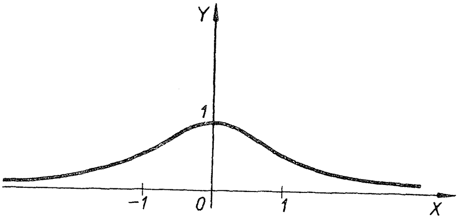
2. Kubna parabola
$y=x^3$.



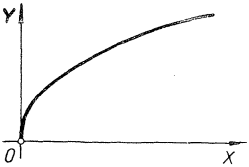
3. Istostrana hiperbola
$y=\frac{1}{x}$.



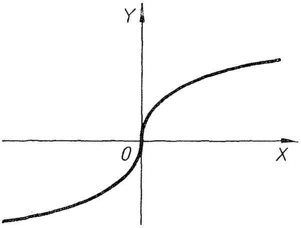
4. Graf razlomljene funkcije
$y=\frac{1}{x^2}$.



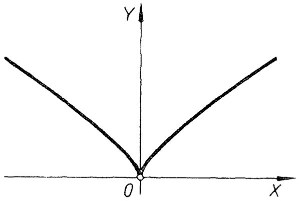
5. „Versiera“ Marije Agnesi
$y=\frac{1}{1+x^2}$.



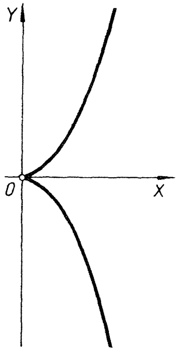
6. Parabola (gornja grana)
$y=\sqrt{x}$.



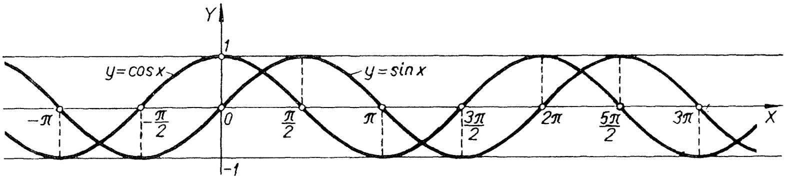
7. Kubna parabola
$y=\sqrt[3]{x}$.



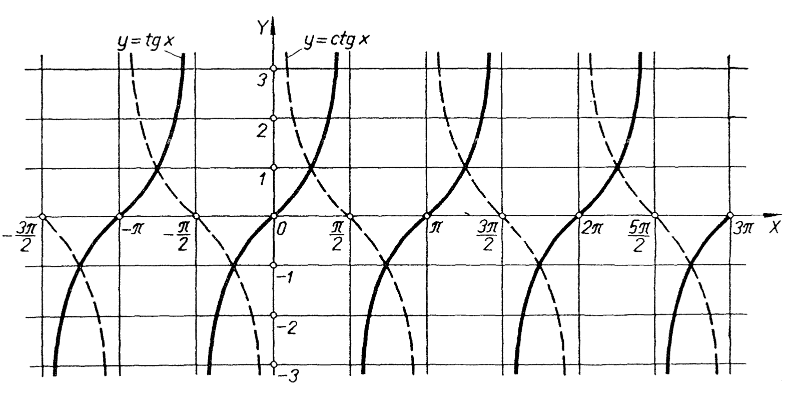
8a. Neilova parabola
$y=x^{\frac{2}{3}}$ ili $\begin{cases} x=t^3, \\ y=t^2. \end{cases}$



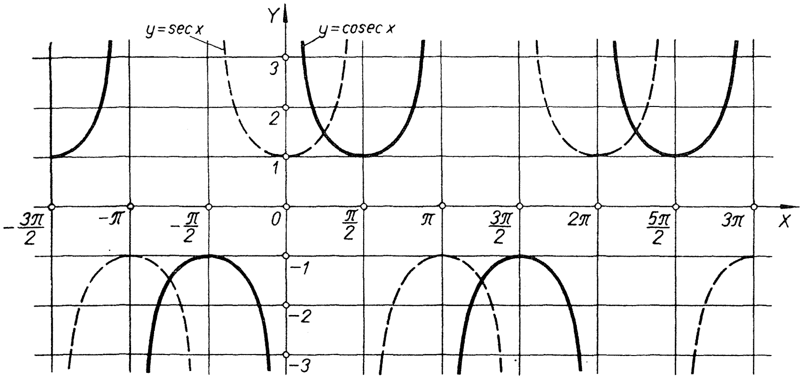
8b. Semikubna parabola
$y^2=x^3$ ili $\begin{cases} x=t^2, \\ y=t^3. \end{cases}$



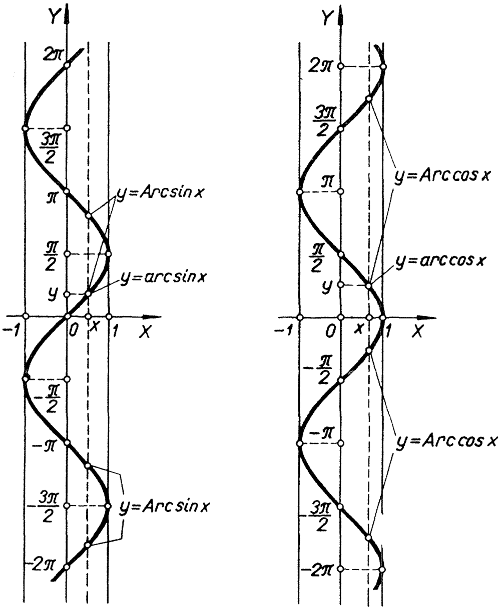
9. Sinusoida i kosinusoida
$y=\sin x$ i $y=\cos x$



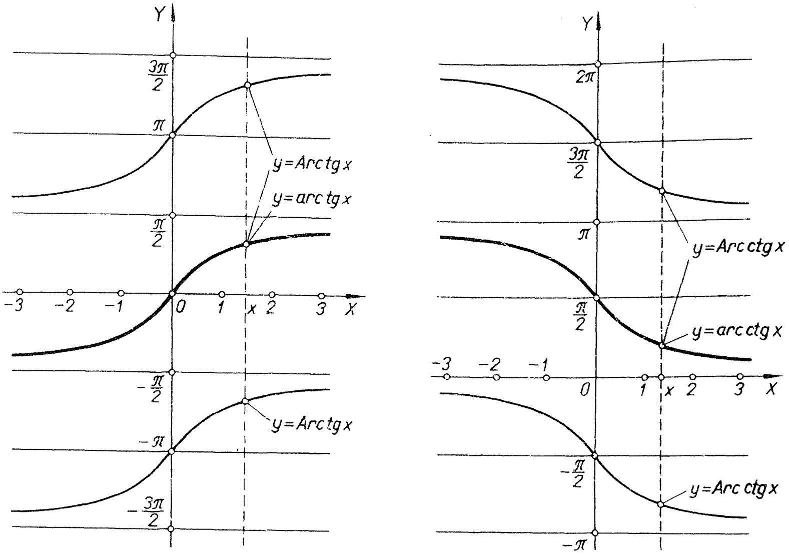
10. Tangentoida i kotangentoida
$y=\operatorname{tg} x$ i $y=\operatorname{ctg} x$.



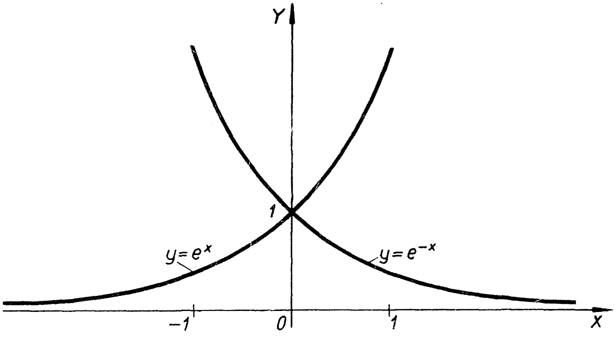
11. Grafovi funkcija
$y = \sec x$ i $y = \operatorname{cosec} x$.



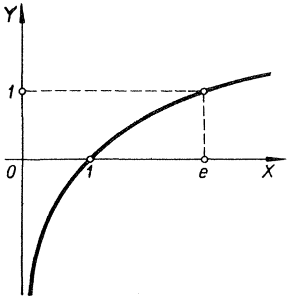
12. Grafovi arkus-funkcija
$y = \operatorname{Arcsin} x$ i $y = \operatorname{Arccos} x$.



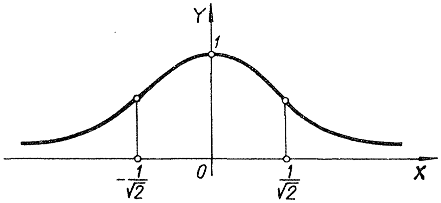
13. Grafovi arkus-funkcija
$y=\mathrm{Arctg}\, x$ i $y=\mathrm{Arcctg}\, x$.



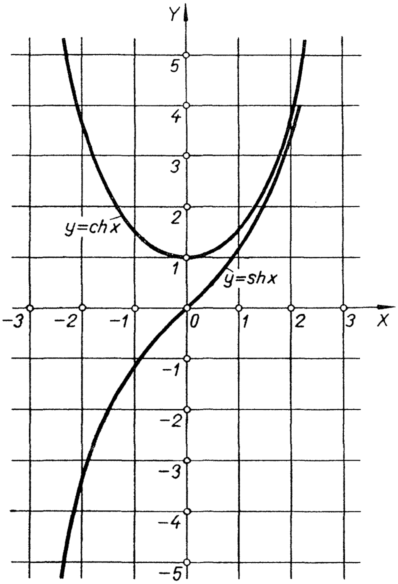
14. Grafovi eksponencijalnih funkcija
$y=e^x$ i $y=e^{-x}$.



15. Logaritamska krivulja
$y=\ln x$.



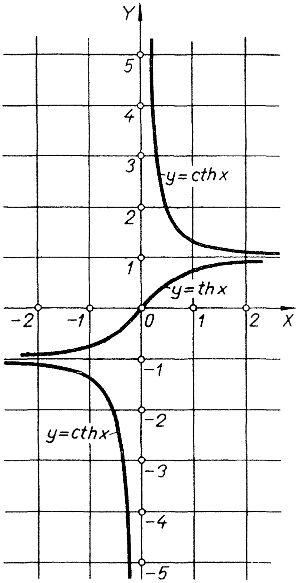
16. Gaussova krivulja
$y=e^{-x^2}$.



17. Grafovi hiperbolnih funkcija

$$y=\operatorname{sh} x \equiv \frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad \text{i}$$

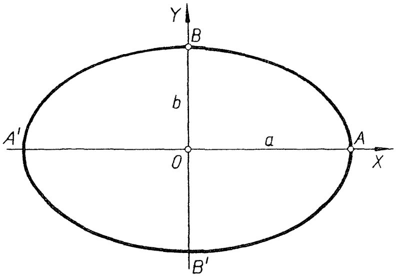
$$y=\operatorname{ch} x \equiv \frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{(lančanica).}$$



18. Grafovi hiperbolnih funkcija

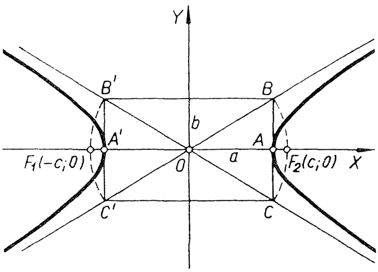
$$y=\operatorname{th} x \equiv \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \quad \text{i}$$

$$y=\operatorname{cth} x \equiv \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\ .$$



19. Elipsa

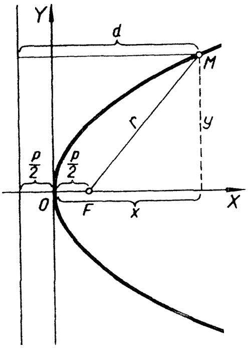
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{ili} \quad \begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t. \end{cases}$$

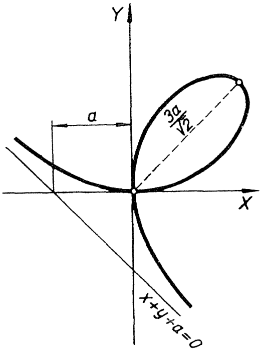

Y
B'
B
b
A'
A
$F_1(-c;0)$
0
a
$F_2(c;0)$
X
C'
C

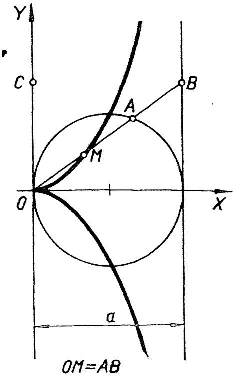
20. Hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{ili}$$

$$\begin{cases} x=a\ \mathrm{ch}\, t, \\ y=b\ \mathrm{sh}\, t \end{cases} \quad \text{(za desnu granu).}$$


Y
d
M
r
y
$\frac{p}{2}$
$\frac{p}{2}$
0
F
x
X


Y
a
$\frac{3a}{\sqrt{2}}$
X
x+y+a=0



OM=AB

21. Parabola $y^2=2px.$

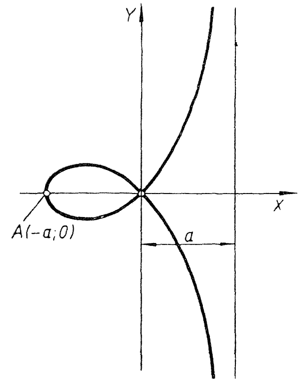
22. Descartesov list $x^3+y^3-3axy=0$ ili

$$\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

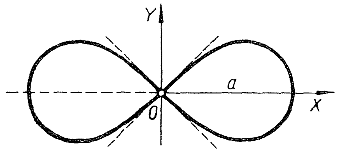
23. Dioklova cisoida

$$y^2=\frac{x^3}{a-x} \quad \text{ili}$$

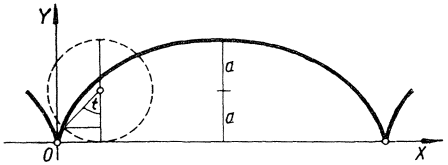
$$\begin{cases} x=\dfrac{at^2}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{at^3}{1+t^2}. \end{cases}$$



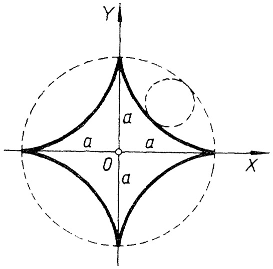
24. Strofoida
$$y^2=x^2\,\frac{a+x}{a-x}.$$



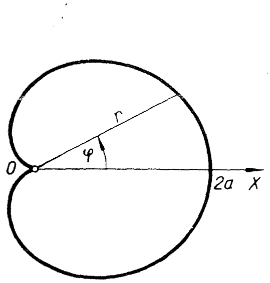
25. Bernoullijeva lemniskata
$(x^2+y^2)^2=a^2\,(x^2-y^2)$
ili $r^2=a^2\cos 2\varphi$.



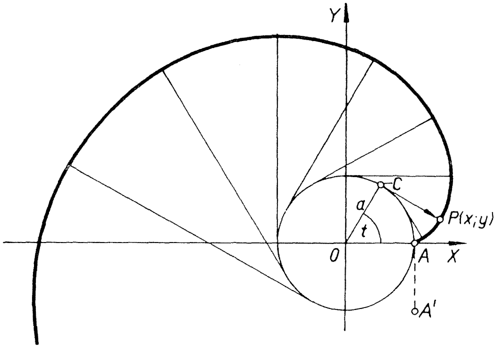
26. Cikloida
$$\begin{cases} x=a\,(t-\sin t),\\ y=a\,(1-\cos t).\end{cases}$$



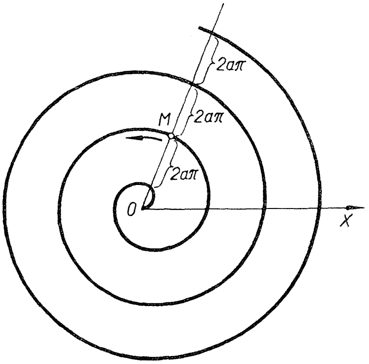
27. Hipocikloida (astroida)
$$\begin{cases} x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t.\end{cases}$$
ili $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.



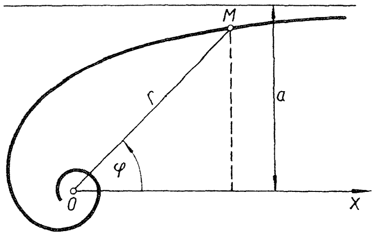
28. Kardioida
$r=a\,(1+\cos\varphi)$.


Y
C
a
t
P(x;y)
0
A
X
A'

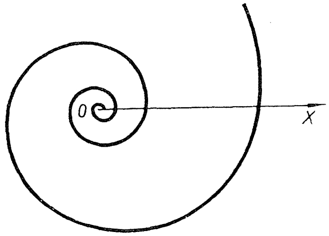
29. Evolventa kružnice
$$\begin{cases} x=a\,(\cos t+t\sin t),\\ y=a\,(\sin t-t\cos t).\end{cases}$$


2aπ
M
2aπ
2aπ
O
X

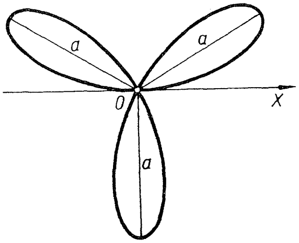
30. Arhimedova zavojnica
$r = a\varphi \quad (r \geq 0).$



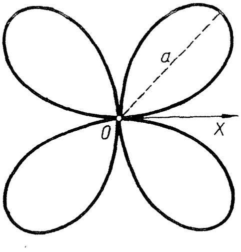
31. Hiperbolna zavojnica
$r = \frac{a}{\varphi} \quad (r > 0).$



32. Logaritamska zavojnica
$r = e^{a\varphi}.$



33. Ruža sa tri latice
$r = a \sin 3\varphi \quad (r \geq 0).$



34. Ruža sa četiri latice
$r = a \sin 2\varphi.$

Znak: 7817 Sv.

Izdanje
B. P. DEMIDOVIČ I SURADNICI
ZADACI I RIJEŠENI PRIMJERI IZ VIŠE MATEMATIKE
S PRIMJENOM NA TEHNIČKE NAUKE

Naslov originala
ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
ДЛЯ ВТУЗОВ

Preveli s ruskoga
Ing. I. UREMOVIĆ i ing. Z. VISTRIČKA

Redaktor prijevoda
Prof. dr ing. DANILO BLANUŠA

Izdavač
TEHNIČKA KNJIGA, izdavačko poduzeće
OOUR IZDAVAČKA DJELATNOST
ZAGREB, Jurišićeva 10

Za izdavača odgovara
Ing. KUZMAN RAŽNJEVIĆ

Uredništvo izdanja za sveučilište
Glavni urednik
ZVONKO VISTRIČKA

Urednik edicije
IVAN UREMOVIĆ

Naslovnu stranu izradio
SREČKO PRELOVEC

Crteže izradili
M. KAVŠEK i T. STRUJIĆ

Tisak
»BIROGRAFIKA« — SUBOTICA

Tisak dovršen:
U PROSINCU 1978.

Na osnovu čl. 36. st. 1. toč. 7. Zakona o oporezivanju proizvoda i usluga u prometu (Sl. list SFRJ 33/72) na ovu se knjigu ne plaća porez na promet.